

Feuille d'Exercices I

Probabilités

Exercice 1. Une main au poker est formée de 5 cartes extraites d'un jeu de 52 cartes. Traditionnellement, trèfle, carreau, coeur, pique sont appelées couleurs et les valeurs des cartes sont rangées dans l'ordre : as, roi, dame, valet, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, de la plus forte à la plus faible. Dénombrer les mains suivantes :

1. Quinte Flush : main formée de 5 cartes consécutives de la même couleur (Attention! la suite as, 2, 3, 4 et 5 est une quinte flush).
2. Carré : main contenant 4 cartes de la même valeur (4 as par exemple).
3. Full : main formée de 3 cartes de la même valeur et de deux autres cartes de même valeur (par exemple, 3 as et 2 rois).
4. Quinte : main formée de 5 cartes consécutives et qui ne sont pas toutes de la même couleur.
5. Brekan : main comprenant 3 cartes de même valeur et qui n'est ni un carré, ni un full (par exemple, 3 as, 1 valet, 1 dix).

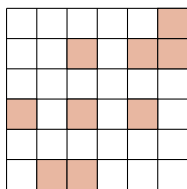
Exercice 2. 1. Par un argument de dénombrement, montrer que

$$\binom{n+m}{r} = \sum_{k=0}^r \binom{n}{k} \binom{m}{r-k}.$$

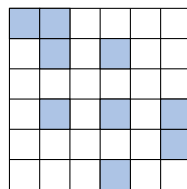
2. En déduire que

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2.$$

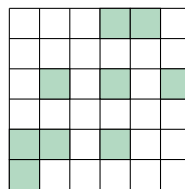
Exercice 3. Une grille de Fleissner est constituée par un carré de côté 6. On divise ce carré en une grille de 36 petits carrés égaux (tous de côté 1), et on ôte 9 de ces carrés. La propriété suivante doit être vérifiée : les trous que l'on obtient avec la grille en position initiale, avec la grille tournée d'un quart de tour, d'un demi-tour ou de trois quart de tour ne se superposent jamais. Ainsi, les 36 positions peuvent être occupées par un trou après éventuellement une rotation de la grille d'un quart, d'un demi ou de trois-quart de tour. Ceci est illustré dans la figure suivante.



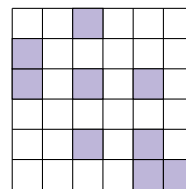
Normal Orientation



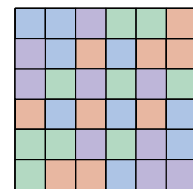
90° Rotation



180° Rotation



270° Rotation



1. Combien peut-on faire de telles grilles ?
2. Pour quelles valeurs de n peut-on faire une grille de Fleissner de côté n ?
3. Dans ce cas plus général, combien de telles grilles peut-on fabriquer ?

Exercice 4. 1. Combien l'équation $x_1 + x_2 = 3$ a-t-elle de solutions entières avec $x_1, x_2 \geq 0$? Même question avec $x_1, x_2 > 0$?

2. Montrer qu'il y a $\binom{n-1}{r-1}$ solutions à composantes entières et strictement positives à l'équation

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n, \quad x_i > 0.$$

3. Montrer que le nombre devient $\binom{n+r-1}{r-1}$ en changeant la condition à $x_i \geq 0$.

Exercice 5. Par des arguments combinatoires, montrer les égalités suivantes

1. En considérant un ensemble de n personnes et le nombre de comités possibles contenant un président, montrer que

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

2. En considérant un ensemble de n personnes et le nombre de comités possibles contenant un président et un vice-président (avec un cumul possible), montrer que

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k^2 = 2^{n-2} n(n+1).$$

3. De la même façon, montrer que

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k^3 = 2^{n-3} n^2(n+3).$$

4. Retrouver ces trois égalités en considérant la fonction $f(x) = (1+x)^n$ et en la dérivant.



Al-Karaji
(953–1029)



Bhāskara II
(1114–1185)

