

# Feuille d'Exercices X

## Probabilités

**Exercice 1.** Une urne contient initialement  $b$  boules bleues et  $r$  boules rouges avec  $b, r \geq 2$ . Les boules sont tirées une à une avec remise.

1. Montrer que le nombre moyen de boules rouges tirées d'affilée est de  $\frac{r}{b}$ .
2. Montrer que le nombre moyen de prises jusqu'à ce que la première couleur tirée soit répétée est égale à 3.

**Exercice 2.** On considère deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$ . On suppose que  $X$  est uniformément distribué sur  $\{0, 1, \dots, n\}$  et que conditionnellement à  $X = k$ ,  $Y$  suit une loi binomiale de paramètre  $n$  et  $\frac{k}{n}$ .

1. Calculer  $\text{Var}(X)$ .

*Indication : On pourra utiliser (ou remonter) la formule  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .*

2. Montrer que  $\mathbb{E}[X] = \frac{n}{2}$  et que  $\text{Var}(Y) = \frac{n^2+4n-2}{12}$ .
3. Trouver  $\mathbb{E}[X+Y]$  et  $\text{Var}(X+Y)$ .

**Exercice 3.** Un bâton de longueur 1 est cassé uniformément et la plus grande pièce des deux est encore cassée en deux uniformément.

1. Montrer que 3 longueurs forment un triangle si et seulement si la somme de deux longueurs est plus grande que la troisième.
2. Montrer que la probabilité que les 3 morceaux de bâton puissent former un triangle est  $2 \log 2 - 1$ .

**Exercice 4.** On se donne  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires et veut prédire  $Y$  sur ce que l'on sait de  $X$ . On cherche donc une fonction  $g(X)$  qui *prédit*  $Y$ . On va donc chercher à minimiser  $\mathbb{E}[(Y - g(X))^2]$ .

1. Montrer que pour toute fonction  $G$ , on a

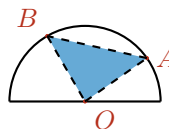
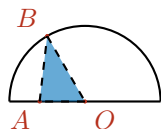
$$\mathbb{E}[(Y - g(X))^2] \geq \mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y|X])^2]$$

En d'autres termes,  $\mathbb{E}[Y|X]$  est le meilleur prédicteur.

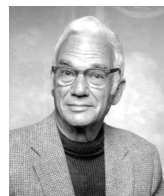
2. Un signal est envoyé en  $A$  et son intensité est une  $S \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ . Conditionnellement à  $S = s$ , le signal reçu en  $B$  est une  $R \sim \mathcal{N}(s, 1)$ . Si on sait que le signal reçu est  $R = r$ , quel est le meilleur prédicteur du signal envoyé  $S$  ?

**Exercice 5.** Deux points sont choisis indépendamment et uniformément sur un semi-cercle de rayon 1 (y compris le diamètre). On note  $A$  l'aire du triangle formée par les deux points et le centre du diamètre.

1. Quelle est la probabilité qu'un et un seul des points se trouve sur le diamètre ? On note cet événement  $D$ .
2. Calculer  $\mathbb{E}[A|D]$ .
3. Quelle est la probabilité qu'aucun des points se trouvent sur le diamètre ? On note cet événement  $N$ .
4. Conditionnellement à  $N$ , donner la densité de l'angle entre les deux points sur le semi-cercle.
5. Calculer  $\mathbb{E}[A|N]$  et en déduire  $\mathbb{E}[A]$ .



Georges-Louis Leclerc de Buffon  
(1707–1788)



Joseph Leo Doob  
(1910–2004)

