# Feuille d'Exercices V
# Calcul Stochastique

**Exercice 1.** Après avoir justifier leur existence, calculer l'espérance et la variance des variables aléatoires suivantes,

**1.** $\displaystyle\int_0^t \sqrt{|B_s|}\mathrm{d}B_s$, **2.** $\int_0^t (B_s+s)^2\mathrm{d}B_s$,

**3.** $\displaystyle\int_0^1 \mathbb{1}_{B_t=0}\mathrm{d}B_t$, **4.** $\int_0^1 \mathbb{1}_{B_t\geqslant 0}\mathrm{d}B_s$.

**Exercice 2.** Soit $(B_t)$ un mouvement brownien standard.

**1.** Montrer que si $f, g \in \mathcal{H}^2([a,b])$ alors

$$\mathbb{E}\left[\int_a^b f(\omega,s)\mathrm{d}B_s \cdot \int_a^b g(\omega,s)\mathrm{d}B_s\right] = \int_a^b \mathbb{E}\left[f(\omega,s)g(\omega,s)\right]\mathrm{d}s.$$

**2.** Calculer $\mathbb{E}\left[\int_0^2 B_s\mathrm{d}B_s \int_1^3 B_s\mathrm{d}B_s\right]$.

**3.** Calculer $\mathbb{E}\left[B_s \int_0^t B_u\mathrm{d}B_u\right]$.

**Exercice 3.** Soit $(B_t)_{t\geqslant 0}$ un mouvement brownien standard par rapport à une filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$.

**1.** Calculer pour $s \leqslant t$, $\mathbb{E}\left[B_s^2\left(\int_s^t B_u\mathrm{d}B_u\right)^2\right]$

**2.** Prouver que si $f \in \mathcal{H}^2([s,t])$ alors la variable aléatoire $\int_s^t f(\omega,u)\mathrm{d}B_u$ est décorrélé de $B_v$ pour $v \leqslant s$ mais n'est pas forcément indépendante de $\mathcal{F}_s$.

**Exercice 4.** Soit $B^{(1)}$ et $B^{(2)}$ deux mouvements browniens indépendants par rapport a la même filtration $\{F_t\}$. On définit

$$X_t = \int_0^t \frac{1}{1+4s}\left(\int_0^s \mathrm{e}^{-(B_u^{(1)})^2}\mathrm{d}B_u^{(2)}\right)\mathrm{d}B_s^{(1)}.$$

**1.** Montrer que $\{X_t\}$ est une martingale.

**2.** Montrer que $X_\infty = \lim_{t\to\infty} X_t$ existe presque sûrement et dans $L^2$ et calculer $\mathbb{E}[X_\infty]$ et $\mathrm{Var}(X_\infty)$.

**Exercice 5.** Soit $(B_t)_{t\geqslant 0}$ un mouvement brownien standard et soit $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$ une partition de $[0,t]$. On a vu en cours que l'on pouvait écrire

$$\int_0^t B_s\mathrm{d}B_s = \lim_{|\pi|\to 0^+}\sum_{i=0}^{m-1} B_{t_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$$

où $|\pi| = \max_{0\leqslant i\leqslant n-1}|t_{i+1}-t_i|$ (Nous avions pris une partition spécifique mais cela peut facilement se généraliser).

**1.** Quelle est la valeur de

$$\lim_{|\pi|\to 0^+}\sum_{i=0}^{m-1} B_{t_{i+1}}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \quad ?$$

**2.** Même question si on considère $\lim_{|\pi|\to 0^+}\sum_{i=0}^{m-1} X_{t_{i+1}}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$ où $X$ est un processus à variation finie.

Vilibald Srećko Feller
(1906–1970)

Kiyosi Itô
(1915–2008)