Feuille d'Exercices VI
Calcul Stochastique

Exercice 1. Soit $(B_t)_{t\geqslant 0}$ un mouvement brownien standard, on considère

$$X_t = \int_0^t \mathrm{e}^s \mathrm{d}B_s.$$

1. Expliquer pourquoi $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est un processus gaussien et trouver sa fonction de covariance.
2. Trouver une fonction τ_t telle que le processus $(B_{\tau_t})_{t\geqslant 0}$ a la même distribution que $(X_t)_{t\geqslant 0}$. En particulier, on vérifiera que $\mathbb{E}[X_t^2] = \mathbb{E}[B_{\tau_t}^2]$.
3. Calculer $\mathbb{E}[X_t^4]$ et $\mathbb{P}(X_t \geqslant 1)$.

Exercice 2. Montrer que si X_t est une martingale continue et que φ est une fonction convexe alors $Y_t = \varphi(X_t)$ est une sous-martingale locale. Trouver un exemple pour lequel Y_t n'est pas une sous-martingale.

Exercice 3. Soit $(M_t)_{t\geqslant 0}$ une martingale locale continue.

1. Soit (N_t) une autre martingale locale continue, montrer que $(M_t + N_t)_{t\geqslant 0}$ est une martingale locale.
2. On suppose que pour tout $t > 0$, $\mathbb{E}\left[\sup_{0\leqslant s\leqslant t} |M_s|\right] < \infty$. Montrer que $(M_t)_{t\geqslant 0}$ est une martingale.
3. Est-ce vrai si on suppose seulement que $M_t \in L^1$ pour tout $t > 0$?

Exercice 4. Soit B un mouvement brownien stadnard, et pour $t < 1$,

$$Y_t = (1-t)\int_0^t \frac{\mathrm{d}B_s}{1-s}.$$

1. Montrer que $(Y_t)_{t\in[0,1)}$ est un processus gaussien et calculer sa fonction de covariance. Cela vous rappelle-t-il un processus vu dans une autre feuille d'exercices?
2. Montrer que la limite $\lim_{t\to 1^-} Y_t$ existe dans L^2 et calculer la.
3. Soit
$$W_s = \int_0^{\frac{s}{1+s}} \frac{\mathrm{d}B_u}{1-u}.$$
Montrer que (W_s) est un mouvement brownien.
4. (Pour ceux en Mathématique) Montrer que $\lim_{t\to 1^-} Y_t = 0$ presque sûrement.

Exercice 5. Nous savons que si $f \in \mathcal{H}^2([0,T])$ alors $\int_0^T f(\omega,s)\mathrm{d}B_s$ est dans $L^2(\mathrm{d}\mathbb{P})$ par l'isométrie d'Itô. On peut se poser la question de l'implication inverse. Si $f \in L^2_{\mathrm{Loc}}$ et si $\int_0^T f(\omega,s)\mathrm{d}B_s \in L^2(\mathrm{d}\mathbb{P})$, a-t-on $f \in \mathcal{H}^2$?

Dans la suite $f \in L^2_{\mathrm{Loc}}$ et $M_t = \int_0^t f(\omega,s)\mathrm{d}B_s$.

1. Soit $\tau_n = T \wedge \left(\inf\{t \in [0,T],\ \int_0^t f(\omega,s)^2\mathrm{d}s > n\}\right)$, montrer que
$$\mathbb{E}\left[\int_0^{\tau_n} f(\omega,s)^2\mathrm{d}s\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\sup_{0\leqslant s\leqslant T} M_t^2\right].$$
2. Montrer que $f \in \mathcal{H}^2([0,T])$ si et seulement si $\mathbb{E}\left[\sup_{0\leqslant t\leqslant T} M_t^2\right] < +\infty$.

Shinzō Watanabe
(1935–)

Hiroshi Kunita
(1937–)