

Feuille d'Exercices II

Probabilités

Exercice 1. Soit S un ensemble fondamental et E, F, G trois événements de S . Traduire en termes ensemblistes, c'est-à-dire en utilisant uniquement les symboles union, intersection et complémentaire les événements suivants.

1. Seulement E se réalise.
2. E et F se réalisent mais pas G .
3. Les trois événements se réalisent.
4. Au moins l'un des trois événements se réalise.
5. Aucun ne se réalise.
6. Au plus l'un des trois se réalise.
7. Exactement deux des trois se réalisent.

Exercice 2. Soit S un ensemble fondamental et soient $E_1, \dots, E_n$ des événements.

1. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(E_i).$$

2. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) \leq \min_{1 \leq k \leq n} \left(\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(E_i) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \mathbb{P}(E_i \cap E_k) \right)$$

Indication : on pourra d'abord voir que $\mathbb{P}(E_i) - \mathbb{P}(E_i \cap E_k) = \mathbb{P}(E_i \setminus E_k)$

3. Montrer par récurrence que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n E_i\right) \geq \left(\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(E_i) \right) - (n-1).$$

Exercice 3. On tire simultanément trois cartes au hasard dans un paquet de 52 cartes. Calculer la probabilité de

1. n'obtenir que des cœurs.
2. n'obtenir que des valets.
3. obtenir deux carreaux et un pique.

Exercice 4. Soit $n \geq 1$. On lance n fois un dé équilibré. Calculer la probabilité d'obtenir

1. au moins une fois un 6.
2. au moins deux fois un 6.
3. au moins k fois un 6.

Exercice 5. On considère une urne infiniment grande et une collection infinie de boules numérotées. On considère l'expérience suivante : À la première étape on place les boules numérotées de 1 à 10 dans l'urne puis on enlève une boule (cette boule changera selon les questions). À la deuxième étape, on place les boules de 11 à 20 puis on enlève une boule et continue ces expériences jusqu'à l'infini.

1. Si à chaque étape, on enlève la dernière boule placée (à la première étape la boule 10 ; à la deuxième, la boule 20, etc), combien y a-t-il de boules dans l'urne après toutes les étapes ?
2. Même question Si maintenant à la i -ème étape, on enlève la boule i (à la première étape la boule 1 ; à la deuxième, la boule 2, etc)
3. Même question si maintenant on choisit la boule au hasard uniformément à chaque étape.



Augustus de Morgan
(1806–1871)



Carlo Emilio Bonferroni
(1892–1960)

