

Feuille d'Exercices XI

Probabilités

Exercice 1. Un sac contient quatre boules indiscernables au toucher : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2. On effectue n tirages successifs, avec remise, d'une boule dans ce sac. Soit S_n la somme des numéros tirés.

1. Déterminer la fonction génératrice de S_n .
2. En déduire la loi de S_n .

Exercice 2. Une usine fabrique des pièces dont une proportion inconnue p est défectueuse et on souhaite trouver une valeur approchée de p . On effectue alors un prélèvement de n pièces et suppose que cela correspond à n tirages indépendants avec remise. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses et on souhaite quantifier le fait que $\frac{X_n}{n}$ approche p .

1. Quelle est la loi de X_n ? Donner son espérance et sa variance.
2. Démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

3. En déduire une condition sur n pour que $\frac{X_n}{n}$ soit une valeur approchée de p à 10^{-2} près avec une probabilité supérieure ou égale à 95%.
4. Répondre à la question précédente en utilisant une approximation qui utilise le théorème central limite. On utilisera le fait que $\mathbb{P}(|\mathcal{N}(0, 1)| \leq 1, 96) \geq 0, 95$.

Exercice 3. Soit $n \geq 1$ et X une variable aléatoire géométrique de paramètre $\frac{1}{n}$.

1. Montrer que $\mathbb{P}(X \geq n^2) \leq \frac{1}{n}$.
2. Montrer que $\mathbb{P}(X \geq 2n) \leq 1 - \frac{1}{n}$.

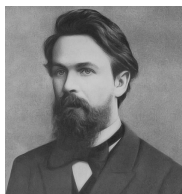
Exercice 4. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telle que

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p, \quad \mathbb{P}(X_n = -1) = 1 - p \quad \text{avec} \quad p > \frac{1}{2}.$$

1. Que représente l'ensemble $\limsup\{S_n = 0\} := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} \{S_k = 0\}$?
2. En utilisant la loi des grands nombres, montrer que $\mathbb{P}\left(S_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty\right) = 1$.
3. En déduire que $\mathbb{P}(\limsup\{S_n = 0\}) = 0$.

Exercice 5. En appliquant le théorème central limite à une suite de variables aléatoires indépendantes (X_n) suivant toutes une loi de Poisson de paramètre 1, montrer que

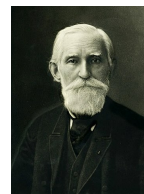
$$e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{2}.$$



Andreï Andreïevitch Markov
(1856–1922)



Irénée-Jules Bienaymé
(1796–1878)



Pafnouti Lvovitch Tchebychev
(1821–1894)

