Calcul Stochastique

MAT6703 • MAT6798

Hiver 2024

Lucas Benigni

0. Table des matières

1. Marche aléatoire simple

Nous commençons par l'un des processus stochastiques les plus simples. Soit $\{X_i\}_{i\geqslant 1}$ une famille de variables aléatoires inépendantes et identiquement distribuées telles que

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}.$$

La marche aléatoire simple (MAS) commençant en S_0 est définie par

$$S_n = S_0 + X_1 + \cdots + X_n = S_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

On peut penser ce processus comme un joueur misant \$1 à chaque lancer de pièce. Dans ce cas, $S_n - S_0$ correspond au gain aprés n lancers. On peut alors s'intéresser à la probabilité que le joueur gagne A dollars avant de perdre B dollars. En d'autres termes, si on définit

$$\tau_{A,B} = \min\{n \geqslant 0, S_n = A \text{ ou } S_n = -B\}$$

alors on voudrait calculer

$$\mathbb{P}\left(S_{\tau_{A,B}} = A \middle| S_0 = 0\right).$$

1.1 Analyse du premier pas

Une manière d'analyser ce processus est de considérer un pas de la marche en partant d'un S_0 quelconque. Par l'indépendance des pas, on peut relier ces quantités à la probabilité voulue. Plus précisément, considérons pour $-B \leqslant k \leqslant A$,

$$f(k) = \mathbb{P}\left(S_{\tau_{A,B}} = A \middle| S_0 = k\right).$$

Nous voyons que nous voulons calculer $f(0)$ et de plus on voit facilement que $f(A) = 1$ et $f(-B) = 0$. En analysant un pas de la marche on obtient l'équation pour $-B < k < A$,

$$f(k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(S_{\tau_{A,B}} = A | S_0 = k-1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(S_{\tau_{A,B}} = A | S_0 = k+1) = \frac{1}{2}f(k-1) + \frac{1}{2}f(k+1).$$

On peut réécrire cette équation, avec $\Delta f(k) = f(k) - f(k-1)$,

$$\Delta f(k) = \Delta f(k+1).$$

Nous avons donc constance des accroissements de f ainsi $f(k) = \alpha k + \beta$ et on peut trouver α et β par les conditions au bord

$$\begin{cases} f(A) &= \alpha A + \beta = 1 \\ f(-B) &= -\alpha B + \beta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha &= \frac{1}{A+B} \\ \beta &= \frac{B}{A+B}. \end{cases}$$

On obtient donc finalement le résultat

$$f(0) = \mathbb{P}(S_{\tau_{A,B}} = A | S_0 = 0) = \frac{B}{A+B}.$$

⚠ La variable aléatoire $S_{\tau_{A,B}}$ n'est bien définie que sur l'événement $\{\tau_{A,B} < \infty\}$!

Proposition 1.1. Soients $A, B > 0$,

$$\mathbb{P}(\tau_{A,B} < \infty) = 1.$$

Démonstration. On remarque tout d'abord que si l'on gagne (dans le sens où $X_i = 1$) $A + B$ fois de suite, on est garanti de sortir de l'intervalle $[-B, A]$ et ainsi $\tau_{A,B} < \infty$. Pour utiliser cela, on définit

$$E_\ell = \{X_i = 1 \text{ pour tout } i \in [\ell(A+B), (\ell+1)(A+B) - 1].\}$$

Par définition de la marche aléatoire simple, on sait que $\mathbb{P}(\mathrm{E}_\ell) = \frac{1}{2^{\mathrm{A+B}}}$ et de plus $\{\mathrm{E}_\ell\}_{\ell \geqslant 0}$ est une collection d'événements indépendants. Si E_ℓ se réalise alors on atteint A et ainsi $\tau_{\mathrm{A,B}} < (\ell+1)(\mathrm{A}+\mathrm{B})$. On peut réécrire cela

$$\{\tau_{\mathrm{A,B}} > n(\mathrm{A}+\mathrm{B})\} \subset \bigcap_{\ell=0}^{n-1} \mathrm{E}_\ell^c.$$

Ainsi pour tout $n \geqslant 1$,

$$\mathbb{P}(\tau_{\mathrm{A,B}} = \infty) \leqslant \mathbb{P}(\tau_{\mathrm{A,B}} > n(\mathrm{A}+\mathrm{B})) \leqslant \mathbb{P}\left(\bigcap_{\ell=0}^{n-1} \mathrm{E}_\ell^c\right) = \prod_{\ell=0}^{n-1} \mathbb{P}(\mathrm{E}_\ell) = \left(1 - \frac{1}{2^{\mathrm{A+B}}}\right)^n.$$

En faisant tendre $n \to \infty$, on voit que $\mathbb{P}(\tau_{\mathrm{A,B}} = \infty) = 0$ □

On remarque que l'on a en fait prouvé beaucoup plus que $\tau_{\mathrm{A,B}} < \infty$ presque sûrement. On peut réécrire l'inégalité plus haut comme

$$\mathbb{P}(\tau_{\mathrm{A,B}} \geqslant k) \leqslant c_1 \mathrm{e}^{-c_2 k}$$

pour certaines constantes $c_1, c_2 > 0$. En particulier, on en déduit que $\tau_{\mathrm{A,B}} \in \mathrm{L}^1$ puisque

$$\mathbb{E}[\tau_{\mathrm{A,B}}] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\tau_{\mathrm{A,B}} \geqslant k) < +\infty$$

et en fait on a même $\mathrm{E}[\tau^\ell] < \infty$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}$. On peut aussi utiliser l'analyse du premier pas pour calculer $\mathbb{E}[\tau_{\mathrm{A,B}}]$. Pour ce faire, on définit

$$g(k) = \mathbb{E}[\tau_{\mathrm{A,B}} | \mathrm{S}_0 = k].$$

Alors pour $-\mathrm{B} < k < \mathrm{A}$, aprés un pas de la marche

$$g(k) = \frac{1}{2} g(k-1) + \frac{1}{2} g(k+1) + 1$$

avec les conditions au bord $g(\mathrm{A}) = g(-\mathrm{B}) = 0$. Avec la définition $\Delta g(k) = g(k) - g(k-1)$ alors on a

$$\Delta^2 g(k) = \Delta[\Delta g](k) = g(k) - g(k-1) - g(k-1) + g(k-2) = g(k) - 2g(k-1) + g(k-2).$$

Nous obtenons donc le système

$$\begin{cases} -\Delta^2 g(k+1) & = 2, \\ g(\mathrm{A}), g(-\mathrm{B}) & = 0. \end{cases}$$

On doit penser la première équation comme l'équivalent de l'équation différentielle $f''(x) = -2$ qui a pour solution $f(x) = -x^2 + bx + c$. On trouver les coefficients avec les conditions au bord qui nous donne les deux racines du polynôme de degré 2 et ainsi

$$g(k) = -(k - \mathrm{A})(k + \mathrm{B})$$

et finalement

$$g(0) = \mathbb{E}[\tau_{\mathrm{A,B}} | \mathrm{S}_0 = 0] = \mathrm{AB}.$$

La valeur de cette espérance nous fait réaliser un problème pour un joueur. En effet, on peut se demander combien de temps devons-nous attendre pour avoir un profit d'un seul dollar. Définissons

$$\tau_1 = \min\{n \geqslant 0, \mathrm{S}_n = 1\},$$

alors on voit clairement que $\tau_1 \geqslant \tau_{1,\mathrm{B}}$ mais comme $\mathbb{E}[\tau_{1,\mathrm{B}}] = \mathrm{B}$ nous obtenons que pour tout $\mathrm{B} > 0$, $\mathbb{E}[\tau_1] \geqslant \mathrm{B}$ et donc avec $\mathrm{B} \to \infty$, nous avons que

$$\mathbb{E}[\tau_1] = \infty.$$

1.2 Marche aléatoire biaisée

On peut définir une variante de notre processus, pour $p \neq \frac{1}{2}$, on choisit $\{X_i\}_{i\geqslant 1}$ une collection de variables aléatoires indépendantes distribuées selon

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = p, \quad \mathbb{P}(X_i = -1) = q = 1 - p.$$

On définit toujours

$$S_n = S_0 + \sum_{k=1}^{n} X_i.$$

Pour $A, B > 0$, on garde la même définition de $\tau_{A,B}$ et calculons

$$\mathbb{P}(S_{\tau_{A,B}} = A | S_0 = 0).$$

On remarque que la preuve de la Proposition 1.1 est toujours valide et $\tau_{A,B} < \infty$ presque sûrement. On fait l'analyse du premier pas avec

$$f(k) = \mathbb{P}(S_{\tau_{A,B}} = A | S_0 = k)$$

qui nous donne l'équation

$$f(k) = pf(k+1) + qf(k-1) \iff p\Delta f(k+1) = q\Delta f(k).$$

Ainsi on remarque que les accroissements ne sont plus constants mais on a maintenant

$$\Delta f(k+1) = \frac{q}{p}\Delta f(k) = \left(\frac{q}{p}\right)^{k+B} \Delta f(-B+1)$$

et donc en utilisant le fait que $f(-B) = 0$,

$$f(k) = \sum_{j=-B+1}^{k} \Delta f(k) = \Delta f(-B+1) \sum_{j=-B+1}^{k} \left(\frac{q}{p}\right)^{j+B} = \Delta f(-B+1)\frac{\frac{q}{p} - \left(\frac{q}{p}\right)^{k+B+1}}{1-\frac{q}{p}}.$$

Si on utilise maintenant $f(A) = 1$, on obtient

$$\Delta f(-B+1) = \frac{1-\frac{q}{p}}{\frac{q}{p} - \left(\frac{q}{p}\right)^{A+B+1}}.$$

En combinant les deux termes, on obtient

$$f(0) = \mathbb{P}(S_{\tau_{A,B}} = A | S_0 = 0) = \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{B}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{A+B}}.$$

On voit que les calculs, même si ils sont possibles dans ces cas, deviennent plus compliqués. On va maintenant introduire la théorie des martingales pour rendre ces calculs systématiques.

1.3 Exercices

EXERCICE 1. On considère la marche aléatoire simple S_n.

1. Montrer la formule
$$\mathbb{P}(S_{2k} = 0 \,|\, S_0 = 0) = \frac{1}{2^{2k}}\binom{2k}{k}$$

2. En utilisant la formule de Stirling sur la formule dessus, montrer que $\mathbb{E}[N_n] \to \infty$ où N_n est le nombre de visites en zéro par S_k pour $k \leqslant n$.

3. Le but de la question est de montrer que la marche aléatoire symétrique est *récurrente* i.e.

$$\mathbb{P}(S_n = 0 \text{ pour un nombre infini de } n) = 1$$

   a. On considére $N = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{1}_{S_n=0}$. Montrer que $\mathbb{E}[N] = \infty$.
   b. Montrer que $\mathbb{E}[N] = \frac{r}{1-r}$ avec

$$r = \mathbb{P}(S_n = 0 \text{ pour un } n \geqslant 1 \,|\, S_0 = 0).$$

   c. En déduire que la marche aléatoire est récurrente.

Exercice 2. On considère la marche aléatoire symétrique commençant en 0. On définit

$$N_k = \text{nombre de fois où on a atteint } k \text{ avant de retourner en } 0.$$

1. Montrer que $\mathbb{P}(N_k > 0) = \frac{1}{2k}$.
2. Montrer que $\mathbb{P}(N_k > j+1 \,|\, N_k > j) = \frac{1}{2} + \frac{k-1}{2k}$.
3. En déduire que $\mathbb{E}[N_k] = 1$.

2. Martingales en temps discret

On commence par rappeler quelques notions de théorie de la mesure, en particulier la définition d'une tribu et d'une filtration qui sont deux noitions clés dans l'étude des martingales.

Définition 2.1

Soit un ensemble Ω, une tribu $\mathcal{F}$ sur Ω est une collection de parties de Ω telle que

1. $\varnothing \in \mathcal{F}$
2. Pour tout $A \in \mathcal{F}$, $A^c \in \mathcal{F}$
3. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{F}$ alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$.

On définit une filtration comme une sous-suite croissante de tribus

Définition 2.2

Soit Ω un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{F}$. La famille $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-tribus $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}$ est une filtration si pour tout $n \leqslant m$, $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_m$.

On rappelle que par exemple si $\{X_i\}_{i\geqslant 1}$ est une famille de variables aléatoires définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on peut définir $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ la tribu engendrée par $X_1, \ldots, X_n$ et $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 1}$ est une filtration.

Une martingale est alors la donnée d'un espace de probabilité filtré et d'un processus *adapté* à cette filtration.

Définition 2.3

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré et $M = \{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une collection de variables aléatoires sur Ω. M est une *martingale* par rapport à $\{\mathcal{F}_n\}$ ou $\{\mathcal{F}_n\}$-martingale si

1. Pour tout $n \geqslant 1$, $M_n \in \mathcal{F}_n$
2. Pour tout $n \geqslant 1$, $M_n \in L^1$ i.e. $\mathbb{E}[|M_n|] < \infty$
3. Pour tout $n \geqslant 1$, $\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] = M_n$.

L'intuition derrière cette définition est de voir $\mathcal{F}_n$ comme l'information que l'on a à l'instant n. Si on considère M_n comme la fortune d'un joueur à l'instant n alors sa fortune après avoir fait une nouvelle mise sachant toutes les mises précédentes est *en moyenne* égale à sa fortune en temps n. On peut commencer par donner quelques exemples

Exemple 1. Soit $\{X_i\}_{i\geqslant 1}$ une collection de variables aléatoires indépendantes telle que $\mathbb{E}[X_n] = 0$ pour tout $n \geqslant 1$ alors le processus défini par $S_0 = 0$ et $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ est une martingale par rapport à $\{\sigma(X_1, \dots, X_n)\}$.

Exemple 2. Soit $\{X_i\}_{i\geqslant 1}$ une collection de variables aléatoires indépendantes centrées et $\mathrm{Var}(X_n) = \sigma^2$ pour tout $n \geqslant 1$ alors le processus défini par $M_0 = 0$ et $M_n = S_n^2 - n\sigma^2$ pour $n \geqslant 1$ est une martingale par rapport à $\{\sigma(X_1, \dots, X_n)\}$. En effet, les deux premières propriétés sont claires par définition de M_n et de X_n. Pour la troisième, on voit que pour $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[(S_n + X_{n+1})^2 - (n+1)\sigma^2|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[S_n^2 - n\sigma^2|\mathcal{F}_n] + 2\mathbb{E}[S_n X_{n+1}|\mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[X_{n+1}^2 - \sigma^2|\mathcal{F}_n] \\ &= M_n + 2S_n\mathbb{E}[X_{n+1}] + \mathbb{E}[X_{n+1}^2] - \sigma^2 = M_n.\end{aligned}$$

Nous allons maintenant voir une manière de construire de nouvelles martingales à partir d'une martingale donnée. On commence par une définition.

Définition 2.4

Une suite de variables aléatoires $\{A_i\}_{i\geqslant 1}$ est dite *prévisible* par rapport à une filtration $\{\mathcal{F}_n\}$ si pour tout $n \geqslant 1$

$$A_n \in \mathcal{F}_{n-1}.$$

Pour des variables aléatoires prévisibles, on voit que A_n ne dépend que de l'information sur $\mathcal{F}_{n-1}$ c'est-à-dire de l'information *avant* de placer une mise au temps n. Par exemple, on peut voir A_n comme un multiplicateur, on peut choisir de doubler notre mise au temps n et de ce fait $A_n(M_n - M_{n-1})$ corespond au changement de la fortune du joueur par la n-ième mise. Cette interprétation motive la définition suivante.

Définition 2.5

Le processus $\{\widetilde{M}_n\}_{n\geqslant 1}$ défini par $\widetilde{M}_0 = M_0$ et

$$\widetilde{M}_n = M_0 + \sum_{k=1}^n A_k(M_k - M_{k-1})$$

pour $n \geqslant 1$ est appelé la transformée de martingale de M par $\{A_n\}$.

Cette transformée est une méthode générale pour créer de nouvelles martingales. Nous l'utiliserons notamment dans la prochaine sous-section pour prouver le théorème d'arrêt de Doob.

Théorème 2.6

Soit M une martingale par rapport à une filtration $\{\mathcal{F}_n\}$, si $\{A_n\}_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires *bornées* et prévisibles par rapport à $\{\mathcal{F}_n\}$ alors $\widetilde{M}$ est une martingale par rapport à $\{\mathcal{F}_n\}$.

Démonstration. On a bien sur $\widetilde{M}_n \in \mathcal{F}_n$ par définition et $\widetilde{M}_n \in L^1$ puisque les variables aléatoires A_n sont bornées. Pour la propriété de martingale, on calcule

$$\mathbb{E}[\widetilde{M}_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \widetilde{M}_n + \mathbb{E}[A_{n+1}(M_{n+1} - M_n)|\mathcal{F}_n] = \widetilde{M}_n + A_{n+1}\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] - A_{n+1}M_n = \widetilde{M}_n.$$

□

2.1 Temps d'arrêt et théorème d'arrêt

Une notion que nous allons utiliser de nombreuses fois est celle de *temps d'arrêt*. Une manière intuitive de voir un temps d'arrêt est une règle qui que l'on peut utiliser pour arrêter notre jeu de mise, cela peut être par exemple lorsque notre fortune est devenue assez grande. Une telle notion ne peut bien sur dépendre du résultat d'une mise qui n'a pas encore eu lieu. Ceci donne la définition suivante.

DÉFINITION 2.7

Une variable aléatoire τ prenant des valeurs dans $\mathbb{N} \cup \infty$ est un *temps d'arrêt* par rapport à une filtration $\{\mathcal{F}_n\}$ si pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\{\tau \leqslant n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Il est souvent interéssant d'étudier un processus X_n précisément au temps d'arrêt τ. Si $\tau < \infty$ presque sûrement alors on peut définir

$$X_\tau = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\tau=k} X_k.$$

Une manière de contourner le problème venant de l'événement $\{\tau = \infty\}$ consiste à tronquer la variable aléatoire τ et de considérer plutôt $n \wedge \tau = \min(n, \tau)$. Le prochain théorème va être utiliser de nombreuses fois le long de ces notes et la preuve est basée sur l'utilisation de la transformée de martingale.

THÉORÈME 2.8

Soit M une martingale par rapport à une filtration $\{\mathcal{F}_n\}$ alors le processus arrêté $M^\tau := \{M_{n\wedge\tau}\}$ est aussi une martingale par rapport à $\{\mathcal{F}_n\}$.

Démonstration. Pour simplifier le problème, on suppose que $M_0 = 0$. Si on définit,

$$A_k = \mathbb{1}_{\tau \geqslant k} = 1 - \mathbb{1}_{\tau \leqslant k-1} \in \mathcal{F}_{k-1}$$

on obtient un processus prévisible par rapport à $\{\mathcal{F}_n\}$. De plus, nous avons

$$\widetilde{M}_n = \sum_{k=1}^{n} A_k (M_k - M_{k-1}) = M_\tau \mathbb{1}_{\tau \leqslant n-1} + M_n \mathbb{1}_{\tau \geqslant n} = M_{n\wedge\tau}.$$

Par Théorème 2.6, on obtient donc que M^τ est une martingale par rapport à $\{\mathcal{F}_n\}$. □

Nous pouvons utiliser ce résultat pour obtenir nos résultats sur la marche aléatoire symétrique et biaisée d'une autre façon. Si on se rappelle de la définition de $\tau_{A,B}$,

$$\tau_{A,B} = \min\{n \in \mathbb{N}, S_n = A \text{ ou } S_n = -B\},$$

on voit clairement que $\tau_{A,B}$ est un temps d'arrêt. Ainsi par le théorème d'arrêt ci-dessus, nous obtenons que $S^{\tau_{A,B}}$ est une martingale et ainsi

$$\mathbb{E}\left[S_n^{\tau_{A,B}}\right] = \mathbb{E}\left[S_0^{\tau_{A,B}}\right] = 0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Par la Proposition 1.1, nous savons que $\tau_{A,B}$ est fini presque sûrement et ainsi

$$S_n^{\tau_{A,B}} = S_{n\wedge\tau_{A,B}} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} S_{\tau_{A,B}}.$$

Par le théorème de convergence dominée, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|S_n^{\tau_{A,B}}| \leqslant \max(A, B)$, nous obtenons que

$$0 = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[S_n^{\tau_{A,B}}\right] = \mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty} S_n^{\tau_{A,B}}\right] = \mathbb{E}\left[S_{\tau_{A,B}}\right].$$

Nous pouvons maitnenant calculer d'une autre façon cette espérance puisque

$$\mathbb{E}\left[S_{\tau_{A,B}}\right] = A\mathbb{P}(S_{\tau_{A,B}} = A) - B\mathbb{P}\left(S_{\tau_{A,B}} = -B\right) = -B + (A+B)\mathbb{P}\left(S_{\tau_{A,B}} = A\right)$$

qui nous donne en combinant ces deux équations

$$\mathbb{P}\left(S_{\tau_{A,B}} = A\right) = \frac{B}{A+B}.$$

En utilisant notre deuxième exemple de martingale $M_n = S_n - n^2$ avec S la marche aléatoire symétrique, nous pouvons calculer $\mathbb{E}[\tau_{A,B}]$. En effet, par le théorème d'arrêt, nous savons que $M^{\tau_{A,B}}$ est une martingale et ainsi

$$\mathbb{E}\left[M_n^{\tau_{A,B}}\right] = \mathbb{E}\left[M_0^{\tau_{A,B}}\right] = 0.$$

De plus, par définition de $\tau_{A,B}$, nous avons que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|M_n^{\tau_{A,B}}\right| \leqslant \max(A^2, B^2) + \tau$$

et comme nous avons prouvé plus haut que $\tau_{A,B} \in L^1$, nous pouvons encore utiliser le théorème de convergence dominée et obtenir

$$0 = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[M_n^{\tau_{A,B}}\right] = \mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty} M_n^{\tau_{A,B}}\right] = \mathbb{E}\left[M_{\tau_{A,B}}\right].$$

Et de même, on peut calculer

$$\mathbb{E}\left[M_{\tau_{A,B}}\right] = \mathbb{E}\left[S^2_{\tau_{A,B}}\right] - \mathbb{E}[\tau_{A,B}] = A^2\frac{B}{A+B} + B^2\frac{A}{A+B} - \mathbb{E}[\tau_{A,B}] = AB - \mathbb{E}[\tau_{A,B}].$$

On retrouve finalement le résultat

$$\mathbb{E}[\tau_{A,B}] = AB.$$

2.2 Inégalités de Doob

On commence par généraliser la notion de martingales en acceptant une inégalité plutôt qu'une égalité pour la propriété de martingale .

DÉFINITION 2.9

Soit $M = \{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires intégrables et $\{\mathcal{F}_n\}$ une filtration telles que $M_n \in \mathcal{F}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, On dit que M est une sous-martingale (respectivement sur-martingale) par rapport à $\{\mathcal{F}_n\}$ si

$$M_n \leqslant \mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] \quad (\text{respectivement } M_n \geqslant \mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n]) \quad \text{pour tout } n \geqslant 1.$$

La notion de sous-martingale est intéressante car de nombreuses opérations naturelles sur les variables aléatoires telles que la valeur absolue, ou le passage à la puissance p, créent des sous-martingales à partir de martingales. En effet, on a le thèorème suivant

THÉORÈME 2.10

Si M est une martingale par rapport à $\{\mathcal{F}_n\}$ et ϕ est une fonction convexe telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\phi(M_n) \in L^1$ alors $\phi(M)$ est une sous-martingale par rapport à $\{\mathcal{F}_n\}$.

Démonstration. La mesurabilité et l'intégrabilité sont évidentes par hypothèse du théorème. Pour la propriété de sous-martingale, on utilise l'inégalité de Jensen conditionnelle qui nous donne

$$\phi(M_n) = \phi\left(\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n]\right) \leqslant \mathbb{E}\left[\phi(M_{n+1})|\mathcal{F}_n\right].$$

□

Les inégalités de Doob sont utiles pour borner le maximum des n premiers termes d'une martingale par le n-ième terme.

Définition 2.11

Soit $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires, on définit son *processus maximal* M^* par

$$M_n^* = \sup_{0\leqslant k\leqslant n} M_k.$$

On donne ici la première inégalité maximal de Doob.

Théorème 2.12

Soit M une sous-martingale positive et $\lambda > 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lambda\mathbb{P}\left(M_n^* \geqslant \lambda\right) \leqslant \mathbb{E}\left[M_n \mathbb{1}_{M_n^*\geqslant\lambda}\right] \leqslant \mathbb{E}[M_n].$$

Démonstration. Pour commencer la preuve, on va d'abord prouver que pour tout $A \in \mathcal{F}_m$ et pour tout $n \geqslant m$,

$$\mathbb{E}[M_m \mathbb{1}_A] \leqslant \mathbb{E}[M_n \mathbb{1}_A].$$

En effet, par la définition d'une sous-martingale, nous avons

$$M_m \leqslant \mathbb{E}\left[M_{m+1}|\mathcal{F}_m\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[M_{m+2}|\mathcal{F}_{m+1}\right]|\mathcal{F}_m\right] = \mathbb{E}\left[M_{m+2}|\mathcal{F}_m\right].$$

Il nous suffit maintenant de multiplier les deux côtés par $\mathbb{1}_A \in \mathcal{F}_m$ et de prendre l'espérance pour obtenir l'inégalité voulue. On définit maintenant le temps d'arrêt suivant

$$\tau = \min\{n \in \mathbb{N},\, M_n \geqslant \lambda\},$$

on peut réécrire

$$\mathbb{P}(M_n^* \geqslant \lambda) = \mathbb{P}(\tau \leqslant n).$$

De plus, par définition de τ, nous avons aussi

$$\lambda\mathbb{P}(\tau \leqslant n) = \mathbb{E}\left[\lambda \mathbb{1}_{\tau\leqslant n}\right] \leqslant \mathbb{E}\left[M_\tau \mathbb{1}_{\tau\leqslant n}\right] = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}\left[M_k \mathbb{1}_{\tau=k}\right].$$

Comme τ est un temps d'arrêt, $\{\tau = k\} \in \mathcal{F}_k$ et par l'inégalité que nous avons prouvé au début de la preuve, nous avons que pour tout $k \leqslant n$,

$$\mathbb{E}[M_k \mathbb{1}_{\tau=k}] \leqslant \mathbb{E}\left[M_n \mathbb{1}_{\tau=k}\right].$$

Finalement, nous obtenons

$$\lambda\mathbb{P}\left(M_n^* \geqslant \lambda\right) = \lambda\mathbb{P}(\tau \leqslant n) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}[M_k \mathbb{1}_{\tau=k}] \leqslant \mathbb{E}\left[M_n \sum_{k=0}^{n} \mathbb{1}_{\tau=k}\right] = \mathbb{E}[M_n \mathbb{1}_{M_n^*\geqslant\lambda}] \leqslant \mathbb{E}[M_n].$$

□

La deuxième inégalité est la plus souvent utilisée mais la première est très utile pour prouver l'inégalité L^p de Doob. On commence par donner une généralisation de l'inégalité que l'on vient de prouver

Corollaire 2.13. Soit M une sous-martingale positive et $p \geqslant 1$ alors pour tout $\lambda > 0$ on a

$$\lambda^p \mathbb{P}(M_n^* \geqslant \lambda) \leqslant \mathbb{E}\left[M_n^p\right].$$

Démonstration. On remarque que la fonction $\phi : x \mapsto x^p$ pour $p \geqslant 1$ est une fonction convexe croissante sur $\mathbb{R}_+$ et ainsi $\phi(M) = M^p$ est encore une sous-martingale. Si on applique le thèorème précédent à M^p avec λ^p,

on obtient
$$\lambda^p \mathbb{P}\left((\mathrm{M}^p)_n^* \geqslant \lambda^p\right) = \lambda^p \mathbb{P}\left((\mathrm{M}_n^*)^p \geqslant \lambda^p\right) = \lambda^p \mathbb{P}\left(\mathrm{M}_n^* \geqslant \lambda\right) \leqslant \mathbb{E}\left[\mathrm{M}_n^p\right].$$

□

On donne maintenant une autre inégalité maximale, dite inégalité L^p de Doob. On rappelle que pour une variable aléatoire dans L^p, on définit sa norme L^p par

$$\|\mathrm{X}\|_p = (\mathbb{E}[|\mathrm{X}|^p])^{\frac{1}{p}}.$$

Théorème 2.14

Soit M une sous-martingale positive. Pour tout $p > 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|\mathrm{M}_n^*\|_p \leqslant \frac{p}{p-1}\|\mathrm{M}_n\|_p$$

Démonstration. On commence par voir qu'il n'est pas clair que si $\mathrm{M}_n \in \mathrm{L}^p$ alors $\mathrm{M}_n^* \in \mathrm{L}^p$. Pour contourner ce problème, nous considérons pour un certain $m > 0$,

$$\widehat{\mathrm{M}}_n^* = \mathrm{M}_n^* \wedge m$$

qui est une suite de variables aléatoires bornées. On commence par écrire

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left(\widehat{\mathrm{M}}_n^*\right)^p\right] = \mathbb{E}\left[p\int_0^{\widehat{\mathrm{M}}_n^*} x^{p-1}\mathrm{d}x\right] = \mathbb{E}\left[p\int_0^{\infty} x^{p-1}\mathbb{1}_{\widehat{\mathrm{M}}_n^* \geqslant x}\mathrm{d}x\right] &= p\int_0^{\infty} x^{p-1}\mathbb{P}(\widehat{\mathrm{M}}_n^* \geqslant x)\mathrm{d}x\\ &= p\int_0^{m} x^{p-1}\mathbb{P}(\mathrm{M}_n^* \geqslant x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On utilise maintenant l'inégalité maximale du Théorème 2.12 pour voir que

$$\begin{aligned}\|\widehat{\mathrm{M}}_n^*\|_p^p \leqslant p\int_0^m x^{p-2}\mathbb{E}\left[\mathrm{M}_n\mathbb{1}_{\mathrm{M}_n^* \geqslant x}\right]\mathrm{d}x = p\mathbb{E}\left[\mathrm{M}_n\int_0^m x^{p-2}\mathbb{1}_{\mathrm{M}_n^* \geqslant x}\mathrm{d}x\right] &= p\mathbb{E}\left[\mathrm{M}_n\int_0^{\widehat{\mathrm{M}}_n^*} x^{p-2}\mathrm{d}x\right]\\ &= \frac{p}{p-1}\mathbb{E}\left[\mathrm{M}_n\left(\widehat{\mathrm{M}}_n^*\right)^{p-1}\right].\end{aligned}$$

On utilise maintenant l'inégalité de Hölder pour obtenir

$$\|\widehat{\mathrm{M}}_n^*\|_p^p \leqslant \frac{p}{p-1}\|\mathrm{M}_n\|_p\|\widehat{\mathrm{M}}_n^*\|_p^{p-1}$$

qui donne finalement

$$\|\widehat{\mathrm{M}}_n^*\|_p \leqslant \frac{p}{p-1}\|\mathrm{M}_n\|_p.$$

Pour passer l'inégalité à M_n^* sans la troncation, on fait tendre $m \to \infty$ et utiliser le lemme de Fatou. □

2.3 Convergence des martingales

Les martingales ont tendance à converger. En effet, nous allons voir dans cette sous-section qu'une martingale bornée dans L^1 converge presque sûrement vers une limite qui existe dans L^1. De plus, si M_n est bornée dans L^p pour $p > 1$, une martingale converge presque sûrement mais aussi dans L^p. On verra dans la Section 4 la notion d'intégrabilité uniforme qui donnera une condition suffisante pour aussi avoir convergence dans L^1. Pour l'instant nous verrons ce théorème suivant de convergence presque sûre pour les martingales bornées dans L^1.

Théorème 2.15

Soit M une martingale, on suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\mathbb{E}[|M_n|] \leqslant C \quad \text{pour tout } n \geqslant 0$$

alors il existe une variable aléatoire M_∞ telle que $\mathbb{E}[|M_\infty|] \leqslant C$ et telle que

$$M_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} M_\infty.$$

Pour prouver ce théorème, nous allons introduire la notion de *montées* d'une martingale mais nous allons commencer par la proposition suivante qui nous fait savoir qu'un joueur ne devrait pas passer un tour pour un jeu qui lui est favorable.

Proposition 2.16. Soient M une sous-martingale positive et $A = \{A_n\}_{n\geqslant 1}$ un processus prévisible tel que pour tout $n \geqslant 1$, $A_n \in \{0,1\}$. Alors si $\widetilde{M}$ est la transformée de M par A, nous avons

$$\mathbb{E}[\widetilde{M}_n] \leqslant \mathbb{E}[M_n].$$

Démonstration. Par la définition d'une sous-martingale et du processus A, nous avons

$$\mathbb{E}[A_k(M_k - M_{k-1})|\mathcal{F}_{k-1}] = A_k\mathbb{E}[M_k - M_{k-1}|\mathcal{F}_{k-1}] \leqslant \mathbb{E}[M_k - M_{k-1}|\mathcal{F}_{k-1}].$$

En prenant l'espérance des deux côtés et en sommant l'inégalité pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on obtient

$$\mathbb{E}[\widetilde{M}_n] - \mathbb{E}[M_0] \leqslant \mathbb{E}[M_n] - \mathbb{E}[M_0].$$

□

Nous définissons maintenant la notion de *montées* qui nous permettra de définir le processus correct A pour notre preuve de la convergence des martingales bornées dans L^1.

Définition 2.17

Si $\{x_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une suite de nombres réels, on définit le *nombre de montées* de l'intervalle $[a,b]$ par $\{x_i\}$ comme le plus grand entier k tel qu'il existe $2k$ entiers $0 \leqslant i_1 < j_1 < i_2 < j_2 < \cdots < i_k < j_k \leqslant n$ tels que les éléments de $\{x_{i_\ell}, 1 \leqslant \ell \leqslant k\}$ sont plus petit ou égal à a et les éléments de $\{x_{j_\ell}, 1 \leqslant \ell \leqslant k\}$ sont plus grands ou égal à b.

Le théorème suivant permet de borner le nombre de montées moyen d'une sous-martingale M.

Théorème 2.18

Soient M une sous-martingale et $a < b$, si on dénote $N_n(a,b)$ le nombre de montées de $\{M_k, 0 \leqslant k \leqslant n\}$ de $[a,b]$ alors

$$\mathbb{E}[N_n(a,b)] \leqslant \frac{\mathbb{E}\left[(M_n - a)_+\right]}{b-a}.$$

Démonstration. On remarque tout d'abord que $x \mapsto (x-a)_+$ est une fonction convexe croissante et ainsi $(M_n - a)_+$ est une sous-martingale positive. De plus, on voit que le nombre de montées de $[a,b]$ par $\{M_k, 0 \leqslant k \leqslant n\}$ est égal au nombre de montées de $[0, b-a]$ par $\{(M_k - a)_+, 0 \leqslant k \leqslant n\}$.

On considère maintenant le jeu de mise suivant sur la suite $(M-a)_+$: on mise pour la première fois lorsque la suite atteint 0 et on ne mise une nouvelle fois que lorsque $(M-a)_+$ est plus grand que $b-a$. Cela crée un processus prévisible A qui ne prend des valeurs que dans $\{0,1\}$ et ainsi on sait par la Proposition 2.16, on obtient

$$\mathbb{E}\left[\widetilde{(M_n - a)_+}\right] \leqslant \mathbb{E}[(M_n - a)_+].$$

Maitenant, par définition de notre jeu de mise, on voit qu'on est garanti au temps n d'au moins gagner $(b-a)\mathrm{N}_n(a,b)$, c'est -à-dire que l'on a

$$\widetilde{(\mathrm{M}_n - a)}_+ \geqslant (b-a)\mathrm{N}_n(a,b).$$

On obtient donc le résultat final en prenant l'espérance et en combinant les deux inégalités précédentes. □

On est maintenant prêt à prouver notre théorème de convergence pour les martingales bornées dans L^1.

Démonstration du Théorème 2.15. Soient $a, b \in \mathbb{Q}$ deux nombres rationnels tels que $a < b$, nous allons prouver que

$$\mathbb{P}(\mathrm{E}_{ab}) = 0 \quad \text{avec} \quad \mathrm{E}_{ab} = \left\{ \liminf_{n\to\infty} \mathrm{M}_n \leqslant a < b \leqslant \limsup_{n\to\infty} \mathrm{M}_n \right\}$$

puisque cela prouve la convergence de M_n vers une variable aléatoire possiblement infinie, on prouvera ensuite que la limite est dans L^1. Tout d'abord puisque $\mathrm{N}_n(a,b)$ est une suite croissante, par le théorème de convergence monotone, elle converge presque sûrement vers une variable aléatoire possiblement infinie $\mathrm{N}_\infty(a,b)$. On remarque alors par définition du nombre de montées que

$$\mathrm{E}_{ab} \subset \{\mathrm{N}_\infty(a,b) = \infty\}.$$

Par le Théorème 2.18, nous savons que

$$\mathbb{E}[\mathrm{N}_n(a,b)] \leqslant \frac{\mathbb{E}\left[(\mathrm{M}_n - a)_+\right]}{b-a} \leqslant \frac{\mathrm{C} + |a|}{b-a}.$$

Et par le lemme de Fatou, nous avons donc

$$\mathbb{E}[\mathrm{N}_\infty(a,b)] = \mathbb{E}\left[\liminf_{n\to\infty} \mathrm{N}_n(a,b)\right] \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[\mathrm{N}_n(a,b)] \leqslant \frac{\mathrm{C}+|a|}{b-a}.$$

Ainsi, nous avons que $\mathrm{N}_\infty(a,b) \in \mathrm{L}^1$ et donc $\mathbb{P}(\mathrm{N}_\infty(a,b) = \infty) = 0$ et finalement $\mathbb{P}(\mathrm{E}_{ab}) = 0$. Ceci prouve donc que M converge presque sûrement vers une limite M_∞, pour voir que $\mathrm{M}_\infty \in \mathrm{L}^1$, on utilise encore le lemme de Fatou pour observer que

$$\mathbb{E}[\mathrm{M}_\infty] = \mathbb{E}[\liminf_{n\to\infty} \mathrm{M}_n] \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[\mathrm{M}_n] \leqslant \mathrm{C}.$$

□

On donne maintenant le théorème de convergence pour les martingales bornées dans L^p pour $p > 1$ mais on ne donnera pas la preuve de ce résultat.

THÉORÈME 2.19

Soit M une martingale, on suppose qu'il existe une constante $\mathrm{C} > 0$ telle que pour un certain $p > 1$,

$$\mathbb{E}[|\mathrm{M}_n|^p] \leqslant \mathrm{C} \quad \text{pour tout } n \geqslant 0$$

alors il existe une variable aléatoire M_∞ telle que $\mathbb{E}[|\mathrm{M}_n|^p] \leqslant \mathrm{C}$ et telle que

$$\mathrm{M}_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} \mathrm{M}_\infty \quad \text{et} \quad \mathrm{M}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{L}^p} \mathrm{M}_\infty.$$

Démonstration. Tout d'abord, nous savons par l'inégalité de Hölder que

$$\mathbb{E}\left[|\mathrm{M}_n|\right] \leqslant \mathbb{E}\left[|\mathrm{M}_n|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \mathrm{C}^{\frac{1}{p}}$$

et M est une martingale bornée dans L^1 et elle converge donc presque sûrement vers une variable aléatoire

M_∞ telle que $\mathbb{E}[|M_\infty|] \leqslant C^{\frac{1}{p}}$. Par le lemme de Fatou, nous avons

$$\mathbb{E}\left[|M_\infty|^p\right] = \mathbb{E}\left[\liminf_{n\to\infty} |M_n|^p\right] \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[|M_n|^p\right] \leqslant C.$$

Il ne nous reste plus qu'à prouver la convergence L^p. Tout d'abord, nous remarquons que

$$|M_n - M_\infty|^p \leqslant \left(2\sup_{n\geqslant 0} |M_n|\right)^p$$

et par l'inégalité L^p de Doob, nous avons pour $m \in \mathbb{N}$,

$$\left\|\sup_{0\leqslant n\leqslant m} |M_n|\right\|_p \leqslant \frac{p}{p-1} \left\| |M_m| \right\|_p \leqslant \frac{p}{p-1} C^{\frac{1}{p}}$$

où nous avons utilisé le fait que $|M|$ est une sous-martingale positive. Par le lemme de Fatou en prenant $m \to \infty$, nous obtenons ainsi que

$$\left\|\sup_{n\geqslant 0} |M_n|\right\|_p \leqslant \frac{p}{p-1} C^{\frac{1}{p}}$$

et ainsi $\left(2\sup_{n\geqslant 0} |M_n|\right)^p \in L^1$ et par le théorème de convergence dominée nous avons que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[|M_n - M_\infty|^p\right] = \mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty} |M_n - M_\infty|^p\right] = 0.$$

□

Il est important de voir que p est *strictement* plus grand que 1. En particulier, on n'a pas convergence L^1 pour une martingale bornée dans L^1 mais seulement une convergence presque sûre. Nous allons voir deux contre-exemples,

- Définissons une suite de variables aléatoires i.i.d X_n telle que

$$\mathbb{P}(X_1 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 2) = \frac{1}{2}.$$

On considère alors la martingale

$$M_n = \prod_{i=1}^n X_i.$$

Voyons que M est une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Tout d'abord nous avons clairement $M_n \in \mathcal{F}_n$ et

$$\mathbb{E}[|M_n|] = \mathbb{E}[M_n] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] = 1$$

car $\mathbb{E}[X_1]] = 1$, enfin nous avons

$$E[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n+1} X_i \middle| \mathcal{F}_n\right] = \prod_{i=1}^n X_i \mathbb{E}[X_{n+1}] = M_n.$$

M est une martingale bornée dans L^1 donc on sait qu'il existe M_∞ telle que $M_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} M_\infty$. Mais nous avons que

$$\mathbb{P}\left(M_n \neq 0\right) = \mathbb{P}\left(\cap_{i=1}^n \{X_i = 2\}\right) = \frac{1}{2^n}$$

dont la somme est une série convergente. Par le lemme de Borel–Cantelli, nous savons que presque sûrement, il existe un indice i tel que $X_i = 0$ et ainsi $M_\infty = 0$ et donc $\mathbb{E}[M_\infty] = 0$. Comme $\mathbb{E}[M_n] = 1$ pour tout n, nous voyons que M ne converge pas vers M_∞ dans L^1.

- Prenons $\Omega = \mathbb{N}^*$ muni de la mesure de probabilité

$$\mathbb{P} = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right).$$

On considère alors la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}, [n+1, \infty[)$ et le processus donné par

$$X_n = (n+1)\mathbb{1}_{[n+1,\infty[}.$$

On voit tout d'abord que $X_n \in \mathcal{F}_n$ et aussi que

$$\mathbb{E}[|X_n|] = \mathbb{E}[X_n] = (n+1) \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1.$$

De plus, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{k\}} \mathbb{E}\left[X_{n+1}|\{k\}\right] + \mathbb{1}_{[n+1,\infty[} \mathbb{E}\left[X_{n+1}|[n+1,\infty[\right] \\
&= (n+2) \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{k\}} \frac{\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{[n+2,\infty[}\mathbb{1}_{\{k\}}\right]}{\mathbb{P}(\{k\})} + (n+2)\mathbb{1}_{[n+1,\infty[} \frac{\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{[n+2,\infty[}\mathbb{1}_{[n+1,\infty[}\right]}{\mathbb{P}([n+1,\infty[)} \\
&= 0 + (n+2)\mathbb{1}_{[n+1,\infty[} \frac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+1}} = X_n.
\end{aligned}$$

Ainsi (X_n) est une martingale par rapport à $\{\mathcal{F}_n\}$ et elle est bornée dans L^1 donc elle converge presque sûrement vers une variable aléatoire X_∞. Soit $\omega \in \Omega = \mathbb{N}^*$, alors il existe $N(\omega) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N(\omega)$, $X_n = 0$ (il suffit de prendre $N(\omega) = \omega + 1$ par exemple) et ainsi $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} 0$ mais on a $\mathbb{E}[X_n] = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc la martingale ne peut converger dans L^1.

2.4 Exercices

Exercice 3. Soit $\{M_n\}$ une martingale pour une filtration $\{\mathcal{F}_n\}$ telle que $\mathbb{E}[M_n^2] < \infty$ pour tout n. Montrer que l'on peut écrire

$$M_n^2 = N_n + A_n$$

où $\{N_n\}$ est une martingale pour la filtration $\{\mathcal{F}_n\}$ et A_n est un processus prévisible et monotone ($A_n \geqslant A_{n-1}$).
Indication : on pourra écrire $A_{n+1} = A_n + \mathbb{E}[(M_{n+1} - M_n)^2|\mathcal{F}_n]$ pour $n \geqslant 1$ et $A_0 = 0$.

Exercice 4. On suppose que $\{M_n\}$ est une sous-martingale et que ν et τ sont deux temps d'arrêt bornés tels que $\nu \leqslant \tau$. Prouver que $\mathbb{E}[M_\nu] \leqslant \mathbb{E}[M_\tau]$

Exercice 5. On considère une suite d'événements indépendants A_i satisfaisant

$$\phi(n) := \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$$

Soit $\tau_k = \min\{n \geqslant 0, \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i} = k\}$. Montrer en appliquant le théorème d'arrêt de Doob à une martingale bien choisie que pour tout $k \geqslant 1$,

$$\mathbb{E}[\phi(\tau_k)] = k$$

3. Construction du mouvement brownien

Nous allons introduire dans cette section l'un des objets les plus importants de ces notes, le *mouvement brownien standard* qui est un processus gaussien presque sûrement continu. Pour bien définir cet objet, nous allons tout d'abord donner quelques rappels sur les processus gaussiens

3.1 Processus gaussiens

On commence tout d'abord par rappeler la densité d'une variable aléatoire gaussienne d'espérance μ et de variance σ^2,

$$f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

Nous allons aussi généraliser la notion de variable aléatoire à des vecteurs dans $\mathbb{R}^n$. En particulier, nous pouvons définir si $\{v_i\}_{1\leqslant i\leqslant d}$ est une collection de variables aléatoires d'espérance μ_i alors

$$\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{E}[\vec{\mathbf{v}}] = \begin{pmatrix} \mathbb{E}[v_1] \\ \vdots \\ \mathbb{E}[v_d] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_d \end{pmatrix} = \vec{\boldsymbol{\mu}}$$

$$\Sigma = (\sigma_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant d}, \qquad \sigma_{i,j} = \mathbb{E}[(v_i-\mu_i)(v_j-\mu_j)]$$

$\vec{\boldsymbol{\mu}}$ est appelé l'*espérance* du vecteur $\vec{\mathbf{v}}$ et Σ est appelé la *matrice de covariance* du vecteur $\vec{\mathbf{v}}$. Nous pouvons maintenant donner la définition d'un vecteur gaussien.

Définition 3.1

Soit $\Sigma \in \mathbb{R}^{d\times d}$ définie positive et $\vec{\boldsymbol{\mu}} \in \mathbb{R}^d$. Un vecteur gaussien $\vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^d$ d'espérance $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ et de matrice de covariance Σ est un vecteur de densité

$$f_d(\vec{\mathbf{x}}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det \Sigma}} e^{-\frac{1}{2}(\vec{\mathbf{x}}-\vec{\boldsymbol{\mu}})^\top \Sigma^{-1}(\vec{\mathbf{x}}-\vec{\boldsymbol{\mu}})}.$$

On peut commencer par observer un vecteur gaussien en dimension 2. En particulier si (X, Y) est un vecteur gaussien tel que $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ alors sa matrice de covariance est donnée par

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \mathrm{Var}(X) & 0 \\ 0 & \mathrm{Var}(Y) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$$

et on peut écrire la densité du vecteur gaussien, si $\mathbb{E}[(X, Y)] = (\mu_x, \mu_y)$, comme

$$f_d(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2\sigma_x^2}(x-\mu_x)^2 - \frac{1}{2\sigma_y^2}(y-\mu_y)^2} = f_{\mu_x,\sigma_x}(x) f_{\mu_y,\sigma_y}(y)$$

et on obtient donc que X, Y sont deux variables aléatoires gaussiennes indépendantes.

Il faut faire attention que ceci n'est seulement correct car on a supposé que (X, Y) est un vecteur gaussien. Deux variables aléatoires gaussiennes de covariance 0 ne sont pas nécessairement indépendantes. Par exemple, si on considère $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et une variables aléatoire ε indépendante de X telle que $\mathbb{P}(\varepsilon = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon = -1) = \frac{1}{2}$ alors en définissant $Y = \varepsilon X$, on voit facilement que Y est aussi une variable aléatoire gaussienne centrée de variance 1. De plus,

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[\varepsilon X^2] = \mathbb{E}[\varepsilon]\mathbb{E}[X^2] = 0.$$

Clairement X et Y ne sont pas indépendantes puisque $X^2 = Y^2$.

Au-delà de la densité, nous pouvons aussi caractériser les vecteurs gaussiens par leur fonction caractérisitique. On rappelle que si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors

$$\mathbb{E}\left[e^{itX}\right] = e^{it\mu}e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

La généralisation aux vecteurs gaussiens est facile, on obtient la proposition suivante

PROPOSITION 3.2. Soit $\vec{\mathbf{v}}$ un vecteur gaussien d'espérance $\vec{\mu}$ et de matrice de covariance Σ alors pour tout $\theta \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathbb{E}\left[e^{i\vec{\theta}\cdot\vec{\mathbf{v}}}\right] = e^{i\vec{\theta}\cdot\vec{\mu}}e^{-\frac{1}{2}\vec{\theta}^\top\Sigma\vec{\theta}}$$

On peut utiliser la fonction caractéristique pour montrer une propriété importante des vecteurs gaussiens qui est parfois donné comme définition.

THÉORÈME 3.3

$\vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^d$ est un vecteur gaussien si et seulement si toute combinaison linéaire de $\vec{\mathbf{v}}$ est une variable aléatoire gaussienne.

Démonstration. Les deux sens de la preuve sont similaires. Supposons que toute combinaison linéaire de $\vec{\mathbf{v}}$ est gaussienne. Soit $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots \theta_d)^\top$, alors $Z_{\vec{\theta}} = \vec{\theta} \cdot \vec{\mathbf{v}}$ est une combinaison linéaire de $\vec{\mathbf{v}}$ et est donc une variable aléatoire gaussienne d'espérance $\vec{\theta} \cdot \vec{\mu}$ avec $\vec{\mu}$ l'espérance de $\vec{\mathbf{v}}$ et de variance

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Z_{\vec{\theta}}) = \mathbb{E}\left[(Z_{\vec{\theta}} - \vec{\theta}\cdot\vec{\mu})^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^d(\theta_k v_k - \theta_k\mu_k)\right)^2\right] &= \sum_{i,j=1}^d \theta_i\theta_j\mathbb{E}\left[(v_i - \mu_i)(v_j - \mu_j)\right] \\ &= \sum_{i,j=1}^d \theta_i\theta_j\sigma_{i,j} = \vec{\theta}^\top\Sigma\vec{\theta}\end{aligned}$$

Ainsi si on calcule la fonction caractéristique de $Z_{\vec{\theta}}$, nous avons

$$\mathbb{E}\left[e^{iZ_{\vec{\theta}}}\right] = \mathbb{E}\left[e^{i\vec{\theta}\cdot\vec{\mathbf{v}}}\right] = e^{i\vec{\theta}\cdot\vec{\mu}}e^{-\frac{1}{2}\vec{\theta}^\top\Sigma\vec{\theta}}$$

ce qui prouve que $\vec{\mathbf{v}}$ est un vecteur gaussien. □

3.2 Mouvement brownien standard

Le mouvement brownien standard porte son nom du botaniste écossais Robert Brown qui étudiait les trajectoires de pollen. Il a été ensuite retrouvé par Louis Bachelier pour appliquer ce processus à la finance mais c'est Albert Einstein qui a donné la description quantitative qui a démocratisé son étude. Norbert Wiener a donné sa première définition mathématique et Paul Lévy prouvera de nombreux résultats sur ce processus et ses trajectoires. En particulier, nous verrons dans la prochaine sous-section la construction de Lévy du mouvement brownien.

DÉFINITION 3.4

Soit $T > 0$, le mouvement brownien standard (MBS) sur $[0, T]$ est un processus aléatoire $\{B_s\}_{s\in[0,T]}$ défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tel que

1. $B_0 = 0$.
2. Ses accroissements sont indépendants : si $0 \leqslant t_0 < t_1 < \cdots < t_n \leqslant T$ alors les variables aléatoires $(B_{t_{i-1}} - B_{t_i})_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont indépendantes.
3. Pour $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, $B_s - B_t \sim \mathcal{N}(0, t-s)$.
4. Les fonctions $t \mapsto B_t(\omega)$ sont continues pour presque tout $\omega \in \Omega$.

Le mouvement brownien est un exemple (et l'exemple le plus important) d'un processus gaussien donné par la définition suivante.

DÉFINITION 3.5

$\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ est un processus gaussien si et seulement pour tout choix de $0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leqslant T$, $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})^\top$ est un vecteur gaussien

Par les premières propriétés du mouvement brownien, on peut calculer la fonction de covariance de ce processus. Ce résultat est très important et sera utilisé de nombreuses fois.

THÉORÈME 3.6

Soit B un MBS sur $[0, T]$ alors pour $s, t \in [0, T]$, on a

$$\mathrm{Cov}(B_s, B_t) = s \wedge t$$

Démonstration. On remarque tout d'abord que $\mathbb{E}[B_s] = \mathbb{E}[B_s - B_0] = \mathbb{E}[\mathcal{N}(0, s)] = 0$. Ainsi nous avons si on suppose que $s \leqslant t$,

$$\mathrm{Cov}(B_s, B_t) = \mathbb{E}[B_s B_t] = \mathbb{E}[B_s(B_t - B_s + B_s)] = \mathbb{E}[B_s]\mathbb{E}[B_t - B_s] + \mathbb{E}[B_s^2] = 0 + s = s \wedge t$$

où on a utilisé le fait que les accroissements sont indépendants et $B_s \sim \mathcal{N}(0, s)$. □

En fait, cette structure de covariance caractérise le mouvement brownien dans les processus gaussiens centrés, à condition d'avoir la presque sûre continuité.

PROPOSITION 3.7. Un processus gaussien $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ centré de fonction de covariance $s \wedge t$ a ses accroissements indépendants. De plus, si $X_0 = 0$ et ses trajectoires sont presque sûrement continues alors X est un MBS.

Démonstration. Il suffit de montrer l'indépendance des accroissements puisque la seconde partie de la proposition est alors immédiate. Soit $0 \leqslant t_1 < \cdots < t_n \leqslant T$, alors comme $(X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ est un vecteur gaussien, il suffit de calculer la covariance de deux accroissements et voir qu'elle est nulle. Pour $i < j$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}, X_{t_j} - X_{t_{j-1}}) &= \mathbb{E}[(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})(X_{t_j} - X_{t_{j-1}})] \\ &= \mathbb{E}[X_{t_i}X_{t_j}] - \mathbb{E}[X_{t_i}t_{j-1}] - \mathbb{E}[X_{t_{i-1}}X_{t_j}] + \mathbb{E}[X_{t_{i-1}}X_{t_{j-1}}] = t_i - t_i - t_{i-1} + t_{i-1} = 0.\end{aligned}$$

□

3.3 Construction de Lévy du mouvement brownien

L'idée principale est de construire un processus gaussien de la façon suivante. Si $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une collection de variables aléatoires gaussiennes centrées de variance 1, alors on voudrait écrire

$$B_t = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) Z_n.$$

En échangeant la somme et l'intégrale, si on peut le faire, alors on obtient directement que $\mathbb{E}[B_t] = 0$. De plus, pour la covariance on peut faire un calcul formel et voir que

$$\mathbb{E}[B_s B_t] = \sum_{n,m=0}^{+\infty} a_n(t) a_m(s) \mathbb{E}[Z_n Z_m] = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(t) a_n(s)$$

On cherche donc une suite de fonctions $a_n : [0, T] \to \mathbb{R}$ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(t) a_n(s) = s \wedge t$. Pour simplifier les notations, nous allons définir le mouvement brownien standard sur $[0, 1]$ et nous allons considérer l'espace de Hilbert $\mathrm{L}^2([0,1])$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(s)g(s)\mathrm{d}s.$$

On rappelle qu'un système orthonormé total de $\mathrm{L}^2([0,1])$ est une collection $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\int_0^1 \phi_n(s)\phi_m(s)\mathrm{d}s = \delta_{nm} \quad \text{et} \quad \left\{\sum_{n=0}^{m} a_n\phi_n,\ m\in\mathbb{N}, (a_1,\dots,a_m)\in\mathbb{R}^m\right\} \text{ est dense dans } \mathrm{L}^2([0,1]).$$

En particulier, on rappelle que si $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est un système orthonormé total alors

$$\int_0^1 \phi_n(s)f(s)\mathrm{d}s = 0 \text{ pour tout } n\in\mathbb{N} \Longrightarrow f = 0$$

ainsi que l'identité de Parseval

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(s)g(s)\mathrm{d}s = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f, \phi_n\rangle \langle g, \phi_n\rangle.$$

Muni de ces propriétés, on remarque que si l'on choisit $f = \mathbb{1}_{[0,t]}$ et $g = \mathbb{1}_{[0,s]}$ alors

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{s\wedge t} \mathrm{d}x = s\wedge t = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^s \phi_n(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^t \phi_n(x)\mathrm{d}x\right).$$

Ainsi, nous voyons qu'un candidat naturel pour la construction du mouvement brownien est

$$\mathrm{B}_t = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Z}_n \int_0^t \phi_n(x)\mathrm{d}x$$

avec $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un système orthonormé total. On va donc maintenant choisir un système qui va nous simplifier l'analyse de ce processus. Le système choisi est basé sur les *ondelettes de Haar* qui sont construites à partir de la fonction suivante

$$\mathrm{H}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0\leqslant t\leqslant \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{1}{2}\leqslant t < 1 \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

DÉFINITION 3.8

Soit $n\in\mathbb{N}$, alors il existe j,k tels que $n = 2^j + k$ avec $0\leqslant k\leqslant 2^j - 1$. On définit alors les fonctions

$$\phi_n(t) = \phi_{j,k}(t) := 2^{\frac{j}{2}}\mathrm{H}\left(2^j t - k\right) \quad \text{et} \quad \phi_0(t) = 1.$$

Par exemple, on donne les premières ondelettes

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &= \phi_{0,0}(t) = \mathrm{H}(t), & \phi_2(t) &= \phi_{1,0}(t) = \sqrt{2}\mathrm{H}(2t), \\ \phi_3(t) &= \phi_{1,1}(t) = \sqrt{2}\mathrm{H}(2t-1), & \phi_4(t) &= \phi_{2,0}(t) = 2\mathrm{H}(4t). \end{aligned}$$

PROPOSITION 3.9. $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est un système orthonormé total.

Démonstration. On commence par calculer la norme de ϕ_n,

$$\int_0^1 \phi_{j,k}^2(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 2^j\mathrm{H}\left(2^j t - k\right)^2 \mathrm{d}t = \int_0^{2^j - k} \mathrm{H}(u)^2 = \int_0^1 \mathrm{d}t = 1.$$

De plus, par définition de $\phi_{j,k}$, on voit aussi facilement que pour $n \neq n' \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 \phi_{j,k}(t)\phi_{j',k'}(t)\mathrm{d}t = 0.$$

Pour montrer que le système est total on va montrer que $\mathbb{1}_{\left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}\right]} \in \mathrm{Vect}(\phi_n)$ par reccurrence sur j, tout d'abord pour $j = 1$ avec $k = 0, 1$ on a

$$\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]} = \frac{\phi_0 + \phi_{0,0}}{2}, \quad \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]} = \frac{\phi_0 - \phi_{0,0}}{2}.$$

Si on suppose que la propriété pour un certain $j \in \mathbb{N}$ et pour tout $0 \leqslant k \leqslant 2^j - 1$. Alors soit un entier $k \in \{0, \dots, 2^{j+1} - 1\}$, alors on peut observer que

$$\frac{1}{2}\left(2^{-\frac{j+1}{2}}\phi_{j,2k} + \mathbb{1}_{\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]}\right) = \mathbb{1}_{\left[\frac{2k}{2^{j+1}}, \frac{2k+1}{2^{j+1}}\right]}.$$

□

De ces ondelettes de Haar, on va considérer leur primitive, aussi appelé *fonctions de Schauder* données par

$$\Delta(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ 1 - t & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit alors

$$\Delta_n(t) = \Delta_{j,k}(t) = 2^{-\frac{j}{2}}\Delta\left(2^j t - k\right) \tag{1}$$

et ainsi

$$\int_0^s \phi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}}\int_0^s \mathrm{H}\left(2^j t - k\right)\mathrm{d}t = 2^{-\frac{j}{2}}\int_0^{2^j s - k} \mathrm{H}(t)\mathrm{d}t = \Delta_{j,k}(s).$$

Nous avons donc construit notre candidat naturel pour le mouvement brownien, il faut maintenant prouver que cette série de fonctions converge vers la bonne limite.

THÉORÈME 3.10

Soit $\{\mathrm{B}_s\}_{s\in[0,1]}$ défini par

$$\mathrm{B}_s = \sum_{n=0}^{+\infty} \Delta_n(t)\mathrm{Z}_n$$

avec $\{\mathrm{Z}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une collection de variables aléatoires indépendantes normales centrées réduites. Alors la série converge uniformément sur $[0, 1]$ presque sûrement et la limite est un mouvement brownien standard.

Pour prouver ce théorème nous allons utiliser la Proposition 3.7 et nous devons donc montrer que B est un processus gaussien centré de covariance $s \wedge t$ tel que $\mathrm{B}_0 = 0$ et $t \mapsto \mathrm{B}_t(\omega)$ est continue pour presque tout $\omega \in \Omega$. Le choix de notre système nous donnera facilement la structure de covariance et de l'espérance du processus et la convergence uniforme de la série nous donnera la continuité puisque les fonctions de Schauder sont continues. Enfin, il restera à verifier le fait que B est un processus gaussien.

Avant toute chose, nous allons montrer un lemme qui nous sera utile pour prouver la convergence uniforme de la série.

LEMME 3.11. Si $\{\mathrm{Z}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une collection de variables aléatoires i.i.d $\mathcal{N}(0, 1)$ alors il existe une variable aléatoire C tel que

$$|\mathrm{Z}_n| \leqslant \mathrm{C}\sqrt{\log n} \quad \text{pour tout } n \geqslant 2 \quad \text{avec} \quad \mathbb{P}(\mathrm{C} < +\infty) = 1.$$

Démonstration. On commence par voir que pour $x \geqslant 1$,

$$\mathbb{P}(|Z_n| \geqslant x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_x^{+\infty} u e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Ainsi, pour $\alpha > 1$ et $n \geqslant 2$,

$$\mathbb{P}(|Z_n| \geqslant \sqrt{2\alpha \log n}) \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{n^\alpha}.$$

par le lemme de Borel–Cantelli, nous avons donc que

$$\mathbb{P}(|Z_n| \geqslant \sqrt{2\alpha \log n} \text{ infiniment souvent}) = 0.$$

On peut donc définir la variable aléatoire

$$C = \sup_{n \geqslant 2} \frac{|Z_n|}{\sqrt{\log n}}$$

et on a $|Z_n| \leqslant C\sqrt{\log n}$ par définition et $\mathbb{P}(C < \infty)$ par le lemme de Borel–Cantelli. □

Nous sommes maintenant parés à prouver Théorème 3.10.

Démonstration du Théorème 3.10. On commence par prouver la convergence uniforme presque sûre en utilisant Lemme 3.11. Soit $M \geqslant 2^J$ pour un certain $J \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=M}^{+\infty} |Z_n| \cdot |\Delta_n(t)| \leqslant C \sum_{n=M}^{+\infty} \sqrt{\log n} \Delta_n(t) \leqslant C \sum_{j=J}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} \sqrt{\log(2^j + k)} \Delta_{j,k}(t) \leqslant C\sqrt{\log 2} \sum_{j=J}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} \sqrt{j+1} \Delta_{j,k}(t)$$

où on a utilisé le fait que $2^j + k \leqslant 2^{j+1} = e^{(j+1)\log 2}$. Maintenant, il est important de voir que par définition de $\Delta_{j,k}$, pour un j fixé et pour tout $t \in [0,1]$, il existe un unique $k \in \{0, 2^j - 1\}$ tel que $\Delta_{j,k}(t) \neq 0$ et de plus $|\Delta_{j,k}| \leqslant \frac{1}{2} 2^{-\frac{j}{2}}$. Finalement, la somme sur k ne consiste que d'un terme et on peut borner

$$\left| \sum_{n=M}^{+\infty} Z_n \Delta_n(t) \right| \leqslant C\sqrt{\log 2} \sum_{j=J}^{+\infty} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{j+1}}{2^{\frac{j}{2}}} \xrightarrow[J \to \infty]{\text{unif. en } t} 0 \text{ presque sûrement}$$

ou la convergence presque sûre vient du fait que $\mathbb{P}(C < \infty) = 1$. Par la convergence uniforme de la série, on obtient que la limite B existe et est continue presque sûrement. La convergence uniforme nous permet aussi de calculer rigoureusement l'espérance et la covariance de B et on a pour $s \leqslant t$,

$$\mathbb{E}[B_s] = E\left[\sum_{n=0}^{+\infty} Z_n \Delta_n(t)\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} \Delta_n(t) \mathbb{E}[Z_n] = 0$$

et

$$\mathbb{E}[B_s B_t] = \mathbb{E}\left[\sum_{n,m=0}^{+\infty} Z_n Z_m \Delta_n(t) \Delta_m(s)\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} \Delta_n(t) \Delta_n(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^t \phi_n(u) du\right) \left(\int_0^s \phi_n(u) du\right)$$
$$= \int_0^1 \mathbb{1}_{[0,s]} \mathbb{1}_{[0,t]} = s \wedge t.$$

Finalement, nous avons plus qu'une chose à vérifier : que B est un processus gaussien. En tant que somme infinie de gaussiennes, ce n'est pas totalement évident. Soient $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)^\top \in \mathbb{R}^m$ et $t_1 < t_2 < \cdots < t_m$ alors

$$\mathbb{E}\left[e^{iZ_n \sum_{j=1}^m \theta_j X_{t_j}}\right] = \mathbb{E}\left[e^{i \sum_{j=1}^m \theta_j \sum_{n=0}^{+\infty} Z_n \Delta_n(t_j)}\right] = \prod_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}\left[e^{iZ_n \sum_{j=1}^m \theta_j \Delta_n(t_j)}\right].$$

On peut calculer cette quantité en utilisant le fait que Z_n est une variable gaussienne centrée de variance 1 puisque $\theta_j\Delta_n$ est déterministe, on obtient

$$\mathbb{E}\left[e^{i\sum_{j=1}^m \theta_j X_{t_j}}\right] = \prod_{n=0}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^m \theta_j\Delta_n(t_j)\right)^2} = e^{-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{j,k=1}^m \theta_j\theta_k\Delta_n(t_j)\Delta_n(t_k)} = e^{-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^m \theta_j\theta_k t_j\wedge t_k} = e^{-\frac{1}{2}\vec{\theta}\Sigma\vec{\theta}}$$

avec $\Sigma = \left(t_j \wedge t_k\right)_{1\leqslant j,k\leqslant m}$ et on a donc bien un vecteur gaussien et B est un processus gaussien et est donc finalement un mouvement brownien standard. □

Nous avons donc réussi à construire le mouvement brownien sur $[0,1]$, pour définir un mouvement brownien sur $[0,T]$ ou même sur $\mathbb{R}_+$, on construit $\{B^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ ou les $B^{(n)}$ sont des mouvements browniens indépendants sur $[0,1]$ et on définit un mouvement brownien sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\text{Si } t \in [n, n+1) \text{ pour } n \geqslant 0, \quad B_t = \sum_{k=1}^n B_1^{(k)} + B_{t-n}^{(n+1)}$$

3.4 Premières propriétés du mouvement brownien

La première propriété que nous allons voir et le changement d'échelle du mouvement brownien. En d'autre terme, toute la complexité du mouvement brownien sur $[0,1]$ est en fait comprise dans tout intervalle $[0,a]$ pour tout $a > 0$.

PROPOSITION 3.12. Soit B un mouvement brownien standard et $a > 0$ alors $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ défini par

$$X_t = \frac{1}{\sqrt{a}} B_{at}$$

est aussi un mouvement brownien standard.

Démonstration. Nous allons utiliser la Proposition 3.7 pour montrer que X est un mouvement brownien. $X_0 = 0$ par définiton et de plus $t \mapsto X_t(\omega)$ est continu presque sûrement par la continuité presque sûre de B. Il est clair que X_t est un processus gaussien car B est un processus gaussien. Il suffit donc de calculer l'espérance et la covariance de X.

$$\mathbb{E}[X_t] = \frac{1}{\sqrt{a}}\mathbb{E}[B_{at}] = 0$$
$$\mathbb{E}[X_t X_s] = \frac{1}{a}\mathbb{E}[B_{at}B_{as}] = \frac{1}{a}(as) \wedge (at) = s \wedge t.$$

□

Nous allons maintenant voir la loi de Markov simple du mouvement brownien, nous verrons la version forte plus tard dans la Section 5.

PROPOSITION 3.13. Si $B = (B_t)_{t\geqslant 0}$ est un mouvement brownien standard alors pour $s \geqslant 0$, le processus $X = (B_{t+s} - B_s)_{s\geqslant 0}$ est aussi un mouvement brownien standard. De plus il est indépendant de $\sigma(B_t)_{0\leqslant t\leqslant s}$.

Démonstration. L'indépendance vient de l'indépendance des accroissements du mouvement brownien. De plus, on a clairement que $X_0 = 0$, $\mathbb{E}[X_t] = 0$ et X est un processus gaussien. Il suffit donc de calculer la covariance pour $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_{t_1}X_{t_2}] = \mathbb{E}[(B_{t_1+s} - B_s)(B_{s+t_2} - B_s)] &= \mathbb{E}[B_{s+t_1}B_{s+t_2}] - \mathbb{E}[B_sB_{s+t_1}] - \mathbb{E}[B_sB_{s+t_2}] + \mathbb{E}[B_s^2] \\ &= (s+t_1) \wedge (s+t_2) - s - s + s = t_1 \wedge t_2.\end{aligned}$$

□

Finalement, on a aussi la propriété d'inversion du temps.

PROPOSITION 3.14. Si B est un mouvement brownien standard alors $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ avec

$$X_t = tB_{\frac{1}{t}}$$

alors X est un mouvement brownien standard.

Démonstration. On voit clairement que $\mathbb{E}[X_t] = 0$, $X_0 = 0$, et X processus gaussien, De plus

$$\mathbb{E}[X_t X_s] = ts\mathbb{E}\left[B_{\frac{1}{t}} B_{\frac{1}{s}}\right] = ts\left(\frac{1}{t} \wedge \frac{1}{s}\right) = s \wedge t.$$

La continuité presque sûre de $t \mapsto X_t(\omega)$ est claire pour $t > 0$. Pour la continuité en 0, il faut faire un peu plus attention. Tout d'abord on remarque clairement que $B_t \overset{(d)}{=} tB_{\frac{1}{t}}$ ainsi, on voit que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geqslant 0} \bigcup_{t \in \mathbb{Q} \cap [0, \frac{1}{n}]} \left\{\left|tB_{\frac{1}{t}}\right| \geqslant \varepsilon\right\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geqslant 0} \bigcup_{t \in \mathbb{Q} \cap [0, \frac{1}{n}]} \{|B_t| \geqslant \varepsilon\}\right) = 0$$

puisque $t \mapsto B_t(\omega)$ est continu presque sûrement et $B_0 = 0$. Ainsi on voit que $sB_{\frac{1}{s}} \xrightarrow[s \to 0]{} 0$ le long des rationnels et par continuité sur tout $(0, +\infty)$ on voit que $X_t \xrightarrow[t \to 0]{} 0$. □

3.5 Exercices

EXERCICE 6. Utiliser la fonction caractéristique ou la forme explicite de la densité pour répondre aux questions suivantes.

1. Soit $V = (v_1, \ldots, v_n)$ un vecteur gaussien d'espérance $\mu \in \mathbb{R}^n$ et de covariance $\Sigma \in S_n(\mathbb{R})$. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que AV est un vecteur gaussien d'espérance $A\mu$ et de covariance $A\Sigma A^\top$.
2. Montrer que si X et Y sont deux variables gaussiennes indépendantes d'espérance zéro et de variance 1 alors $X - Y$ et $X + Y$ sont deux variables gaussiennes indépendantes d'espérance zéro et de variance 2.
3. Montrer que si (X, Y) est un vecteur gaussien, alors la distribution conditionnelle de Y sachant que $X = x$ est normale d'espérance
$$\mu_{Y|X=x} = \mu_Y + \frac{\operatorname{Cov}(X, Y)}{\operatorname{Var}(X)}(x - \mu_X)$$
et de variance
$$\sigma^2_{Y|X=x} = \sigma^2_Y - \frac{\operatorname{Cov}^2(X, Y)}{\operatorname{Var}(x)}.$$

EXERCICE 7. Soit $(B_t)_{t \geqslant 0}$ un mouvement brownien standard et $s < t$.

1. Calculer $\mathbb{E}[B_s B_t^2]$.
2. Calculer $\mathbb{E}[B_s^2 B_t^2]$. On pourra recalculer $\mathbb{E}[X^4]$ avec $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ si on l'a oublié.
3. Montrer que $\mathbb{E}[B_s e^{B_s}] = se^{s/2}$. On pourra tout d'abord calculer $\mathbb{E}[e^{tX}]$ où $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
4. Calculer $\mathbb{E}[B_s e^{B_t}]$.

EXERCICE 8. Soit $(B_t)_{t \geqslant 0}$ un mouvement brownien standard et $a \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{B_t \leqslant a}]$.
2. Calculer $\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[B_t \mathbb{1}_{B_t \leqslant a}]$.

EXERCICE 9. Soit $(B_t)_{t\geqslant 0}$ un mouvement brownien standard.

1. Montrer que si $0 \leqslant s \leqslant t$ alors la loi jointe de (B_s, B_t) est donnée
$$f_{s,t}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{s(t-s)}} e^{-\frac{1}{2s}x^2 - \frac{1}{2(t-s)}(y-x)^2}.$$
2. Montrer que pour tout $s > 0$, $\mathbb{P}(B_s < 0, B_{2s} > 0) = \frac{1}{8}$.

EXERCICE 10. La construction de notre mouvement brownien standard s'écrit $B_t = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_n(t) Z_n$. On remarque que $\Delta_0(1) = 1$ et $\Delta_n(1) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$ ainsi que $\Delta_n(0) = 0$ pour tout $n \geqslant 0$. On peut donc définir un nouveau processus
$$U_t = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n(t) Z_n.$$
Ce processus est un processus continu sur $[0,1]$ tel que $U(0) = U(1) = 0$, il est appelé un *pont brownien*.

1. Montrer que l'on peut écrire $U_t = B_t - tB_1$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1$.
2. Montrer que l'on a $\mathrm{Cov}(U_s, U_t) = s(1-t)$ pour $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$.
3. Soit $X_t = g(t) B_{h(t)}$, trouver les fonctions g et h telles que X_t a la même structure de covariance que le pont Brownien.
4. Montrer que le prcessus défini par $Y_t = (1+t) U_{t/(1+t)}$ est un mouvement brownien sur $[0,\infty)$.
   Remarque : Cela nous donne une autre définition du mouvement brownien sur $\mathbb{R}_+$.

4. Martingales en temps continu et mouvement brownien

Nous avons construit le mouvement brownien comme processus gaussien continu, dans cette section nous allons introduire le concept de martingales en temps continu et nous verrons que le mouvement brownien en est un exemple. La notion sera importante dans le reste de ces notes puisqu'elle est directement reliée à l'intégrale stochastique, au calcul stochastique et même aux applications à la finance.

4.1 Filtrations et martingales

La notion de filtration en temps continu est la même que dans le cas discret

DÉFINITION 4.1

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ est une filtration sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si pour tout $t \geqslant 0$, $\mathcal{F}_t$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}$ et si $s \leqslant t$, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.
De plus, un processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est adapté à $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ si et seulement si pour tout $t \geqslant 0$, $X_t \in \mathcal{F}_t$.

On peut ainsi donner la définition de martingales en temps continu qui est la même que dans le case discret

DÉFINITION 4.2

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré. $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est une martingale par rapport à $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ si et seulement si

1. $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$ pour tout $t \geqslant 0$.

2. $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est un processus adapté à $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$.
3. Pour $s \leqslant t$, nous avons $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$.

Si la troisième propriété est remplacée par $X_s \leqslant \mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s]$ (respectivement $X_s \geqslant \mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s]$) alors X est une sous-martingale (respectivement une sur-martingale).

Pour la marche aléatoire simple $S_n = \sum_{i=1}^n X_k$, nous prenons la filtration naturelle $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$. Pour le mouvement brownien standard, l'analogue devrait être la filtration $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leqslant t)$. Cependant, être en temps continu pose certaines difficultés, en particulier il est naturel d'*augmenter* la filtration.

DÉFINITION 4.3

Soit B un mouvement brownien standard. On considère

$$\mathcal{C} = \{A \in \sigma(B_s, s \leqslant t), \, \mathbb{P}(A) = 0\} \quad \text{et} \quad \mathcal{N} = \{B \subset A, \, A \in \mathcal{C}\}.$$

En particulier, les sous-ensembles $B \in \mathcal{N}$ ne sont pas nécessairement mesurables mais on pose $\mathbb{P}(B) = 0$ pour tout $B \in \mathcal{N}$. On définit alors la *filtration brownienne standard* $\{\mathcal{F}_t^B\}_{t\geqslant 0}$ par

$$\mathcal{F}_t^B = \mathcal{N} \bigvee \sigma(B_s, s \leqslant t)$$

L'avantage d'augmenter la filtration $\sigma(B_s, s \leqslant t)$ est qu'elle suit maintenant de bonne propriétés, notamment de continuité à droite.

PROPOSITION 4.4. La filtration brownienne standard $\{\mathcal{F}_t^B\}_{t\geqslant 0}$ satisfait les *conditions habituelles* :

1. $\mathcal{F}_0^B$ contient tout $B \in \mathcal{N}$.
2. Pour tout $t \geqslant 0$, $\mathcal{F}_t^B = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s^B =: \mathcal{F}_{t^+}^B$.

Démonstration. La première propriété est claire par définition de la filtration brownienne standard. Pour la seconde propriété, soit $s > t$ and on considère l'ensemble

$$\mathcal{G} = \left\{ A \in \sigma(B_u, \, u \leqslant s), \, \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A \middle| \mathcal{F}_{t^+}^B\right] \in \mathcal{F}_t^B \right\}.$$

On considère maintenant les événements A qui sont de la forme suivante pour $0 \leqslant t_0 < t_1 < \cdots < t_n \leqslant s$ tel que $t = t_k$ pour un certain k, et $A_1, \dots, A_n$ des boréliens de $\mathbb{R}$,

$$A = \bigcap_{k=1}^n \{B_{t_k} - B_{t_{k-1}} \in A_k\}.$$

Par l'indépendance des accroissements de B et la propriété de Markov simple, nous avons alors si $s = t_i$,

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A \middle| \mathcal{F}_{t^+}^B\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^n \mathbb{1}_{B_{t_k} - B_{t_{k-1}} \in A_k} \middle| \mathcal{F}_{t^+}^B\right] = \prod_{k=1}^i \mathbb{1}_{B_{t_k} - B_{t_{k-1}} \in A_k} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=i+1}^n \{B_{t_{k+1}} - B_{t_k} \in A_k\}\right)$$

On voit donc que $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A|\mathcal{F}_{t^+}^B]$ est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_t^B$ et ainsi nous voyons que tous les événements A de cette forme sont dans $\mathcal{G}$. On observe maintenant que les événements de cette forme génère $\sigma(B_u, u \leqslant t)$, on peut alors utiliser le lemme de classe monotone sur $\mathcal{G}$ pour ainsi voir que $\mathcal{G} = \sigma(B_u, s \leqslant t)$.

Finalement, soit $A \in \mathcal{F}_{t^+}^B$ alors $A \in \mathcal{F}_s^B$ car $s > t$. De plus, il existe une variable aléatoire $X \in \sigma(B_u, u \leqslant s)$ telle que $X = \mathbb{1}_A$ presque sûrement. Alors par ce que nous avons prouvé plus haut $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{t^+}^B] \in \mathcal{F}_t^B$ mais puisque $\mathcal{F}_t^B$ contient $\mathcal{N}$, nous obtenons que $\mathbb{1}_A = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A|\mathcal{F}_{t^+}^B] \in \mathcal{F}_t^B$. Ainsi nous avons $\mathcal{F}_{t^+}^B \subset \mathcal{F}_t^B$ et l'autre inclusion étant évidente on obtient la continuité à droite. □

⚠ Nous voyons que nous avons utilisé à la fin de la preuve que la filtration contient $\mathcal{N}$. En particulier, nous pouvons voir que la filtration non augmentée $\{\sigma(B_s, s \leqslant t)\}_{t\geqslant 0}$ n'est pas continue à droite. En effet, si on considère l'événement

$$A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left\{ B_{t+s} > B_t \text{ pour un } s \in \mathbb{Q} \cap \left]0, \frac{1}{n}\right[\right\}$$

alors on voit clairement que $A \in \mathcal{F}_{t^+}$. On considère maintenant les deux événements suivants

$$E_1 = \{\omega \in \Omega,\ B_s(\omega) = s \text{ pour tout } s \geqslant 0\}, \quad E_2 = \{\omega \in \Omega,\ B_s(\omega) = t - |s-t| \text{ pour tout } s \geqslant 0\}.$$

Alors on voit que $E_1 \subset A$ mais $E_2 \not\subset A$. Mais pour $\omega \in E_1$ et $\omega' \in E_2$ on voit que pour tout $s \in [0, t]$, $B_s(\omega) = B_s(\omega')$ et ainsi si $A \in \mathcal{F}_t$, on devrait avoir $E_2 \subset A$ ce qui n'est pas le cas. Donc $A \notin \mathcal{F}_t$ et ainsi

$$\mathcal{F}_{t^+} \neq \mathcal{F}_t.$$

4.2 Intégrabilité uniforme

Nous allons maintenant introduire la notion d'intégrabilité uniforme qui est une notion importante pour les martingales en temps continu et discret. En particulier, c'est la condition naturelle pour obtenir une convergence L^1 des martingales.

Définition 4.5

Une collection $\mathcal{C}$ de variables aléatoires est uniformément intégrable si

$$\rho(x) = \sup_{Z\in\mathcal{C}} \mathbb{E}\left[|Z|\mathbb{1}_{|Z|>x}\right] \xrightarrow[x\to\infty]{} 0.$$

C'est une bonne condition car elle permet de convertir une convergence presque sûre en convergence L^1.

Lemme 4.6. Suppose $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires uniformément intégrable telle qu'il existe une variable aléatoire Z telle que

$$Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} Z$$

alors

$$Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} Z \quad \text{i.e.} \quad \mathbb{E}\left[|Z_n - Z|\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, we have

$$\mathbb{E}\left[|Z_n|\mathbb{1}_{|Z_n|>x}\right] \leqslant \rho(x).$$

Ainsi par le lemme de Fatou,

$$\mathbb{E}\left[|Z|\mathbb{1}_{|Z|>x}\right] \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[|Z_n|\mathbb{1}_{|Z_n|>x}\right] \leqslant \rho(x).$$

Nous avons donc

$$\mathbb{E}[|Z|] = \mathbb{E}\left[|Z|\mathbb{1}_{|Z|>x}\right] + \mathbb{E}[|Z|\mathbb{1}_{|Z|\leqslant x}] \leqslant \rho(x) + x < \infty$$

et $Z \in L^1$. Maintenant, nous écrivons

$$|Z_n - Z| \leqslant |Z_n - Z|\mathbb{1}_{|Z_n|\leqslant x} + |Z_n - Z|\mathbb{1}_{|Z_n|>x} \leqslant |Z_n - Z|\mathbb{1}_{|Z_n|\leqslant x} + |Z_n|\mathbb{1}_{|Z_n|>x} + |Z|\mathbb{1}_{|Z_n|>x}.$$

Pour le premier terme, on voit que $|Z_n - Z|\mathbb{1}_{|Z_n|\leqslant x} \leqslant x + |Z| \in L^1$ et par le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[|Z_n - Z|\mathbb{1}_{|Z_n|\leqslant x}\right] = 0.$$

Pour le troisième terme, nous avons comme $|Z|\mathbb{1}_{|Z_n|>x} \leqslant |Z|$ par le théorème de convergence dominée

$$\mathbb{E}\left[|Z|\mathbb{1}_{|Z_n|>x}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}\left[|Z|\mathbb{1}_{|Z|>x}\right] \leqslant \rho(x).$$

Ainsi on obtient finalement, que

$$\mathbb{E}[|Z_n - Z|] \leqslant 2\rho(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0.$$

□

La convergence L^1 permet aussi de passer à la limite dans une espérance conditionnelle.

LEMME 4.7. Si $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires telle que $Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} Z$ et si $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément intégrable alors pour toute sous-tribu $\mathcal{G}$,

$$\mathbb{E}[Z_n|\mathcal{G}] \xrightarrow[n\to\infty]{L^1,\mathbb{P}} \mathbb{E}[X|\mathcal{G}].$$

Démonstration. Par le lemme précédent, on sait que $Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} Z$ et ainsi

$$\mathbb{E}\left[|\mathbb{E}[Z_n|\mathcal{G}] - \mathbb{E}[Z|\mathcal{G}]|\right] = \mathbb{E}\left[|\mathbb{E}[Z_n - Z|\mathcal{G}]|\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[|Z_n - Z||\mathcal{G}\right]\right] = \mathbb{E}[|Z_n - Z] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(|\mathbb{E}[Z_n|\mathcal{G}] - \mathbb{E}[Z|\mathcal{G}]| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}[|Z_n - Z|] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

□

Nous allons voir maintenant un lemme qui nous permet de vérifier qu'une famille de variables aléatoires est uniformément intégrable.

LEMME 4.8. Si $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction telle que $\frac{\phi(x)}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} +\infty$, si $\mathcal{C}$ est une collection de variables aléatoires telle que pour tout $Z \in \mathcal{C}$, $\mathbb{E}[\phi(|Z|)] \leqslant C < \infty$ alors $\mathcal{C}$ est uniformément intégrable.

Démonstration. Soit $Z \in \mathcal{C}$,

$$\mathbb{E}\left[|Z|\mathbb{1}_{|Z|>x}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{|Z|}{\phi(|Z|)}\phi(|Z|)\mathbb{1}_{|Z|>x}\right] \leqslant \frac{\mathbb{E}[\phi(|Z|)]}{\min\left\{\frac{\phi(y)}{y},\, y \geqslant x\right\}} \leqslant \frac{C}{\min\left\{\frac{\phi(y)}{y},\, y \geqslant x\right\}} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$$

où la convergence est uniforme sur Z. □

Par exemple, on voit qu'une famille uniformément bornée dans L^p pour $p > 1$ est uniformément intégrable. En revanche, ce lemme ne donne pas qu'une famille bornée dans L^1 est uniformément intégrable et d'ailleurs, ceci est faux. En revanche, on peut relier les variables dans L^1 à ces fonctions ϕ à croissance sur-linéaire.

LEMME 4.9. Si Z est une variable aléatoire telle que $\mathbb{E}[|Z|] < \infty$ alors il existe une fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe telle que $\frac{\phi(x)}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} +\infty$ et telle que $\phi(|Z|) \in L^1$.

Démonstration. On commence par utiliser la formule pour l'espérance

$$\mathbb{E}[|Z|] = \int_0^\infty \mathbb{P}\left(|Z| \geqslant x\right) \mathrm{d}x < \infty.$$

Si on suppose qu'il existe une fonction $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante telle que $a(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$ et telle que

$$\int_0^\infty a(x)\mathbb{P}\left(|Z| \geqslant x\right) \mathrm{d}x < \infty$$

alors on peut choisir

$$\phi(x) = \int_0^x a(y)\mathrm{d}y$$

qui est une fonction convexe car ϕ' est croissante et $\frac{\phi(x)}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$ car $a(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$. Ainsi,

$$\mathbb{E}[\phi(|Z|)] = \mathbb{E}\left[\int_0^{|Z|} a(y)\mathrm{d}y\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty a(y)\mathbb{1}_{|Z|\geqslant y}\mathrm{d}y\right] = \int_0^\infty a(x)\mathbb{P}\left(|Z| \geqslant x\right) \mathrm{d}x < \infty.$$

Pour montrer l'existence de a, on pose pour $\alpha \in]0,1[$,

$$a(x) = \left(\int_x^\infty \mathbb{P}\left(|Z| \geqslant y\right) \mathrm{d}y\right)^{-\alpha}$$

alors si on pose

$$x_k = \min\left\{x, \int_x^\infty \mathbb{P}(|Z| \geqslant y)\mathrm{d}y \leqslant \frac{1}{2^k}\right\}$$

on a

$$\begin{aligned}\int_0^\infty a(x)\mathbb{P}\left(|Z| \geqslant x\right) \mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^\infty \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{\mathbb{P}\left(|Z| \geqslant x\right)}{\left(\int_x^\infty \mathbb{P}\left(|Z| \geqslant y\right) \mathrm{d}y\right)^\alpha} \leqslant \sum_{k=0}^\infty 2^{(k+1)\alpha} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \mathbb{P}(|Z| \geqslant x)\mathrm{d}x \\ &\leqslant \sum_{k=0}^\infty \frac{2^\alpha}{2^{(1-\alpha)k}} < \infty\end{aligned}$$

□

En particulier ce lemme nous permet de voir qu'une famille d'espérance conditionnelle par rapport à différentes sous-tribus est uniformément intégrable.

Lemme 4.10. Si $Z \in L^1$ et si $Z \in \mathcal{F}$ alors $\{\mathbb{E}[Z|\mathcal{G}], \mathcal{G} \text{ sous-tribu de } \mathcal{F}\}$ est uniformément intégrable.

Démonstration. On sait que comme $Z \in L^1$ alors il existe une fonction convexe ϕ telle que $\frac{\phi(x)}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} +\infty$ et telle que $\mathbb{E}[\phi(|Z|)] < \infty$. Alors on a finalement,

$$\mathbb{E}\left[\phi\left(|\mathbb{E}[Z|\mathcal{G}]|\right)\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\phi(|Z|)|\mathcal{G}\right]\right] \leqslant \mathbb{E}[\phi(|Z|)] < \infty$$

où nous avons utilisé l'inégalité de Jensen dans la première inégalité. Par le Lemme 4.8, nous avons donc que la famille est uniformément intégrable. □

4.3 Temps d'arrêt et théorèmes d'arrêt

On définit un temps d'arrêt en temps continu de la même façon qu'en temps discret.

Définition 4.11

$\tau : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ est un temps d'arrêt par rapport à une filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ si pour tout $t \geqslant 0$, $\{\omega, \tau(\omega) \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$.

On peut aussi définir la variable aléatoire X_τ de la façon suivante : pour tout $\omega \in \Omega$ tel que $\tau(\omega) < +\infty$ par

$$X_\tau(\omega) = X_t(\omega) \quad \text{si} \quad \tau(\omega) = t.$$

On a alors aussi un théorème d'arrêt pour les martingales en temps continu. On appelle *martingale continue* une martingale $M = \{M_t\}_{t\geqslant 0}$ telle que $\omega \mapsto M_t(\omega)$ est continue presque sûrement.

THÉORÈME 4.12

Si M est une martingale continue par rapport à une filtration $\{\mathcal{F}_t\}$ satisfaisant les conditions habituelles et si τ est un temps d'arrêt par rapport à $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ alors $M^\tau = \{M_{t\wedge\tau}\}_{t\geqslant 0}$ est aussi une martingale continue par rapport à $\{\mathcal{F}_t\}$.

Démonstration. La méthode de la preuve est de se ramener au cas discret. Pour ce faire, on introduit

$$S(n) = \left\{s + (t-s)\frac{k}{2^n}, k \in \mathbb{Z}\right\} \quad \text{et} \quad \tau_n = \inf_{\nu\in S(n)} \{\nu \geqslant \tau\}.$$

On voit que τ est décroissant et $\tau_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \tau$. On note que τ_n est un temps d'arrêt par rapport à $\{\mathcal{F}_t\}$, en effet

$$\mathbb{P}(\tau_n \leqslant t) = \sum_{k=-\infty}^{2^n} \mathbb{P}\left(\tau_n = s + (t-s)\frac{k}{2^n}\right) = \sum_{k=-\infty}^{2^n} \mathbb{P}\left(s + (t-s)\frac{k-1}{2^n} \leqslant \tau \leqslant s + (t-s)\frac{k}{2^n}\right) \in \mathcal{F}_t.$$

Soit $\{M_p, \mathcal{F}_p\}_{p\in S(n)}$ la martingale prise au temps $p \in S(n)$ qui est une martingale en temps discret. Ainsi $(|M_p|)$ est une sous-martingale. En particulier

$$\mathbb{E}[|M_{t\wedge\tau_n}|] \leqslant \mathbb{E}[|M_t|]$$

où on a utilisé le fait que $t \in S(n)$ par construction. Ainsi par le lemme de Fatou,

$$\mathbb{E}\left[|M_t^\tau|\right] \leqslant \mathbb{E}[|M_{t\wedge\tau}|] = \mathbb{E}\left[\liminf_{n\to\infty} |M_{t\wedge\tau_n}|\right] \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[|M_{t\wedge\tau_n}|] \leqslant \mathbb{E}[|M_t|] < \infty.$$

Il ne nous reste plus qu'à prouver la propriété de martingale. Par le théorème d'arrêt de Doob discret pour $s \in S(n)$,

$$\mathbb{E}[M_{t\wedge\tau_n}|\mathcal{F}_s] = M_{s\wedge\tau_n}.$$

Puisque M est une martingale continue nous avons que $M_{s\wedge\tau_n} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} M_{s\wedge\tau} = M_s^\tau$. Puisque $M_t \in L^1$ nous savons par le Lemme 4.9 qu'il existe une fonction convexe ϕ telle que $\frac{\phi(x)}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$ telle que $\mathbb{E}[\phi(|M_t|)] < \infty$. Par la convexité de ϕ, nous avons que $\{\phi(|M_p|), \mathcal{F}_p\}_{p\in S(n)}$ est une sous-martingale en temps discret et ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}[\phi(|M_{t\wedge\tau_n}|)] \leqslant \mathbb{E}[\phi(|M_t|)] < \infty.$$

Nous voyons donc par le Lemme 4.8, que la famille $\{M_{t\wedge\tau_n}\}$ est une famille uniformément intégrable et ainsi par le Lemme 4.7

$$\mathbb{E}[M_{t\wedge\tau_n}|\mathcal{F}_s] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[M_t^\tau|\mathcal{F}_s].$$

Finalement, on obtient bien la propriété de martingale

$$\mathbb{E}[M_t^\tau|\mathcal{F}_s] = M_s^\tau.$$

□

4.4 Inégalités de Doob et convergence

Nous avons aussi les inégalités de Doob maximales pour les martingales en temps continu. On rappelle la notation

$$M_t^* = \sup_{0\leqslant s\leqslant t} M_s$$

alors le théorème suivant donne l'équivalent des inégalit'es vues dans la Section 2.

Théorème 4.13

Si M est une sous-martingale continue positive et $\lambda > 0$ alors pour tout $p \geqslant 1$,

$$\lambda^p \mathbb{P}\left(M_t^* > \lambda\right) \leqslant \mathbb{E}[M_t^p].$$

De plus si $M_t \in L^p$ pour un $p > 1$ alors

$$\|M_t^*\|_p \leqslant \frac{p}{p-1}\|M_t\|_p.$$

Démonstration. On se ramène encore au cas discret en introduisant

$$D(n,t) = \left\{t_i = \frac{it}{2^n}, 0 \leqslant i \leqslant 2^n\right\}.$$

Par continuité de M_t alors

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t_i \in D(n,T)} M_{t_i} = M_t^* \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{\sup_{t_i\in D(n,t)} M_{t_i} > \lambda} = \mathbb{1}_{M_t^* > \lambda},$$

On a alors l'inégalité de Doob en temps discret

$$\lambda^p \mathbb{P}\left(\sup_{t_i \in D(n,t)} M_t > \lambda\right) \leqslant E[M_t^p]$$

et par le lemme de Fatou nous obtenons

$$\lambda^p \mathbb{P}(M_t^* > \lambda) \leqslant \mathbb{E}[M_t^p].$$

La preuve est similaire pour l'inégalité L^p. □

On a aussi un théorème de convergence pour les martingales continues.

Théorème 4.14

Soit M une martingale continue.

(i) Si pour tout $t \geqslant 0$, $\mathbb{E}[|M_t|^p] \leqslant C < \infty$ pour un $p > 1$ alors il existe une variable aléatoire M_∞ avec $\mathbb{E}[|M_\infty|^p] \leqslant C$ telle que

$$M_t \xrightarrow[t\to\infty]{p.s.,\, L^p} M_\infty$$

(ii) Si pour tout $t \geqslant 0$, $\mathbb{E}[|M_t|] \leqslant B < \infty$ alors il existe une variable aléatoire M_∞ avec $\mathbb{E}[|M_\infty|] \leqslant B$ telle que

$$M_t \xrightarrow[t\to\infty]{p.s.} M_\infty.$$

(iii) Si $\{M_t\}_{t\geqslant 0}$ est uniformément intégrable alors il existe une variable aléatoire $M_\infty \in L^1$ telle que

$$M_t \xrightarrow[t\to\infty]{p.s.,\, L^1} M_\infty$$

Démonstration. Pour (i), on remarque que $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale en temps discret, par le Théorème 2.19, il existe une variable aléatoire M_∞ avec $\mathbb{E}[|M_\infty|^p] \leqslant C$ et telle que

$$M_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.,\, L^p} M_\infty.$$

Alors, on a pour $t \geqslant m$,

$$|M_t - M_\infty| \leqslant |M_t - M_m| + |M_m - M_\infty| \leqslant |M_m - M_\infty| + \sup_{s\geqslant m} |M_s - M_m|.$$

On sait que le premier terme converge vers 0 presque sûrement. Pour le deuxième terme, on observe que $(M_s - M_m)_{s\geqslant m}$ est une martingale continue et ainsi

$$\mathbb{P}\left(\sup_{m\leqslant s\leqslant n} |M_t - M_m| > \lambda\right) \leqslant \frac{1}{\lambda^p}\mathbb{E}[|M_n - M_m|^p].$$

En faisant tendre $n \to \infty$ puis $m \to \infty$, on obtient que

$$\mathbb{P}\left(\lim_{m\to\infty}\sup_{t\geqslant m} |M_t - M_m| > \lambda\right) = 0.$$

Ceci étant vrai pour tout $\lambda > 0$, on obtient que

$$M_t \xrightarrow[t\to\infty]{p.s.} M_\infty.$$

Pour la convegence L^p, nous avons

$$\|M_t - M_\infty\|_p \leqslant \|M_t - M_m\|_p + \|M_m - M_\infty\|_p \leqslant \|M_m - M_\infty\|_p + \sup_{n\geqslant m}\|M_n - M_\infty\|_p \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

où nous avons utilisé le fait que $\{|M_t - M_m|^p\}$ est une sous-martingale et ainsi pour $t \leqslant n$,

$$\mathbb{E}[|M_t - M_m|^p] \leqslant \mathbb{E}|M_n - M_m|^p.$$

Pour (ii), nous allons utiliser un raisonnement de *localisation*. Soit $\tau_n = \inf\{t,\ |M_t| \geqslant n\}$ alors τ_n est un temps d'arrêt. De plus, on sait que M^{τ_n} est une martingale pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque $\mathbb{E}[|M_t^{\tau_n}|] \leqslant n$ nous avons par exemple $\mathbb{E}[(M_t^{\tau_n})^2] \leqslant n^2$ et on peut utiliser (i). Il existe donc M_∞ telle que $M_t^{\tau_n} \xrightarrow[t\to\infty]{p.s.} M_\infty$. Pour tout $\omega \in \{\omega \in \Omega, \tau_n(\omega) = \infty\}$ nous avons $M_t^{\tau_n}(\omega) = M_t(\omega)$ et ainsi $M_t(\omega)$ converge lorsque $t \to \infty$ sauf sur un ensemble de probabilité zéro. Comme $|M|$ est une sous-martingale nous avons pour tout $T > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T} |M_t| \geqslant \lambda\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}[|M_T|]}{\lambda} \leqslant \frac{B}{\lambda}.$$

On peut faire tendre T vers l'infini et obtient donc

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\geqslant 0} |M_t| \geqslant \lambda\right) \leqslant \frac{B}{\lambda}.$$

Ainsi, en prenant $n = \lambda$, on peut calculer

$$\mathbb{P}(\tau_n = \infty) = 1 - \mathbb{P}(\tau_n < \infty) = 1 - \mathbb{P}\left(\sup_{t\geqslant 0}|M_t| \geqslant n\right) \geqslant 1 - \frac{B}{n}.$$

On utilise maintenant la continuité croissante des mesures de probabilit'es pour voir que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\tau_n = \infty\}\right) = \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(\tau_n = \infty) = 1.$$

Ainsi, nous voyons que $M_t \xrightarrow[t\to\infty]{p.s.} M_\infty$. Par le lemme de Fatou, nous avons

$$\mathbb{E}[|M_\infty|] \leqslant \liminf_{t\to\infty}\mathbb{E}[|M_t|] \leqslant C.$$

Pour (iii), nous savons qu'une famille uniformément intégrable est bornée dans L^1 puisque pour tout $t \geqslant 0$,

$$\mathbb{E}[|M_t|] \leqslant \mathbb{E}[|M_t|\mathbb{1}_{|M_t\leqslant x}] + \mathbb{E}[|M_t|\mathbb{1}_{|M_t|\geqslant x}] \leqslant x + \rho(x).$$

Ainsi, par (ii) nous avons convergence presque sûre vers une variable aléatoire M_∞. Par le Lemme 4.6, la convergence presque sûre est aussi une convergence L^1. □

4.5 Mouvement brownien et martingales

Nous n'avons pas encore vu d'exemples de martingales en temps continu. L'exemple le plus important est le mouvement brownien ainsi que certaines transformées du mouvement brownien.

PROPOSITION 4.15. Soit B un mouvement brownien et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors

$$B = \{B_t\}_{t\geqslant 0}, \quad M = \{B_t^2 - t\}_{t\geqslant 0}, \quad \text{et} \quad Z_\alpha = \left\{e^{\alpha B_t - \alpha^2 \frac{t}{2}}\right\}_{t\geqslant 0}$$

sont trois martingales par rapport à $\{\mathcal{F}_t^B\}$.

Démonstration. Pour B, on a clairement que $B_t \in \mathcal{F}_t^B$, de plus

$$\mathbb{E}[|B_t|] = \int_{\mathbb{R}} |x| \frac{e^{-\frac{x^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}} dx = \sqrt{\frac{2t}{\pi}} < \infty.$$

Finalement, pour $s \leqslant t$,

$$\mathbb{E}[B_t|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[B_t - B_s + B_s|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[B_t - B_s] + B_s = B_s.$$

Pour M, nous avons aussi $M_t \in \mathcal{F}_t^B$ et de plus

$$\mathbb{E}[|M_t|] \leqslant E[B_t^2] + t = 2t < \infty.$$

Finalement, pour $s \leqslant t$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[B_t^2 - t|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[(B_t - B_s + B_s)^2|\mathcal{F}_s] - t &= \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2|\mathcal{F}_s] + 2\mathbb{E}[B_s(B_t - B_s)|\mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[B_s^2|\mathcal{F}_s] - t \\ &= \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2] + 2B_s\mathbb{E}[B_t - B_s] + B_s^2 - t = t - s + B_s^2 - t = M_s.\end{aligned}$$

Nous avons la preuve que Z est une martingale en exercice. □

Nous pouvons maintenant utiliser la puissance de la théorie des martingales pour obtenir des résultats sur le mouvement brownien.

PROPOSITION 4.16. Soit $A, B > 0$, on dénote

$$\tau_{A,B} = \min\{t \geqslant 0, B_t = A \text{ ou } B_t = -B\}$$

alors $\mathbb{P}(\tau_{A,B} < \infty) = 1$ et

$$\mathbb{P}(B_{\tau_{A,B}} = A) = \frac{B}{A+B} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[\tau_{A,B}] = AB.$$

Démonstration. L'avantage du mouvement brownien, par rapport à la marche aléatoire simple, est la gaussianité des entrées. Ainsi, on sait que

$$\mathbb{P}(|B_{n+1} - B_n| > A + B) = \mathbb{P}(|\mathcal{N}(0,1)| > A + B) \geqslant \varepsilon > 0.$$

Ainsi, nous avons

$$\mathbb{P}(\tau_{A,B} > n) \leqslant \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n-1} \{|B_{k+1} - B_k| > A + B\}^c\right) \leqslant \prod_{k=0}^{n-1}(1-\varepsilon) = (1-\varepsilon)^n.$$

Ainsi, on voit que $\tau_{A,B} < \infty$ presque sûrement et on a même que $\tau_{A,B}$ a des moments de tout ordre. Maintenant, on voit que $\tau_{A,B}$ est un temps d'arrêt et ainsi $(B_t^{\tau_{A,B}})$ est une martingale et comme $|B_t^{\tau_{A,B}}| \leqslant A + B$, nous pouvons utiliser le théorème de convergence dominée pour voir que

$$0 = \mathbb{E}[B_0] = \mathbb{E}\left[B_t^{\tau_{A,B}}\right] \xrightarrow[t\to\infty]{} \mathbb{E}\left[B_{\tau_{A,B}}\right].$$

Maintenant, nous pouvons calculer cette espérance et voir que

$$\mathbb{E}\left[B_{\tau_{A,B}}\right] = A\mathbb{P}(B_{\tau_{A,B}} = A) - B\mathbb{P}(B_{\tau_{A,B}} = -B) = (A+B)\mathbb{P}(B_{\tau_{A,B}} = A) - B = 0$$

et ainsi

$$\mathbb{P}\left(B_{\tau_{A,B}} = A\right) = \frac{B}{A+B}.$$

Maintenant, on utilise le fait que $M^{\tau_{A,B}}$ est une martingale et

$$|M_t^{\tau_{A,B}}| \leqslant (A+B)^2 - \tau_{A,B}$$

et comme on a vu $\tau_{A,B} \in L^1$, on peut utiliser le théorème de convergence dominée pour voir que

$$0 = \mathbb{E}[M_0] = \mathbb{E}\left[M_t^{\tau_{A,B}}\right] \xrightarrow[t\to\infty]{} \mathbb{E}\left[M_{\tau_{A,B}}\right] = \mathbb{E}[B^2_{\tau_{A,B}}] - \mathbb{E}[\tau_{A,B}].$$

On peut donc calculer

$$\mathbb{E}[\tau_{A,B}] = \mathbb{E}\left[B^2_{\tau_{A,B}}\right] = A^2\frac{B}{A+B} + B^2\frac{A}{B+A} = AB\frac{A+B}{A+B} = AB.$$

□

On peut aussi considérer le temps d'arrêt

$$\tau_A = \inf\{t \geqslant 0, B_t = A\}.$$

Pour la marche aléatoire symétrique, on a vu que $\mathbb{E}[\tau_A] = \infty$. On peut en dire plus pour le mouvement brownien .

THÉORÈME 4.17

Soit $A \in \mathbb{R}$ alors $\mathbb{P}(\tau_A < \infty) = 1$ et pour $\lambda \geqslant 0$,

$$\mathbb{E}\left[e^{-\lambda\tau_A}\right] = e^{-|A|\sqrt{2\lambda}}$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $A \geqslant 0$, alors

$$\mathbb{P}(\tau_A < \infty) \geqslant \mathbb{P}\left(B_{\tau_A \wedge \tau_{-n}} = A\right) = \frac{n}{A+n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Soit $\alpha > 0$, alors on va utiliser la martingale exponentielle $Z_{\alpha,t} = e^{\alpha B_t - \alpha^2 \frac{t}{2}}$. τ_A est un temps d'arrêt et $Z_\alpha^{\tau_A}$ est une martingale et ainsi puisque $Z_{\alpha,t}^{\tau_A} \leqslant e^{\alpha A}$, par le théorème de convergence dominée,

$$1 = \mathbb{E}[Z_{\alpha,0}] = \mathbb{E}\left[Z_{\alpha,t}^{\tau_A}\right] \xrightarrow[t\to\infty]{} \mathbb{E}[Z_{\alpha,\tau_A}]$$

On calcule maintenant l'espérance,

$$\mathbb{E}\left[Z_{\alpha,\tau_A}\right] = \mathbb{E}\left[e^{\alpha B_{\tau_A} - \alpha^2\frac{\tau_A}{2}}\right] = \mathbb{E}\left[e^{\alpha a - \alpha^2\frac{\tau_A}{2}}\right]$$

et finalement en posant $\lambda = \frac{\alpha^2}{2}$,

$$\mathbb{E}\left[e^{-\lambda\tau_A}\right] = e^{-A\sqrt{2\lambda}}.$$

Si $A \leqslant 0$, on réalise la même preuve en prenant $\alpha < 0$. □

On en déduit la distribution de τ_A.

Corollaire 4.18. Soit $A \in \mathbb{R}$, alors

$$\mathbb{E}[\tau_A] = +\infty, \quad \mathbb{E}\left[\frac{1}{\tau_A}\right] = \frac{1}{A^2}.$$

De plus, τ_A a pour densité,

$$f_{\tau_A}(x) = \frac{|A|}{\sqrt{2\pi x^3}} e^{-\frac{a^2}{2x}} \mathbb{1}_{x \geqslant 0}$$

et ainsi

$$\tau_A \overset{(d)}{=} \frac{A^2}{\mathcal{N}(0,1)^2}$$

Démonstration. Pour l'espérance, nous utilisons la définition de la transformée de Laplace,

$$\phi(\lambda) := \mathbb{E}\left[e^{-\lambda \tau_A}\right] = 1 - \lambda \mathbb{E}[\tau_A] + \frac{\lambda^2}{2}\mathbb{E}[\tau_A^2] + \dots$$

ainsi

$$\mathbb{E}[\tau_A] = -\lim_{\lambda \to 0} \phi'(\lambda) = -\lim_{\lambda \to 0} \frac{|A|}{\sqrt{2\lambda}} e^{-|A|\sqrt{2\lambda}} = +\infty.$$

Pour le deuxième résultat, on remarque que $\frac{1}{t} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} d\lambda$. et ainsi

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{\tau_A}\right] = \int_0^\infty \mathbb{E}\left[e^{-x\tau_A}\right] dx = \int_0^\infty e^{-|A|\sqrt{2x}} dx = \frac{1}{A^2}\int_0^\infty u e^{-u} du = \frac{1}{A^2}.$$

Pour le calcul de la densité, cela vient de l'inversion de la transformée de Laplace, nous ne développerons pas le calcul ici. □

4.6 Propriété de Markov forte

La propriété de Markov forte est la généralisation de la loi de Markov simple de la Proposition 3.13 à un temps d'arrêt. On commence par une définition de la tribu du passé avant un temps d'arrêt.

Définition 4.19

Soit τ un temps d'arrêt par rapport à une filtration $\{\mathcal{F}_t\}$. On définit *la tribu du passé avant* τ par

$$\mathcal{F}_\tau = \left\{ A \in \bigcup_{t \geqslant 0} \mathcal{F}_t,\ A \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t \text{ pour tout } t \geqslant 0 \right\}.$$

En particulier, $\mathcal{F}_\tau$ est une tribu et τ est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable.

Lemme 4.20. Si X est une $\mathcal{F}_t$-martingale continue bornée et τ est un $\mathcal{F}_t$-temps d'arrêt alors pour tout $A \in \mathcal{F}_\tau$ et $s \leqslant t$,

$$\mathbb{E}\left[X_\tau \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\tau < s}\right] = \mathbb{E}\left[X_s \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\tau < s}\right] = \mathbb{E}\left[X_t \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\tau < s}\right].$$

De plus si $X_\infty = \lim_{t \to \infty} X_t$ alors $\mathbb{E}\left[X_\infty | \mathcal{F}_\tau\right] = X_\tau$.

Démonstration. On définit

$$S_n = \left\{ s + \frac{k}{2^n},\ k \in \mathbb{Z} \right\} \cap [0, \infty[$$

et ainsi $(X_t)_{t\in S_n}$ est une martingale discrète. Pour tout $A \in \mathcal{F}_\tau$, $A \cap \{\tau < s\} \in \mathcal{F}_s$. Soit $\tau_n = \min\{r \in S_n,\, r \geqslant \tau\}$ alors $A \cap \{\tau_n = r\} \in \mathcal{F}_r$. Ainsi, nous avons

$$\mathbb{E}\left[X_{\tau_n}\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{\tau_n<s}\right] = \sum_{r\in S_n, r<s} \mathbb{E}\left[X_r\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{\tau_n=r}\right] = \sum_{r\in S_n, r<s} \mathbb{E}\left[X_s\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{\tau_n=r}\right] = \mathbb{E}\left[X_s\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{\tau_n<s}\right] = \mathbb{E}\left[X_t\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{\tau_n<s}\right].$$

Pour la deuxième égalité, nous avons utilisé le fait que $(X_t)_{t\in S_n}$ est une martingale discrète et que $s \in S_n$, pour la dernière égalité, nous avons utilisé le fait que $\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{\tau_n<s} \in \mathcal{F}_s$, que $t \geqslant s$ et que X est une martingale.

Maintenant, nous avons $\mathbb{1}_{\tau_n<s} \to \mathbb{1}_{\tau<s}$ presque sûrement et que $X_{\tau_n} \to X_\tau$ presque sûrement. Alors en prenant la limite en n, par le théorème de convergence dominée, nous avons

$$\mathbb{E}\left[X_\tau\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{\tau<s}\right] = \mathbb{E}\left[X_s\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{\tau<s}\right] = \mathbb{E}\left[X_t\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{\tau<s}\right],$$

en prenant $t \to \infty$, nous obtenons

$$\mathbb{E}\left[X_\tau\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{\tau<s}\right] = \mathbb{E}\left[X_\infty\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{\tau<s}\right]$$

puis $s \to \infty$ donne

$$\mathbb{E}\left[X_\tau\mathbb{1}_A\right] = \mathbb{E}\left[X_\infty\mathbb{1}_A\right] \text{ i.e. } \mathbb{E}\left[X_\infty|\mathcal{F}_\tau\right] = \mathbb{E}\left[X_\tau|\mathcal{F}_\tau\right] = X_\tau.$$

□

COROLLAIRE 4.21. Si X est une $\mathcal{F}_t$-martingale continue bornée et si ν et τ sont deux $\mathcal{F}_t$-temps d'arrêt alors $\nu \leqslant \tau \Rightarrow X_\nu = \mathbb{E}\left[X_\tau|\mathcal{F}_\nu\right]$.

Démonstration. La preuve est facile

$$X_\nu = \mathbb{E}\left[X_\infty|\mathcal{F}_\nu\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X_\infty|\mathcal{F}_\tau\right]|\mathcal{F}_\nu\right] = \mathbb{E}\left[X_\tau|\mathcal{F}_\nu\right].$$

□

PROPOSITION 4.22. Si X est une $\mathcal{F}_t$-martingale bornée et τ un $\mathcal{F}_t$-temps d'arrêt alors $(X_{t\wedge\tau})$ est une $\mathcal{F}_{t\wedge\tau}$-martingale.

Démonstration. $X_{t\wedge\tau}$ est $\mathcal{F}_{t\wedge\tau}$-mesurable, $X_{t\wedge\tau} \in L^1$ car bornée. Enfin,

$$\mathbb{E}\left[X_{t\wedge\tau}|\mathcal{F}_{s\wedge\tau}\right] = X_{s\wedge\tau}$$

pour $s \leqslant t$. En effet, si on définit $\sigma = t \wedge \tau$ et $\nu = s \wedge \tau$ alors $\nu \leqslant \sigma$ et nous pouvons utiliser le corollaire ci-dessus. □

Si B est un mouvement brownien, on peut aussi définir la variable aléatoire B_τ par

$$B_\tau(\omega)\mathbb{1}_{\tau<\infty} = \begin{cases} B_{\tau(\omega)}(\omega) & \text{si } \tau(\omega) < \infty, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

PROPOSITION 4.23. Soit B un mouvement brownien et τ un temps d'arrêt par rapport à $\{\mathcal{F}_t^B\}$, alors $B_\tau\mathbb{1}_{\tau<\infty}$ est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_\tau^B$.

Démonstration. On commence par écrire

$$B_\tau\mathbb{1}_{\tau<\infty} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{\infty} B_{\frac{i}{2^n}}\mathbb{1}_{\frac{i}{2^n}\leqslant\tau<\frac{i+1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{\infty} B_{\frac{i}{2^n}}\mathbb{1}_{\tau\geqslant\frac{i}{2^n}}\mathbb{1}_{\tau<\frac{i+1}{2^n}}.$$

Nous avons tout d'abord que $\mathbb{1}_{\tau<\frac{i+1}{2^n}} \in \mathcal{F}_\tau^B$. Pour le deuxième terme, soit A un borélien de $\mathbb{R}$ tel que $0 \notin A$ alors

$$\{B_s \mathbb{1}_{\tau \geqslant s} \in A\} \cap \{\tau \leqslant t\} = \begin{cases} \varnothing & \text{si } t < s \\ \{B_s \in A\} \cap \{s \leqslant \tau \leqslant t\} & \text{si } t \geqslant s. \end{cases}$$

et puisque

$$\{B_s \in A\} \cap \{\tau \leqslant t\} \cap \{\tau \leqslant s\}^c \in \mathcal{F}_t^B$$

nous avons que $B_{\frac{i}{2^n}} \mathbb{1}_{\tau \geqslant \frac{i}{2^n}} \in \mathcal{F}_\tau$. □

Nous sommes maintenat prêt à énoncer la propriété de Markov forte.

Théorème 4.24

Soient B un mouvement brownien et τ un temps d'arrêt par rapport à $\{\mathcal{F}_t^B\}$ tel que $\mathbb{P}(\tau < \infty) > 0$. Pour tout $t \geqslant 0$, on pose

$$B_t^{(\tau)} = (B_{\tau+t} - B_\tau)\mathbb{1}_{\tau > \infty}$$

alors sous la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(\cdot|\tau < \infty)$, $B^{(\tau)}$ est un mouvement brownien standard indépendant de $\mathcal{F}_\tau^B$.

Démonstration. Supposons que $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$. Soit $A \in \mathcal{F}_\tau^B$, $0 \leqslant t_1 < \cdots < t_p$ et $F : \mathbb{R}^p \to R$ continue et bornée. On veut montrer que

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A F\left(B_{t_1}^{(\tau)}, \ldots, B_{t_p}^{(\tau)}\right)\right] = \mathbb{P}(A)\mathbb{E}\left[F\left(B_{t_1}, \ldots, B_{t_p}\right)\right].$$

En effet, pour $A = \Omega$, nous obtenons que $B^{(\tau)}$ est un mouvement brownien standard et pour tout choix de $0 \leqslant t_1 < \cdots < t_p$, $(B_{t_1}^{(\tau)}, \ldots, B_{t_p}^{(\tau)})$ est indépendant de $\mathcal{F}_\tau^B$ et ainsi $B^{(\tau)}$ est indépendant de $\mathcal{F}_\tau^B$. Soit

$$\tau_n = \min\left\{\frac{k}{2^n}, k \in \mathbb{N}, \tau \leqslant \frac{k}{2^n}\right\}$$

alors on voit que

$$F\left(B_{t_1}^{(\tau_n)}, \ldots, B_{t_p}^{(\tau_n)}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} F\left(B_{t_1}^{(\tau)}, \ldots, B_{t_p}^{(\tau)}\right)$$

et par le théorème de convergence dominée car F est bornée,

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A F\left(B_{t_1}^{(\tau_n)}, \ldots, B_{t_p}^{(\tau_n)}\right)\right] \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A F\left(B_{t_1}^{(\tau)}, \ldots, B_{t_p}^{(\tau)}\right)\right].$$

Maintenant, on peut écrire

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A F\left(B_{t_1}^{(\tau_n)}, \ldots, B_{t_p}^{(\tau_n)}\right)\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\frac{k-1}{2^n} < \tau \leqslant \frac{k}{2^n}} F\left(B_{\frac{k}{2^n}+t_1} - B_{\frac{k}{2^n}}, \ldots, B_{\frac{k}{2^n}+t_p} - B_{\frac{k}{2^n}}\right)\right].$$

On remarque que $A \cap \left\{\tau \leqslant \frac{k}{2^n}\right\} \cap \left\{\tau \leqslant \frac{k-1}{2^n}\right\}^c \in \mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}}^B$ et par la propriété de Markov simple, nous pouvons maintenant écrire

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A F\left(B_{t_1}^{(\tau)}, \ldots, B_{t_p}^{(\tau)}\right)\right] &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(A \cap \left\{\frac{k-1}{2^n} < \tau \leqslant \frac{k}{2^n}\right\}\right) \mathbb{E}[F(B_{t_1}, \ldots, B_{t_p})] \\ &= \mathbb{P}(A)\mathbb{E}\left[F\left(B_{t_1}, \ldots, B_{t_p}\right)\right].\end{aligned}$$

□

4.7 Principe d'invariance de Donsker et problème de plongement de Skorokhod

On a vu des similarités entre le mouvement brownien et la amrche aléatoire simple, en particulier avec le temps d'arrêt $\tau_{A,B}$. On peut aussi observer que la marche aléatoire simple est encodée dans le mouvement brownien. En effet, si on considère

$$\tau_1 = \inf\{t \geqslant 0,\, B_t \notin]-1,1[\}$$

alors on sait que

$$\mathbb{P}(B_{\tau_1} = 1) = \mathbb{P}(B_{\tau_1} = -1) = \frac{1}{2}.$$

Si on définit récursivement pour $k \geqslant 2$,

$$\tau_k = \inf\{t \geqslant \tau_{k-1},\, B_t - B_{\tau_{k-1}} \notin]-1,1[\}$$

alors $(B_{\tau_1}, \dots, B_{\tau_n})$ a la même distribution que $(S_1, \dots, S_n)$ avec S la marche aléatoire simple. On peut aussi faire une limite d'échelle de la marche aléatoire simple pour retrouver le mouvement brownien : c'est *le principe d'invariance de Donsker*. On considère $\{X_k\}_{n\in\mathbb{N}}$ une collection de variables aléatoires i.i.d telle que $\mathbb{E}[X_k] = 0$ et $\mathbb{E}[X_k^2] = 1$ et on définit $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. On peut alors interpoler linéairement la marche aléatorie pour obtenir un processus en temps continu

$$S_0 = 0, \quad S(n,t) = S_n + (t-n)X_{n+1}.$$

On rappelle qu'une fonction $F : (\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$ est une fonction continue si pour toute suite de fonctions continues sur $[0,1]$ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Longrightarrow |F(f_n) - F(f)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Théorème 4.25

Soit $F : (\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction continue alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}\left(F\left(\frac{1}{\sqrt{n}} S(n, nt)\right) \leqslant x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(F(B) \leqslant x).$$

Le problème de plongement de Skorokhod est un résultat qui montre que toute variable aléatoire L^2 est encodé dans le mouvement brownien au prix d'un temps d'arrêt. Commençons par un cas facile, si on considère la variable aléatoire

$$\mathbb{P}(X = A) = \frac{B}{A+B} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = -B) = \frac{A}{A+B}$$

alors en définissant

$$\tau_{A,B} = \inf\{t \geqslant 0,\, B_t \notin]-B, A[\}$$

on sait que

$$B_{\tau_{A,B}} \overset{(d))}{=} X$$

et de plus, on a

$$\mathbb{E}[\tau_{A,B}] = AB = A^2 \frac{B}{A+B} + B^2 \frac{A}{A+B} = A^2\mathbb{P}(X = A) + B^2\mathbb{P}(X = -B) = \mathbb{E}[X^2].$$

On peut fénéraliser ce résultat à toute variable aléatoire X centrée de carré intégrable.

Théorème 4.26

Soit X une variable aléatoire telle que $\mathbb{E}[X] = 0$ et $\mathbb{E}[X^2] = \sigma^2 < \infty$ alors il existe un temps d'arrêt τ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(X \leqslant x) = \mathbb{P}(B_\tau \leqslant x) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[\tau] = \sigma^2.$$

Démonstration. Soit μ la distribution de X, on définit deux variables aléatoires I et J telles que

$$\mathbb{P}(I \leqslant s, J \leqslant t) = \frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^{s} \int_0^t (u - v) \mathrm{d}\mu(u) \mathrm{d}\mu(v) \text{ pour } s < 0 \leqslant t$$

avec $\gamma = \int_0^\infty u \mathrm{d}\mu(u) = -\int_{-\infty}^0 v \mathrm{d}\mu(v)$ pour bien définir une probabilité. On définit maintenant le temps d'arrêt

$$\tau_{I,J} = \inf\{t \geqslant 0, B_t \notin]I, J[\}.$$

On calculer maintenant

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_{\tau_{I,J}} \leqslant x) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{B_{\tau_{I,J}} \leqslant x} \middle| I, J\right]\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{I \leqslant x} \frac{J}{J - I} - \mathbb{1}_{J \leqslant x} \frac{I}{J - I}\right] \\
&= \frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^0 \int_0^\infty \mathbb{1}_{s \leqslant x} \frac{t}{t-s}(t-s) \mathrm{d}\mu(t) \mathrm{d}\mu(s) + \frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^0 \int_0^\infty \mathbb{1}_{t \leqslant x} \frac{-s}{t-s}(t-s) \mathrm{d}\mu(t) \mathrm{d}\mu(s) \\
&= \frac{1}{\gamma}\left[\left(\int_0^\infty t \mathrm{d}\mu(t)\right)\left(\int_{-\infty}^0 \mathbb{1}_{s \leqslant x} \mathrm{d}\mu(s)\right) + \left(-\int_{-\infty}^0 s \mathrm{d}\mu(s)\right)\left(\int_0^\infty \mathbb{1}_{t \leqslant x} \mathrm{d}\mu(t)\right)\right] \\
&= \int_{-\infty}^\infty \mathbb{1}_{u \leqslant x} \mathrm{d}\mu(u) = \mathbb{P}(X \leqslant x).
\end{aligned}$$

On peut maintenant calculer l'espérance de $\tau_{I,J}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\tau_{I,J}] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\tau_{I,J} | I, J\right]\right] &= -\mathbb{E}[IJ] \\
&= -\frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^0 \int_0^\infty st(t-s) \mathrm{d}\mu 9t) \mathrm{d}\mu(s) \\
&= \frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^0 \int_0^\infty s^2 t \mathrm{d}\mu(t) \mathrm{d}\mu(s) - \frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^0 \int_0^\infty st^2 \mathrm{d}\mu(t) \mathrm{d}\mu(s) \\
&= \frac{1}{\gamma}\left[\left(\int_0^\infty t \mathrm{d}\mu(t)\right)\left(\int_{-\infty}^0 s^2 \mathrm{d}\mu(s)\right) + \left(\int_{-\infty}^0 -s \mathrm{d}\mu(s)\right)\left(\int_0^\infty t^2 \mathrm{d}\mu(t)\right)\right] \\
&= \int_{-\infty}^\infty s^2 \mathrm{d}\mu(s) = \mathbb{E}[X^2] = \sigma^2.
\end{aligned}$$

□

4.8 Exercices

Exercice 11. Soient $\{B_t\}$ un mouvement brownien standard et $\alpha > 0$.

1. Prouver que $X_t^{(\alpha)} = \exp\left(\alpha B_t - \frac{\alpha^2 t}{2}\right)$ est une martingale.
2. Utiliser $X_t^{(\alpha)}$ pour calculer $\phi(\lambda) = \mathbb{E}[\exp(-\lambda\tau)]$ où $\tau = \inf\{t \geqslant 0, B_t = A \text{ ou } B_t = -A\}$.
3. En déduire $\mathbb{E}[\tau^2]$.

Exercice 12.

1. Soit $\{M_t\}$ une martingale positive, montrer que pour $s < t$, on a

$$\{\omega \in \Omega, M_s(\omega) = 0\} \subset \{\omega \in \Omega, M_t(\omega) = 0\}.$$

2. Soit $\{M_t\}$ une martingale continue.
   a. Montrer que si $\tau = \inf\{t \geqslant 0, M_t = 0\}$ alors $M_{\tau(\omega)}(\omega) = 0$ pour tout $\omega \in \{\omega, \tau(\omega) < +\infty\}$.
   b. Montrer que si $M_T > 0$ presque sûrement alors $\mathbb{P}(M_t > 0 \text{ pour tout } t \leqslant T) = 1$
   Indication : Essayer de prouver que $P(\tau \leqslant T) = 1$ *en utilisant le théorème d'arrêt.*
   c. $(\star)$ Construisez un processus continu tel que $\mathbb{P}(X_t > 0) = 1 \ \forall t \leqslant T$ mais $\mathbb{P}(X_t > 0 \text{ pour tout } t \leqslant T) = 0$.

Exercice 13.

1. Soit $\{M_t\}$ une martingale continue positive telle que $\lim_{t\to\infty} M_t = 0$ et $M_0 = 1$.

Pour $x > 1$, soit $\tau_x = \inf\{t,\, M_t \geqslant x\}$. Montrer que

$$\lim_{t\to\infty} M_{t\wedge\tau_x} = x\mathbb{1}_{\tau_x<\infty}.$$

2. En déduire $\mathbb{P}(\tau_x < \infty)$.
3. Soit $M^* = \sup_{t\geqslant 0} M_t$. Calculer $\mathbb{P}(M^* \geqslant x)$.
4. Soient B un mouvement brownien standard et $\theta > 0$. On définit $X_t = B_t - \theta t$. Montrer que $M_t = \exp(2\theta B_t - 2\theta^2 t)$ est une martingale et montrer que $X^* = \sup_{t\geqslant 0} X_t$ est presque surement finie et suit une loi exponentielle de paramètre 2θ.

EXERCICE 14. Soit U_t un pont brownien définit dans la Feuille II.

1. En utilisant l'exercice 5 de la feuille précédente, montrer qu'il existe un mouvement brownien B tel que pour $0 \leqslant t \leqslant 1$,
$$U_t = (1-t)B_{\frac{t}{1-t}}.$$
2. Montrer que pour tout $a > 0$,
$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant 1} U_t > a\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{s>0}(B_s - as) > a\right)$$
3. Utiliser l'exercice précédent pour trouver la fonction de répartition et la densité de $\sup_{0\leqslant t\leqslant 1} U_t$.

EXERCICE 15. Soit B un mouvement brownien standard.

1. Montrer que $X_t = B_t^3 - 3tB_t$ est une martingale
2. Soient $a, b > 0$ et $\tau = \inf\{t \geqslant 0,\, B_t \notin (-B, A)\}$. Calculer la covariance $\mathrm{Cov}(\tau, B_\tau)$.

5. TRAJECTOIRES DU MOUVEMENT BROWNIEN

5.1 Loi du logarithme itéré

La loi du logarithme itéré décrit le comportement des trajectoires du mouvement brownien en 0 et en l'infini. C'est aussi un autre lien que ce processus a avec la marche aléatoire simple.

THÉORÈME 5.1

Si B est un mouvement brownien standard alors

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{t\to 0^+} \frac{B_t}{\sqrt{2t\log\log\frac{1}{t}}} = 1\right) = 1.$$

Avant de prouver ce théorème, nous allons voir un corollaire qui nous donne la lim inf ainsi que les limites en $+\infty$.

COROLLAIRE 5.2. Si B est un mouvement brownien standard alors

$$\mathbb{P}\left(\liminf_{t\to 0^+} \frac{B_t}{\sqrt{2t\log\log\frac{1}{t}}} = -1\right) = 1$$

De plus, on a aussi

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{t\to+\infty}\frac{B_t}{\sqrt{2t\log\log t}}=1\right)=1,\quad \mathbb{P}\left(\liminf_{t\to+\infty}\frac{B_t}{\sqrt{2t\log\log t}}=-1\right)=1$$

Démonstration. La première limite vient du fait $B \overset{(d)}{=} -B$. Les deux autres viennent du fait que $(tB_{\frac{1}{t}})_{t\geqslant 0}$ est aussi un mouvement brownien standard par la Proposition 3.14. □

On remarque que la définition de la lim sup ou la lim inf, pour tout ε, il existe deux suites $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $t_n, s_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ telles que

$$B_{t_n}\geqslant(1-\varepsilon)\sqrt{2t_n\log\log t_n},\quad B_{s_n}\leqslant-(1-\varepsilon)\sqrt{2s_n\log\log s_n}.$$

De plus, il existe $t_0\geqslant 0$ tel que pour tout $t\geqslant t_0$,

$$|B_t|\leqslant(1+\varepsilon)\sqrt{2t\log\log t}.$$

Pour la limite en zéro, on en déduit qu'il existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u_n, v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0^+$ telles que

$$B_{u_n}<0<B_{v_n}.$$

On observe donc que le mouvement brownien est oscillatoire tant autour de zéro qu'au voisinage de l'infini. Avant de prouver Théorème 5.1, nous allons voir deux lemmes qui nous seront utiles lors de la preuve.

Lemme 5.3. Soit $x>0$ alors

$$\frac{1}{x+\frac{1}{x}}e^{-\frac{x^2}{2}}\leqslant\int_x^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}dy\leqslant\frac{1}{x}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Démonstration. On observe que

$$\int_x^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}dy\leqslant\int_x^{+\infty}\frac{y}{x}e^{-\frac{y^2}{2}}dy=\frac{1}{x}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Pour l'autre inégalité, on remarque que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}e^{-\frac{x^2}{2}}\right)=-\left(1+\frac{1}{x^2}\right)e^{-\frac{x^2}{2}},$$

et ainsi

$$\frac{1}{x}e^{-\frac{x^2}{2}}=\int_x^{+\infty}\left(1+\frac{1}{y^2}\right)e^{-\frac{y^2}{2}}dy\leqslant\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\int_x^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}dy.$$

On obtient l'inégalité en divisant par $\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$. □

Lemme 5.4. Soit B un mouvement brownien standard et $T>0$ alors

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}B_t>x\right)\leqslant 2\mathbb{P}(B_T>x).$$

Démonstration. Soit $t_0<t_1<\cdots<t_n=T$ et $\tau_x=\inf\{t_j, B_{t_j}>x\}$. On remarque que si $B_T>x$ alors $\tau_x\leqslant t_n=T$ ainsi

$$\mathbb{P}(B_T>x)=\mathbb{P}(\tau_x\leqslant T,\, B_T>x)=\sum_{j=0}^{n}\mathbb{P}(\tau_x=t_j,\, B_T>x)\geqslant\sum_{j=0}^{n}\mathbb{P}(\tau_x=t_j,\, B_T-B_{t_j}\geqslant 0).$$

Maintenant, puisque $\{\tau_x = t_j\} = \{B_{t_1} \leqslant x, \dots, B_{t_{j-1}} \leqslant x, B_{t_j} > x\} \in \mathcal{F}^{B}_{t_j}$, cet événement est indépendant de $\{B_T - B_{t_j} \geqslant 0\}$ et on a

$$\mathbb{P}(B_T - B_{t_j} \geqslant 0) = \mathbb{P}\left(\mathcal{N}(0, T - t_j) \geqslant 0\right) = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, nous avons

$$\mathbb{P}(B_T > x) \geqslant \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(\tau_x = t_j)\mathbb{P}(B_t - B_{t_j} \geqslant 0) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(\tau_x \leqslant T) = \frac{1}{2}\mathbb{P}\left(\sup_{t_1,\dots t_n} B_t > x\right).$$

On peut maintenant considérer une suite d'ensembles finies $I_n \subset [0, T]$ telle que $I_n \subset I_{n+1}$ et $\lim_{n\to\infty} I_n = [0, T] \cap \mathbb{Q}$ et on a alors

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T, t\in\mathbb{Q}} B_t > x\right) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\left(\sup_{t\in I_n} B_t > x\right) \leqslant 2\mathbb{P}(B_T > x).$$

On finit par la continuité presque sûre du mouvement brownien pour dire que

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T, t\in\mathbb{Q}} B_t > x\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T} B_t > x\right).$$

□

Nous pouvons maintenant prouver la Théorème 5.1 qui consiste en appliquant les lemmes de Borel–Cantelli correctement.

Démonstration du Théorème 5.1. Nous allons commencer par prouver que

$$\limsup_{t\to)^+} \frac{B_t}{2t \log\log \frac{1}{t}} \leqslant 1 \text{ presque sûrement.}$$

Pour simplifier les notations nous dénotons $\phi(t) = \sqrt{2t \log\log \frac{1}{t}}$. Soit $(t_n)_n$ une suite décroissante vers 0 et $\delta > 0$ ainsi que

$$A_n = \{B_t > (1+\delta)\phi(t) \text{ pour un } t \in [t_n, t_{n+1}])\}.$$

Nous voulons montrer que A_n ne se réalise qu'un nombre fini de fois, c'est à dire que

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) := \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geqslant 1}\bigcup_{k\geqslant n} A_k\right) = 0.$$

Par Borel-Cantelli, nous savons que

$$\text{Si} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty \text{ alors } \mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0.$$

Tout d'abord puisque ϕ est croissante alors

$$A_n \subset \left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant t_n} B_t > (1+\delta)\phi(t_{n+1})\right\}$$

d'où

$$\mathbb{P}(A_n) \leqslant \mathbb{P}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant t_n} B_t > (1+\delta)\phi(t_{n+1})\right) \leqslant 2\mathbb{P}(B_{t_n} > (1+\delta)\phi(t_{n+1})) \leqslant 2\mathbb{P}\left(\frac{B_{t_n}}{\sqrt{t_n}} > (1+\delta)\frac{\phi(t_{n+1})}{\sqrt{t_n}}\right).$$

Puisque $\frac{B_{t_n}}{\sqrt{t_n}}$ est une variable gaussienne centrée réduite, nous pouvons calculer cette probabilité et ainsi, en posant $x_n = (1+\delta)\frac{\phi(t_{n+1})}{\sqrt{t_n}}$, nous avons

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}_n) \leqslant 2\int_{x_n}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{x_n}\mathrm{e}^{\frac{-x_n^2}{2}}.$$

Soit $q \in]0,1[$, nous posons alors $t_n = q^n$ et nous choisissons q tel que $\lambda := q(1+\delta)^2 > 1$, alors

$$x_n = (1+\delta)\sqrt{2\frac{t_{n+1}}{t_n}\log\log\frac{1}{t_{n+1}}} = \sqrt{q}(1+\delta)\sqrt{2\log\log\frac{1}{q^{n+1}}} = \sqrt{2\lambda\log((n+1)\log\frac{1}{q}}).$$

Alors cela nous donne

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}_n) \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{e}^{-\lambda\log((n+1)\log\frac{1}{q}})} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{(\log(\frac{1}{q})^{\lambda}}\cdot\frac{1}{(n+1)^{\lambda}}$$

qui est le terme général d'une série convergence car q est choisi tel que $\lambda > 1$. Ainsi par le lemme de Borel–Cantellii nous avons prouvé l'inégalité voulue.

Nous allons maintenant prouver que

$$\limsup_{t\to 0^+} \frac{\mathrm{B}_t}{\sqrt{2t\log\log\frac{1}{t}}} \geqslant 1 \text{ presque sûrement.}$$

De manière similaire, nous allons introduire (t_n) une suite décroissante vers 0, $\delta > 0$, et utiliser le lemme de Borel–Cantelli pour prouver que

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{B}_{t_n} > (1-\delta)\phi(t_n) \text{ infiniment de fois}\right) = 1.$$

Soient $t_n = q^n$ avec $q \in]0,1[$ et $\mathrm{Z}_n = \mathrm{B}_{t_n} - \mathrm{B}_{t_{n-1}}$ alors nous avons que pour $x > 1$,

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{Z}_n > x\sqrt{t_n - t_{n+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{x+\frac{1}{x}}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \geqslant \frac{1}{2\sqrt{2\pi}x}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{2}$$

On veut donc poser pour $\varepsilon \in]0,1[$,

$$x = \frac{(1-\varepsilon)\phi(t_n)}{\sqrt{t_n - t_{n=1}}} = (1-\varepsilon)\sqrt{\frac{2q^n\log\log\frac{1}{q^n}}{q^n(1-q)}} = (1-\varepsilon)\sqrt{\frac{2}{1-q}}\sqrt{\log(n\log\frac{1}{q}}) = \beta\sqrt{\log(n\alpha)}$$

où nous avons posé $\beta = (1-\varepsilon)\sqrt{\frac{2}{1-q}}$ et $\alpha = \log\frac{1}{q}$. On remarque aussi que si $q < 1$ alors $x \to \infty$ lorsque $n \to \infty$ et ainsi $x > 1$ pour n assez grand. Si on injecte cet x dans (2), nous obtenons

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{Z}_n > (1-\varepsilon)\phi(t_n)\right) \geqslant \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\beta\log(n\alpha)}\mathrm{e}^{-\frac{\beta^2}{2}\log(n\alpha)} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\beta\log(n\alpha)(n\alpha)^{\frac{\beta^2}{2}}}.$$

On note que le terme de droite est le terme général d'une suite divergente lorsque $\frac{\beta^2}{2} < 1$ ou $\beta^2 < 2$ ce qui correspond à $q < \varepsilon(2-\varepsilon)$. Ainsi nous choisissons pour l'instant $q < \min(1, \varepsilon(2-\varepsilon))$.

Par définition du mouvement brownien, nous savons que la suite $\{\mathrm{Z}_n\}_n$ est une suite de variables aléatoires indépendantes ainsi par le lemme de Borel–Cantelli, nous avons que

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{Z}_n > (1-\varepsilon)\phi(t_n) \text{ infiniment de fois }\right) = 1.$$

Pour retrouver une borne sur le mouvement brownien, nous remarquons d'abord que

$$\mathrm{B}_{t_n} = \mathrm{Z}_n + \mathrm{B}_{t_{n+1}},$$

ensuite comme $B \overset{(d)}{=} -B$, nous avons que

$$B_{t_{n+1}} \geqslant -(1+\varepsilon)\phi(t_{n+1})$$

une infinité de fois presque sûrement par la première partie de la preuve. Ainsi

$$B_{t_n} \geqslant (1-\varepsilon)\phi(t_n) - (1+\varepsilon)\phi(t_{n+1}) = \phi(t_n)\left(1 - \varepsilon - (1+\varepsilon)\frac{\phi(t_{n+1})}{\phi(t_n)}\right)$$

une infinité de fois presque sûrement. Nous avons que

$$\frac{\phi(t_{n+1})}{\phi(t_n)} = \sqrt{\frac{2q^{n+1}\log((n+1)\log\frac{1}{q})}{2q^n\log(n\log\frac{1}{q})}} \sim_{n\to\infty} \sqrt{q}$$

et ainsi ce ratio est plus petit que $2\sqrt{q}$ pour n assez grand. Ainsi si l'on choisit

$$\varepsilon = \frac{\delta}{2} \text{ et } q \leqslant \min\left(1, \varepsilon(2-\varepsilon), \frac{\delta^2}{(4+2\delta)^2}\right) = \frac{\delta^2}{(4+2\delta)^2}$$

nous avons que

$$\mathbb{P}\left(B_{t_n} \geqslant (1-\delta)\phi(t_n) \text{infiniment souvent}\right) = 1.$$

□

La loi du logarithme itéré est importante car elle permet de comprendre le comportement asymptotique du mouvement brownien tant en 0 qu'en l'infini. Nous voyons ici un corollaire

COROLLAIRE 5.5. Soit B un mouvement brownien standard et $\varepsilon > 0$ alors

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\leqslant s\leqslant\varepsilon} B_s > 0, \inf_{0\leqslant s\leqslant\varepsilon} B_s < 0\right) = 1$$

Démonstration. Par la loi du logarithme itéré on sait qu'il existe une suite $(t_n)_n$ tendant vers 0^+ telle que

$$B_{t_n} \geqslant (1-\varepsilon)\sqrt{2t_n \log\log\frac{1}{t_n}}$$

presque sûrement et ainsi

$$\sup_{0\leqslant s\leqslant\varepsilon} B_s > 0 \text{ presque sûrement.}$$

Par le Corollaire 5.2 nous savons qu'il existe une suite (s_n) tendant vers 0^+ telle que

$$B_{s_n} \leqslant -(1-\varepsilon)\sqrt{2s_n \log\log\frac{1}{s_n}}.$$

presque sûrement et ainsi

$$\inf_{0\leqslant s\leqslant\varepsilon} B_s < 0 \text{ presque sûrement.}$$

□

De ce corollaire, on peut obtenir plus d'informations sur l'ensemble des zéros du mouvement brownien.

PROPOSITION 5.6. Soient B un mouvement brownien standard et $\mathcal{Z} = \{t \in [0,1], B_t = 0\}$ alors $\mathcal{Z}$ est presque sûrement un sous-ensemble compact sans point isolé et de mesure de Lebesgue nulle de l'intervalle $[0,1]$.

Démonstration. Premièrement puisque B est une fonction continue presque sûrement alors $\mathcal{Z} = \mathrm{B}^{-1}(\{0\})$ est une fermé presque sûrement et donc un compact car borné. Soit μ la mesure de Lebesgue alors

$$\mathbb{E}[\mu(\mathcal{Z})] = \int_\Omega \int_0^1 \mathbb{1}_{s\in\mathcal{Z}(\omega)} \mathrm{d}s\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \int_0^1 \int_\Omega \mathbb{1}_{s\in\mathcal{Z}(\omega)} \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)\mathrm{d}s = \int_0^1 \mathbb{P}(s\in\mathcal{Z})\mathrm{d}s = \int_0^1 \mathbb{P}(\mathrm{B}_s = 0)\mathrm{d}s = 0.$$

Ainsi $\mu(\mathcal{Z})$ est une variable aléatoire positive et d'espérance nulle et donc $\mu(\mathcal{Z}) = 0$ presque sûrement. Il ne nous reste plus qu'à prouver l'absence de points isolés. Soit $\mathrm{T} \in \mathcal{Z}$ alors nous voulons prouver que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\mathrm{S} \in \mathcal{Z}$ tel que $|\mathrm{T} - \mathrm{S}| \leqslant \varepsilon$.

Pour tout $q \in \mathbb{Q} \cap [0,1[$, nous définissons le temps d'arrêt $\mathrm{T}_q = \inf\{t \geqslant q, \mathrm{B}_t = 0\}$ alors nous avons que $\mathrm{T}_q \in \mathcal{Z}$ et de plus par la propriété de Markov forte $\mathrm{B}^{(\mathrm{T}_q)} = (\mathrm{B}_{\mathrm{T}_q+s} - \mathrm{B}_{\mathrm{T}_q})_{s\geqslant 0}$ est un mouvement brownien standard ainsi nous savons que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\forall\varepsilon \in \mathbb{Q}\cap]0,1-q[, \sup_{0\leqslant s\leqslant\varepsilon} \mathrm{B}_s^{(\mathrm{T}_q)} > 0, \inf_{0\leqslant s\leqslant\varepsilon} \mathrm{B}_s^{(\mathrm{T}_q)} < 0\right)\\ = \mathbb{P}\left(\bigcap_{q\in\mathbb{Q}\cap]0,1[}\ \bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{Q}\cap]0,1-q[}\ \sup_{0\leqslant s\leqslant\varepsilon} \mathrm{B}_s > 0, \inf_{0\leqslant s\leqslant\varepsilon} \mathrm{B}_s < 0\right) = 1\end{aligned}$$

par notre corollaire du logarithme itéré. Cela veut donc dire que pour tout $q \in \mathbb{Q}\cap]0,1[$ et pour tout $\varepsilon \in \mathbb{Q}\cap]0,1-q[$, il existe un S_q tel que $\mathrm{T}_q \leqslant \mathrm{S}_q \leqslant \mathrm{T}_q + \varepsilon$ et $\mathrm{S}_q \in \mathcal{Z}$. Donc aucun T_q ne sont des points isolés. Pour finir, soit $\mathrm{T} \in \mathcal{Z}$ et soit une suite de rationnels $q_n(\omega) \uparrow \mathrm{T}(\omega)$ lorsque $n \to \infty$. Alors par définition, nous avons que $q_n(\omega) \leqslant \mathrm{T}_{q_n(\omega)} < \mathrm{T}(\omega)$ et donc $\mathrm{T}_{q_n}(\omega) \in \mathcal{Z}$ tend vers $\mathrm{T}(\omega)$ et T n'est pas un point isolé. □

⚠ Dans notre raisonnement nous avons utilisé comme acquis le fait que $(\omega, s) \mapsto \mathbb{1}_{s\in\mathcal{Z}(\omega)} = \mathbb{1}_{\mathrm{B}_s(\omega)=0}$ est une fonction mesurable pour la tribu $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}([0,1])$ ce qui n'est pas totalement évident. Dénotons f cette fonction, il suffit de montrer que $f^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}([0,1])$ alors nous pouvons écrire

$$f^{-1}(\{0\}) = \{\omega \in \Omega, t \in [0,1], \mathrm{B}_s(\omega) \neq 0\} = \bigcap_{q<r\in\mathbb{Q}\cap]0,1[} \{\omega \in \Omega, \forall t \in]q,r[, |\mathrm{B}_t| \neq 0\} \times]q,r[$$

Maintenant nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\{\omega \in \Omega, \forall t \in]q,r[, |\mathrm{B}_t(\omega)| \neq 0\} &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left\{\omega \in \Omega, \forall t \in \left[q + \frac{1}{n}, r - \frac{1}{n}\right], |\mathrm{B}_t(\omega)| \neq 0\right\}\\ &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{p\in\mathbb{Q}} \left\{\omega \in \Omega, \forall t \in \left[q + \frac{1}{n}, r - \frac{1}{n}\right], |\mathrm{B}_t(\omega)| \geqslant \frac{1}{p}\right\}.\end{aligned}$$

Nous pouvons utiliser la continuité du mouvement brownien pour aussi écrire

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{p\in\mathbb{Q}} \left\{\omega \in \Omega, \forall t \in \left[q + \frac{1}{n}, r - \frac{1}{n}\right], |\mathrm{B}_t(\omega)| \geqslant \frac{1}{p}\right\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{p\in\mathbb{Q}} \bigcap_{t\in[q+\frac{1}{n}, r-\frac{1}{n}]\cap\mathbb{Q}} \left\{\omega \in \Omega, |\mathrm{B}_t| \geqslant \frac{1}{p}\right\} \in \mathcal{F}$$

5.2 Régularité des trajectoires

On rappelle que nous avons construit notre mouvement brownien comme $\mathrm{B}_t = \sum_{n=0}^\infty \Delta_n(t)\mathrm{Z}_n$ avec Z_n une suite de variables $\mathcal{N}(0,1)$ et $\Delta_n(t)$ construites à partir des fonctions de Schauder comme dans (1). On remarque que tout fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ peut aussi s'écrire $f(t) = \sum_{n=0}^\infty c_n\Delta_n(t)$ et la vitesse de décroissance des coefficients nous donne de l'information sur la régularité de f. En particulier nous avons le théorème suivant.

Théorème 5.7

Soit $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Delta_n(t)$ alors si les coefficients $c_n(f)$ ont la propriété qu'il existe un $\alpha \in]0,1[$ tel que pour tout $n = 2^j + k$ avec $0 \leqslant k < 2^j$ et $j \geqslant 0$,

$$|c_n(f)| \leqslant 2^{(\frac{1}{2}-\alpha)j}$$

alors $f \in \mathcal{C}^\alpha([0,1])$ i.e. f est α-Hölderienne : il existe un $C > 0$ tel que pour tout $t, s \in [0,1]$,

$$|f(t) - f(s)| \leqslant C|t-s|^\alpha.$$

Démonstration. Sans perte de généralité, supposons que $c_0 = 0$. On commence par écrire

$$f(t) - f(s) = \sum_{j=0}^{\infty} D_j(s,t) := \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=2^j}^{2^{j+1}-1} c_n(\Delta_n(t) - \Delta_n(s)).$$

On remarque tout d'abord par observer que par définition de Δ_n, il existe au plus un $2^j \leqslant n \leqslant 2^{j+1} - 1$ tel que $\Delta_n(u) \neq 0$, la somme sur n est en fait un seul terme. Ensuite, nous pouvons borner $\Delta_n(t) \leqslant 2^{-\frac{j}{2}-1}$ par définition de Δ_n et ainsi nous obtenons

$$|D_j(s,t)| \leqslant 2^{(\frac{1}{2}-\alpha)j} \cdot 2^{-\frac{j}{2}-1} = 2^{-\alpha j - 1}.$$

Ensuite, nous pouvons aussi voir que comme Δ_n est une fonction affine par morceaux de pente plus petite que 2^{j+1} nous pouvons donc aussi borner

$$|D_j(s,t)| \leqslant 2^{(\frac{1}{2}-\alpha)j} \cdot 2^{-\frac{j}{2}-1} \cdot 2^{j+1}|s-t| = 2^{-\alpha j + j}|s-t|.$$

De là nous allons séparer la somme à un certain niveau que nous choisirons plus tard,

$$|f(t) - f(s)| \leqslant \sum_{0 \leqslant j \leqslant j_0} 2^{-\alpha j} 2^j |s-t| + \sum_{j > j_0} 2^{-\alpha j - 1} = |s-t| \frac{2^{(1-\alpha)(j_0+1)} - 1}{2^{(1-\alpha)} - 1} + \frac{2^{-\alpha(j_0+1)}}{2(1-2^{-\alpha})}$$

où nous avons utilisé nos deux bornes différentes dans les différentes parties de la somme. Nous pouvons maintenant choisir notre $j_0(s,t)$ tel que $2^{-(j_0+1)} \leqslant |s-t| \leqslant 2^{-j_0}$ alors

$$|f(t) - f(s)| \leqslant \frac{2}{2^{1-\alpha} - 1}|s-t|^{1-1+\alpha} - \frac{1}{2^{1-\alpha} - 1}|s-t| + \frac{1}{2(1-2^{-\alpha})}|s-t|^\alpha.$$

En utilisant le fait que le deuxième terme est simplement négatif, nous avons

$$|f(t) - f(s)| \leqslant \max\left(\frac{2}{2^{1-\alpha} - 1}, \frac{1}{2(1-2^{-\alpha})}\right)|s-t|^\alpha.$$

□

De ce théorème, nous pouvons en déduire facilement une forme de régularité du mouvement brownien.

Corollaire 5.8. Pour tout $0 \leqslant \alpha < \frac{1}{2}$, les trajectoires du mouvement brownien standard sont α-Hölderiennes presque sûrement.

Démonstration. On sait qu'il existe un $C > 0$ et fini presque sûrement tel que pour tout $n \geqslant 2$, $|Z_n| \leqslant C\sqrt{\log n}$. En écrivant $n = 2^j + k$, nous avons donc

$$|Z_n| \leqslant C\sqrt{\log(2^j + k)} \leqslant C\sqrt{j+1} \leqslant C2^{(\frac{1}{2}-\alpha)j}$$

pour tout $\alpha \in [0, \frac{1}{2}[$. □

Le corollaire ne nous donne pas plus d'informations notamment sur ce qu'il se passe pour $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$. Nous allons commencer par résoudre le cas $\alpha > \frac{1}{2}$.

Théorème 5.9
Soit $G(\alpha, c, \varepsilon)$ l'ensemble

$$\{\omega \in \Omega,\ \exists s \in [0,1],\ \forall t \in \mathbb{R}_+ \text{ avec } 0 < |s-t| \leqslant \varepsilon \text{ nous avons } |B_s(\omega) - B_t(\omega)| \leqslant c|t-s|^\alpha\}.$$

Pour $\alpha > \frac{1}{2}$, nous avons $\mathbb{P}(G(\alpha, c, \varepsilon)) = 0$ pour tout $c \in \mathbb{R}_+$ et $\varepsilon > 0$.

Avant de prouver le théorème, nous pouvons en déduire un corollaire important sur les trajectoires du mouvement brownien.

Corollaire 5.10. Les trajectoires du mouvement brownien standard ne sont différentiables nulle part presque sûrement.

Démonstration. Si on utilise Théorème 5.9 pour $\alpha = 1$, nous obtenons que pour tout $c \in \mathbb{R}_+$ et tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(G(1, c, \varepsilon)) = 0$. En particulier, pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout $k \geqslant 1$, $\mathbb{P}(G(1, n, \frac{1}{k})) = 0$ et ainsi

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} G\left(1, n, \frac{1}{k}\right)\right) = 0.$$

Mais cela veut dire que

$$\mathbb{P}\left(\exists n \geqslant 1, \exists k \geqslant 1, \exists s \in [0,1], \forall t \in [0,1], 0 < |t-s| \leqslant \frac{1}{k}, |B_t - B_s| \leqslant n|t-s|\right) = 0.$$

En passant au complémentaire, on voit donc que

$$\mathbb{P}\left(\forall n \geqslant 1, \forall k \geqslant 1, \forall s \in [0,1], \exists t \in \mathbb{R}_+, 0 < |t-s| \leqslant \frac{1}{k} \text{ et } \left|\frac{B_t - B_s}{t-s}\right| \geqslant n\right) = 1.$$

Ainsi pour presque tout $\omega \in \Omega$, $t \mapsto B_t(\omega)$ n'est différentiable nulle part. □

Nous pouvons maintenant développer la démonstration du Théorème 5.9.

Démonstration du Théorème 5.9. Soit $m \geqslant 1$ un paramètre et $n \geqslant 1$ que l'on fera tendre vers l'infini plus tard. Pour $k \in \{0, \dots, n-m\}$, on dénote

$$X_{(n,k)} = \max\left\{\left|B_{\frac{j}{n}} - B_{\frac{j+1}{n}}\right|, j \in \{k, \dots, k+m-1\}\right\}.$$

On remarque en particulier que $X_{(n,k)}$ est un maximum de m incréments indépendants.

Par définition de $G(\alpha, c, \varepsilon)$, sur cet ensemble, il existe $s \in [0,1]$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ avec $|t-s| \leqslant \varepsilon$ nous donne $|B_s(\omega) - B_t(\omega)| \leqslant c|t-s|^\alpha$. Ainsi, il existe un $k \in \{0, \dots, n-m\}$ tel que $s \in \bigcup_{j=k}^{k+m-1} \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]$. On note aussi que pour tout $j \in \{k, \dots, k+m-1\}$ alors

$$\left|\frac{j}{n} - s\right|, \left|\frac{j+1}{n} - s\right| \leqslant \frac{m}{n} \leqslant \varepsilon$$

en prenant n assez grand. On remarque ainsi que pour tout $j \in \{k, \dots, k+m-1\}$,

$$\left|B_{\frac{j}{n}} - B_{\frac{j+1}{n}}\right| \leqslant \left|B_{\frac{j}{n}} - B_s\right| + \left|B_s - B_{\frac{j+1}{n}}\right| \leqslant 2c\left(\frac{m}{n}\right)^\alpha.$$

On peut réécrire ce raisonnement comme l'inclusion

$$G(\alpha,c,\varepsilon) \subset \left\{\omega \in \Omega, \min_{k\in\{0,\ldots,n-m\}} X_{(n,k)}(\omega) \leqslant 2c\left(\frac{m}{n}\right)^{\alpha}\right\}$$

Pour un n fixé, on note que les $X_{(n,k)}$ sont identiquement distribués comme le maximum de m variables gaussiennes centrées de variance $\frac{1}{n}$. Ainsi

$$\mathbb{P}\left(\min_{k\in\{0,n-m\}} X_{(n,k)} \leqslant 2c\left(\frac{m}{n}\right)^{\alpha}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n-m}\left\{X_{(n,k)} \leqslant 2c\left(\frac{m}{n}\right)^{\alpha}\right\}\right) \leqslant (n-m+1)\mathbb{P}\left(X_{(n,1)} \leqslant 2c\left(\frac{m}{n}\right)^{\alpha}\right)$$

et donc

$$\mathbb{P}(G(\alpha,c,\varepsilon)) \leqslant n\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{m}\left\{\left|B_{\frac{j}{n}} - B_{\frac{j+1}{n}}\right| \leqslant 2c\left(\frac{m}{n}\right)^{\alpha}\right\}\right) = n\mathbb{P}\left(\left|B_{\frac{1}{n}}\right| \leqslant 2c\left(\frac{m}{n}\right)^{\alpha}\right)^{m}.$$

En utilisant le fait que $B_{\frac{1}{n}} \overset{(d))}{=} \frac{Z}{\sqrt{n}}$ avec $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ et que

$$\mathbb{P}(|Z| \leqslant x) = \int_{-x}^{x} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx \leqslant \frac{2x}{\sqrt{2\pi}},$$

Nous obtenons finalement que

$$\mathbb{P}(G(\alpha,c,\varepsilon)) \leqslant n\mathbb{P}\left(|Z| \leqslant 2cm^{\alpha}n^{\frac{1}{2}-\alpha}\right)^{m} \leqslant \left(\frac{4cm^{\alpha}}{\sqrt{2\pi}}\right)^{m} n^{1+(\frac{1}{2}-\alpha)m}.$$

En choisissant m tel que $\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)m < -1$ et en faisant tendre n vers l'infini, nous obtenons finalement

$$\mathbb{P}(G(\alpha,c,\varepsilon)) = 0.$$

□

Il y a maintenant un cas manquant pour la régularité puisque nous savons que pour presque tout $\omega \in \Omega$, $t \mapsto B_t(\omega)$ est C^{α} pour $\alpha < \frac{1}{2}$ et n'est pas C^{α} pour $\alpha > \frac{1}{2}$. Pour le cas $\alpha = \frac{1}{2}$, nous allons énoncer un théorème lié au module de continuité de B dont nous rappelons la définition maintenant

$$m(\varepsilon) = \sup\{|B_t - B_s|, 0 < s < t \leqslant 1, |s-t| \leqslant \varepsilon\}.$$

En effet, nous savons que la continuité uniforme des trajectoires coincide a $m(\varepsilon) \to 0$ lorsque $\varepsilon \to 0^+$ par exemple. Pour la regularité α-Hölderienne, nous avons que $f \in C^{\alpha}$ si il existe un $c > 0$ tel que $m(\varepsilon) \leqslant c\varepsilon^{\alpha}$. Pour le mouvement brownien nous avons un description précise de la limite du module de continuité.

THÉORÈME 5.11

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{\varepsilon\to 0^+} \frac{m(\varepsilon)}{\sqrt{2\varepsilon \log\frac{1}{\varepsilon}}} = 1\right) = 1$$

Nous omettons la preuve de ce théorème qui se trouve similaire à la preuve de la loi du logarithme itéré. Ce théorème nous donne finalement la description finale de la régularité.

COROLLAIRE 5.12. Pour presque tout $\omega \in \Omega$, la fonction $t \mapsto B_t(\omega)$ n'est pas $C^{\frac{1}{2}}$.

Démonstration. Soit $\delta > 0$, alors on sait qu'il existe une suite $(\varepsilon_k)_k$ décroissante vers 0 telle que

$$\frac{m(\varepsilon_k)}{\sqrt{\varepsilon_k}} \geqslant (1-\delta)\sqrt{2\log\frac{1}{\varepsilon_k}} \to \infty$$

presque sûrement. Or si B était $C^{\frac{1}{2}}$, on aurait $m(\varepsilon) \leqslant c\sqrt{\varepsilon}$ qui est impossible. □

5.3 Principe de réflexion

Le principe de réflexion consiste en le fait que l'on peut symétriser le mouvement brownien par rapport à une droite horizontale et on obtient encore un nouveau mouvement brownien. De plus, le temps choisi pour symétriser peut lui même être aléatoire tant que c'est un temps d'arrêt. Ce théorème est un corollaire de la propriété de Markov forte.

THÉORÈME 5.13

Soit B un mouvement brownien et τ un temps d'arrêt par rapport à la filtration brownienne standard de B fini presque sûrement alors le processus $\tilde{B}$ défini par

$$\tilde{B}_t = \begin{cases} B_t & \text{si } t < \tau \\ B_\tau - (B_t - B_\tau) & \text{si } t \geqslant \tau. \end{cases}$$

est aussi un mouvement brownien standard.

Le principe de réflexion est utile pour comprendre le processus maximum du mouvement brownien défini par

$$B_t^* = \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} B_s.$$

THÉORÈME 5.14

Pour tout $x, y \geqslant 0$,

$$\mathbb{P}(B_t^* \geqslant x, B_t \leqslant x - y) = \mathbb{P}(B_t > x + y),$$

ainsi B_t^* et $|B_t|$ ont la même distribution. Enfin la densité de la distribution jointe de B_t et B_t^* est

$$f_{(B_t, B_t^*)}(u, v) = \frac{2(2v - u)}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{(2v-u)^2}{2t}}$$

pour $u \in \mathbb{R}$,$v \geqslant 0$ et $v \geqslant u$.

Démonstration. Soient $x, y \geqslant 0$ et $\tau_x = \inf_{t \geqslant 0}\{B_t = x\}$. Alors

$$\mathbb{P}\left(\tau_x \leqslant t,\, B_t \geqslant x + y\right) = \mathbb{P}\left(\tau_x \leqslant t,\, \tilde{B}_t \leqslant x - y\right) = \mathbb{P}\left(\tau_x \leqslant t,\, B_t \leqslant x - y\right)$$

où on a utilisé la définition de τ_x et le fait que $\tilde{B}$ est un mouvement brownien standard, et donc à la même distribution que B par le principe de réflexion. Maintenant puisque

$$\{\tau_x \leqslant t\} = \{B_t^* \geqslant x\},$$

nous avons que

$$\mathbb{P}\left(B_t \geqslant x + y\right) = \mathbb{P}\left(B_t^* \geqslant x, B_t \geqslant x + y\right) = \mathbb{P}\left(B_t^* \geqslant x, B_t \leqslant x - y\right)$$

ce qui prouve le premier résultat. En prenant $y = 0$, nous obtenons que

$$\mathbb{P}(B_t \geqslant x) = \mathbb{P}(B_t^* \geqslant x, B_t \leqslant x)$$

et de plus nous avons l'égalité triviale

$$\mathbb{P}(B_t \geqslant x) = \mathbb{P}(B_t^* \geqslant x, B_t \geqslant x)$$

et ainsi

$$\mathbb{P}(B_t^* \geqslant x) = 2\mathbb{P}(B_t \geqslant x) = \mathbb{P}(|B_t| \geqslant x)$$

et B_t et B_t^* ont la même distribution. Pour obtenir la densité jointe de B_t^* et B_t, on commence par remarquer que

$$\mathbb{P}(B_t < u,\, B_t^* < v) = \mathbb{P}(B_t < u) - \mathbb{P}(B_t < u, B_t^* \geqslant v).$$

En posant, $u = x - y$, $v = x$, alors $u \in \mathbb{R}$, $v \geqslant 0$, et $v \geqslant u$. De plus, $x + y = 2v - u$ et ainsi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_t < u,\, B_t^* < v) = \mathbb{P}(B_t < u) - \mathbb{P}(B_t < u, B_t^* \geqslant v) &= \Phi\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right) - \mathbb{P}(B_t \geqslant 2v - u) \\ &= \Phi\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right) - 1 + \Phi\left(\frac{2v-u}{\sqrt{t}}\right) = \Phi\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{u-2v}{\sqrt{t}}\right)\end{aligned}$$

avec $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-\frac{w^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dw$. En dérivant cette expression, nous pouvons retrouver la densité du théorème. □

Cela nous donne aussi la densité du processus maximum au temps t, puisque pour $x \geqslant 0$,

$$\mathbb{P}(B_t^* \leqslant x) = \mathbb{P}(|B_t| \leqslant x) = \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(-\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = 2\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - 1.$$

En différenciant, nous obtenons la densité,

$$f_{B_t^*}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} \mathbb{1}_{x \geqslant 0}.$$

Nous pouvons aussi retrouver la loi du temps d'atteinte, en effet pour $a \in \mathbb{R}$, si $\tau_a = \inf\{t \geqslant 0,\, B_t = a\}$ alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tau_a \geqslant t) = \mathbb{P}(B_t^* \leqslant a) = \mathbb{P}(|B_t| \leqslant a) = \mathbb{P}(B_t^2 \leqslant a^2) = \mathbb{P}(t\mathcal{N}(0,1)^2 \leqslant a^2) &= \mathbb{P}\left(\frac{a^2}{\mathcal{N}(0,1)^2} \geqslant t\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{1}{\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{a^2}\right)} \geqslant t\right).\end{aligned}$$

6. Intégration d'Itô

Le but de cette section est de construire l'intégrale

$$I(X)(\omega) = \int_0^T X_t(\omega) dB_t.$$

Malheureusement, les trajectoires de B ne sont pas assez régulières pour réaliser une approximation en tant que somme de Riemann. On commence par définir les ensembles de processus aléatoires que nous allons considérer.

6.1 Intégrale d'Itô dans $\mathcal{H}^2$

Définition 6.1

Soit $\mathcal{B}$ la tribu des boréliens sur $[0,T]$ et $\{\mathcal{F}_t\}$ la tribu brownienne standard. On définit alors $\mathcal{F}_t \times \mathcal{B}$ la plus petite tribu contenant tout $A \times B$ avec $A \in \mathcal{F}_t$ et $B \in \mathcal{B}$.

On dit alors que $X : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ est mesurable si $X \in \mathcal{F}_T \times B$ et que X est adaptée si $\omega \mapsto X_t(\omega) \in \mathcal{F}_t$ pour tout $t \in [0,T]$.

On définit maintenant notre premier ensemble de processus sur lequel nous allons définir l'intégrale d'Itô.

DÉFINITION 6.2

$$\mathcal{H}^2 = \mathcal{H}^2([0,\mathrm{T}]) := \left\{ \mathrm{X} \text{ mesurable et adapté tel que } \mathbb{E}\left[\int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{X}_t^2(\omega)\mathrm{d}t\right] < \infty \right\}$$

Commençons par voir ce que l'on voudrait obtenir sur des processus faciles. Tout d'abord, si $\mathrm{X}_t(\omega) = \mathbb{1}_{(a,b]}(t)$ avec $(a,b] \subset [0,\mathrm{T}]$ alors

$$\mathrm{I}(\mathrm{X})(\omega) \text{ devrait être } \int_a^b \mathrm{dB}_t = \mathrm{B}_b - \mathrm{B}_a.$$

Par linéarité de l'intégrale (propriété que l'on voudrait aussi), on pourrait donc définir l'intégrale pour tout processus élémentaire de la forme

$$\mathrm{X}_t(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\omega)\mathbb{1}_{t_i < t \leqslant t_{i+1}}$$

avec $a_i \in \mathcal{F}_{t_i}$ et $\mathbb{E}[a_i^2] < \infty$ et $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \mathrm{T}$. On appelera cet ensemble de processus $\mathcal{H}_0^2$.

DÉFINITION 6.3

On dénote $\mathcal{H}_0^2$ l'ensemble des processus X tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}$, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \mathrm{T}$, $a_1, \ldots, a_n$ avec $a_i \in \mathcal{F}_{t_i}$ et $\mathbb{E}[a_i^2] < \infty$ tels que

$$\mathrm{X}_t(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\omega)\mathbb{1}_{t_i < t \leqslant t_{i+1}}.$$

Ainsi pour $\mathrm{X} \in \mathcal{H}_0^2$, on peut définir l'intégrale par

$$\mathrm{I}(\mathrm{X})(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\omega) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathrm{dB}_t = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\omega)(\mathrm{B}_{t_{i+1}} - \mathrm{B}_{t_i}).$$

Le but est maintenant d'étendre la définition depuis $\mathcal{H}_0^2$ dans tout $\mathcal{H}^2$.

LEMME 6.4. Pour tout $\mathrm{X} \in \mathcal{H}_0^2$,

$$\mathbb{E}[\mathrm{I}(\mathrm{X})^2] = \|\mathrm{I}(\mathrm{X})\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathrm{d}\mathbb{P})} = \|\mathrm{X}\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathrm{d}\mathbb{P}\times\mathrm{d}t)} = \mathbb{E}\left[\int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{X}_t(\omega)^2 \mathrm{d}t\right]$$

Démonstration. On écrit par définition $\mathrm{X}_t(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\omega)\mathbb{1}_{t_i < t \leqslant t_{i-1}}$ et ainsi

$$\mathrm{X}_t(\omega)^2 = \sum_{i,j=0}^{n-1} a_i a_j \mathbb{1}_{t_i < t \leqslant t_{i+1}} \mathbb{1}_{t_j < t \leqslant t_{j+1}} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\omega)^2 \mathbb{1}_{t_i < t \leqslant t_{i+1}}$$

par définition des fonctions indicatrices. Ainsi, nous pouvons calculer le terme de droite

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{X}_t(\omega)^2 \mathrm{d}t\right] = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[a_i^2] \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[a_i^2](t_{i+1} - t_i).$$

Pour le terme de gauche, nous pouvons utiliser les propriétés élementaires du mouvement brownien,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[\mathrm{I}(\mathrm{X})^2] = \mathbb{E}&\left[\sum_{i,j=0}^{n-1} a_i a_j (\mathrm{B}_{t_{i+1}} - \mathrm{B}_{t_i})(\mathrm{B}_{t_{j+1}} - \mathrm{B}_{t_j})\right] \\ &= \mathrm{E}\left[2\sum_{i<j} a_i a_j (\mathrm{B}_{t_{i+1}} - \mathrm{B}_{t_i})(\mathrm{B}_{t_{j+1}} - \mathrm{B}_{t_j})\right] + \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1} a_i^2 (\mathrm{B}_{t_{i+1}} - \mathrm{B}_{t_i})^2\right]. \end{aligned}$$

Pour la première somme, nous savons que $a_i \in \mathcal{F}_{t_i} \subset \mathrm{F}_{t_j}$, $a_j \in \mathcal{F}_{t_j}$ et $\mathrm{B}_{t_{i+1}} - \mathrm{B}_{t_i} \in \mathcal{F}_{t_{i+1}} \subset \mathcal{F}_{t_j}$ puisque $i < j$

mais par indépendance des incréments nous savous que $B_{t_{j+1}} - B_{t_j}$ est indépendant de $\mathcal{F}_{t_j}$. Ainsi,

$$\mathrm{E}\left[2\sum_{i<j} a_i a_j (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})\right] = \mathrm{E}\left[2\sum_{i<j} a_i a_j (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})\right] \mathbb{E}\left[(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})\right] = 0.$$

Pour la deuxième somme, nous utilisons le fait que $B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \sim \mathcal{N}(0, t_{i+1} - t_i)$ et est indépendant de $\mathcal{F}_{t_i}$ pour écrire

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1} a_i^2 (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2\right] = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[a_i^2](t_{i+1} - t_i).$$

□

Cette isométrie nous donne donc que la fonction $\mathrm{I} : \mathcal{H}_0^2 \to L^2(\mathrm{d}\mathbb{P})$ est une fonction continue. De plus, si $(X_n)_n$ est une suite de processus dans $\mathcal{H}_0^2 \subset L^2(\mathrm{d}\mathbb{P} \times \mathrm{d}t)$ qui converge vers une fonction $X \in L^2(\mathrm{d}\mathbb{P} \times \mathrm{d}t)$ alors puisque toute suite convergente est une suite de Cauchy nous savons que $\|X_n - X_m\|_{L^2(\mathrm{d}\mathbb{P})} \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$. Alors nous avons

$$\|\mathrm{I}(X_n) - \mathrm{I}(X_m)\|_{L^2(\mathrm{d}\mathbb{P})} = \|\mathrm{I}(X_n - X_m)\|_{L^2(\mathrm{d}\mathbb{P})} = \|X_n - X_m\|_{L^2(\mathrm{d}\mathbb{P}\times\mathrm{d}t)} \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$$

et $(\mathrm{I}(X_n))_n$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\mathrm{d}\mathbb{P})$ qui est complet et est donc convergente : $\mathrm{I}(X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \in L^2(\mathrm{d}\mathbb{P})$. On voudrait donc appeler $\mathrm{I}(X) = \ell$ mais nous devons d'abord répondre à deux questions :

1. Est-ce que cette définition est bien définie, c'est-à dire est-ce que la définition dépend de la suite $(X_n)_n$ convergeant vers X ?
2. Pour toute fonction $X \in \mathcal{H}^2$, peut-on trouver une suite de fonction dans $\mathcal{H}_0^2$ convergeant vers X ?

Pour répondre au premier point, prenons deux suites de fonction $(X_n)_n$ et $(X'_n)_n$ convergeant vers X. Alors nous avons

$$\|X_n - X'_n\|_{L^2(\mathrm{d}\mathbb{P}\times\mathrm{d}t)} \leqslant \|X_n - X\|_{L^2(\mathrm{d}\mathbb{P}\times\mathrm{d}t)} + \|X - X'_n\|_{L^2(\mathrm{d}\mathbb{P}\times\mathrm{d}t)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Et par l'isométrie d'Itô, nous avons

$$\|\mathrm{I}(X_n) - \mathrm{I}(X'_n)\|_{L^2(\mathrm{d}\mathbb{P})} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Pour le deuxième point, nous avons le lemme suivant.

Lemme 6.5. $\mathcal{H}_0^2$ est dense dans $\mathcal{H}^2$.

Ainsi, nous avons maintenant bien défini l'intégrale d'Itô pour toute fonction dans $\mathcal{H}^2$. L'isométrie d'Itô est aussi vraie sur $\mathcal{H}^2$.

Théorème 6.6

Pour tout processus $X \in \mathcal{H}^2([0,T])$,

$$\|\mathrm{I}(X)\|_{L^2(\mathrm{d}\mathbb{P})} = \|X\|_{L^2(\mathrm{d}\mathbb{P}\times\mathrm{d}t)}.$$

Démonstration. Soit $X \in \mathcal{H}^2$ et $(X_n)_n$ une suite de fonctions dans $\mathcal{H}_0^2$ qui converge vers X dans $L^2(\mathrm{d}\mathbb{P} \times \mathrm{d}t)$. Alors nous avons,

$$\begin{aligned}\left|\|X_n\|_{L^2(\mathrm{d}\mathbb{P}\times\mathrm{d}t)} - \|X\|_{L^2(\mathrm{d}\mathbb{P}\times\mathrm{d}t)}\right| &\leqslant \left|\|X_n - X\|_{L^2(\mathrm{d}\mathbb{P}\times\mathrm{d}t)} + \|X\|_{L^2(\mathrm{d}\mathbb{P}\times\mathrm{d}t)} - \|X\|_{L^2(\mathrm{d}\mathbb{P}\times\mathrm{d}t)}\right| \\ &= \|X_n - X\|_{L^2(\mathrm{d}\mathbb{P}\times\mathrm{d}t)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

De la même façon, puisque $\mathrm{I}(\mathrm{X}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{L}^2(\mathrm{d}\mathbb{P})} \mathrm{I}(\mathrm{X})$ par définition de $\mathrm{I}(\mathrm{X})$, nous avons que

$$\|\mathrm{I}(\mathrm{X}_n)\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{d}\mathbb{P})} \xrightarrow[n\to\infty]{} \|\mathrm{I}(\mathrm{X})\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{d}\mathbb{P})}.$$

Mais par l'isométrie d'Itô dans $\mathcal{H}_0^2$, nous savons que

$$\|\mathrm{I}(\mathrm{X}_n)\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{d}\mathbb{P})} = \|\mathrm{X}_n\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{d}\mathbb{P}\times\mathrm{d}t)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \|\mathrm{X}\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{d}\mathbb{P}\times\mathrm{d}t)}$$

et nous obtenons le résultat par unicité de la limite. □

6.2 Intégrale d'Itô en tant que processus

Nous avons pour le moment construit l'intégrale d'Itô en tant que variable aléatoire mais il serait préférable de la définir en tant que processus aussi $\left(\int_0^t \mathrm{X}_t(\omega)\mathrm{d}\mathrm{B}_t\right)_{0\leqslant t\leqslant \mathrm{T}}$. L'idée est de considérer

$$\mathbb{1}_{[0,t]}(\omega,s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s \leqslant t, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \in \mathcal{H}^2([0,\mathrm{T}]).$$

En effet, pour $\mathrm{X} \in \mathcal{H}^2$, on peut définir $\mathbb{1}_{[0,t]}\mathrm{X} \in \mathcal{H}^2$ et on a donc envie de définir le processus

$$\tilde{\mathrm{Z}}_t = \mathrm{I}(\mathbb{1}_{[0,t]}\mathrm{X}) \in \mathrm{L}^2(\mathrm{d}\mathbb{P})$$

pour tout $t \in [0,\mathrm{T}]$.

> ⚠ La variable aléatoire $\mathrm{I}(\mathbb{1}_{[0,t]}\mathrm{X})$ est définie comme objet dans $\mathrm{L}^2(\mathrm{d}\mathbb{P})$ et peut donc prendre des valeurs arbitraires sur $\mathrm{A}_t \in \mathcal{F}_t$ tel que $\mathbb{P}(\mathrm{A}_t) = 0$. Mais ceci étant vrai pour tout $t \in [0,\mathrm{T}]$, qui est indénombrable, ceci peut poser de gros problèmes puisque $\bigcup_{t\in[0,\mathrm{T}]} \mathrm{A}_t$ peut être n'importe quoi.

Pour se sortir de ce problème nous allons construire un processus Z continu qui sera égal à $\mathrm{I}(\mathbb{1}_{[0,t]}\mathrm{X})$ presque partout.

Théorème 6.7

Pour tout $\mathrm{X} \in \mathcal{H}^2([0,\mathrm{T}])$, il existe un processus $(\mathrm{Z}_t)_{t\in[0,\mathrm{T}]}$ qui est une martingale par rapport à la filtration brownienne standard, est continue et telle que

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{Z}_t = \mathrm{I}(\mathbb{1}_{[0,t]}\mathrm{X})\right) = 1, \quad \text{pour tout } t \in [0,\mathrm{T}].$$

Démonstration. Soit $\mathrm{X} \in \mathcal{H}^2$, on sait qu'il existe (X_n) une suite de processus dans $\mathcal{H}_0^2$ telle que

$$\|\mathrm{X}-\mathrm{X}_n\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{d}\mathbb{P}\times\mathrm{d}t)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

et par définition $\mathbb{1}_{[0,t]}\mathrm{X}_n \in \mathcal{H}_0^2$. Donc pour tout $n \geqslant 1$, pour tout $\omega \in \Omega$ et pour $t \in [0,\mathrm{T}]$,

$$\mathbb{1}_{[0,t]}\mathrm{X}_n(\omega) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i \mathbb{1}_{]t_i,t_{i+1}]} + a_k \mathbb{1}_{]t_k,t]}$$

si $t \in]t_k, t_{k+1}]$. alors par définition,

$$\mathrm{Z}_{n,t}(\omega) = \mathrm{I}(\mathbb{1}_{[0,t]}\mathrm{X}_n)(\omega) = a_k(\mathrm{B}_t - \mathrm{B}_{t_k}) + \sum_{i=0}^{k-1} a_i(\mathrm{B}_{t_{i+1}} - \mathrm{B}_{t_i}) \in \mathcal{F}_t.$$

Comme B est une martingale continue, nous savons que Z_n est une martingale (par rapport à $\mathcal{F}_t$) continue. Ainsi, on sait que $\mathrm{M}_t = |\mathrm{Z}_{n,t} - \mathrm{Z}_{m,t}|$ est une sous-martingale, par l'inégalité L^2 de Doob, nous avons que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leqslant t \leqslant \mathrm{T}} |\mathrm{Z}_{n,t} - \mathrm{Z}_{m,t}| > \frac{1}{2^k}\right) \leqslant 2^{2k}\mathbb{E}\left[|\mathrm{Z}_{n,\mathrm{T}} - \mathrm{Z}_{m,\mathrm{T}}|^2\right] = 2^{2k}\|\mathrm{I}(\mathrm{X}_n) - \mathrm{I}(\mathrm{X}_m)\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathrm{d}\mathbb{P})} = 2^{2k}\|\mathrm{X}_n - \mathrm{X}_m\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathrm{d}\mathbb{P}\times\mathrm{d}t)}$$

où nous avons utilisé l'isométrie d'Itô dans la dernière inégalité. Puisque $\mathrm{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{L}^2(\mathrm{d}\mathbb{P}\times\mathrm{d}t)} \mathrm{X}$ alors il existe une suite $n_k \to \infty$ tel que

$$\max_{n \geqslant n_k} \|\mathrm{X}_n - \mathrm{X}_{n_k}\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{d}\mathbb{P}\times\mathrm{d}t)} < \frac{1}{2^{3k}}$$

et ainsi

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leqslant t \leqslant \mathrm{T}} \left|\mathrm{Z}_{n_{k+1},t} - \mathrm{Z}_{n_k,t}\right| > \frac{1}{2^k}\right) \leqslant \frac{1}{2^k}.$$

Par le lemme de Borel–Cantelli, il existe $\Omega_0 \subset \Omega$ tel que $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ et tel que pour tout $\omega \in \Omega_0$, il existe $\mathrm{N}(\omega) < \infty$ tel que pour $k \geqslant \mathrm{N}(\omega)$,

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant \mathrm{T}} |\mathrm{Z}_{n_{k+1},t}(\omega) - \mathrm{Z}_{n_k,t}(\omega)| \leqslant \frac{1}{2^k}.$$

Ainsi, pour tout $\omega \in \Omega_0$, $(\mathrm{Z}_{n_k}(\omega))_k$ est une suite de Cauchy pour la norme infinie dans $\mathcal{C}([0,\mathrm{T}])$ qui est complet. Donc pour tout $\omega \in \Omega_0$, il existe une fonction continue $t \mapsto \mathrm{Z}_t(\omega)$ telle que

$$\mathrm{Z}_{n_k}(\omega) \xrightarrow[k\to\infty]{} \mathrm{Z}(\omega) \text{ uniformément dans } \mathcal{C}([0,\mathrm{T}]).$$

Par l'isométrie d'Itô, on sait que

$$\|\mathrm{Z}_{n_{k+1},t} - \mathrm{Z}_{n_k,t}\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{d}\mathbb{P})} = \|\mathbb{1}_{[0,t]}\mathrm{X}_{n_{k+1}} - \mathbb{1}_{[0,t]}\mathrm{X}_{n_k}\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{d}\mathbb{P}\times\mathrm{d}t)} < \frac{1}{2^{3k}}$$

et $(\mathrm{Z}_{n_k,t})$ est une suite de Cauchy dans $\mathrm{L}^2(\mathrm{d}\mathbb{P})$ et il existe donc $\tilde{\mathrm{Z}}_t$ tel que

$$\|\mathrm{Z}_{n_k,t} - \tilde{\mathrm{Z}}_t\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{d}\mathbb{P})} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

et par unicité de la limite $\tilde{\mathrm{Z}}_t = \mathrm{Z}_t$ presque sûrement. En fait $\tilde{\mathrm{Z}}_t = \mathrm{I}(\mathbb{1}_{[0,t]}\mathrm{X})$ par notre définition. Nous avons donc construit le processus continu Z qui est presque sûrement égal au processus $\mathrm{I}(\mathbb{1}_{[0,t]}f)$.

Nous allons maintenant prouver que Z_t est une martingale, il ne nous reste qu'à prouver la propriété de martingale. Soit $s \leqslant t$,

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{I}\left(\mathbb{1}_{[0,t]}\mathrm{X}\right)\middle|\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\mathrm{I}\left(\mathbb{1}_{[0,s]}\mathrm{X}\right)\middle|\mathcal{F}_s\right] + \mathbb{E}\left[\mathrm{I}\left(\mathbb{1}_{[s,t]}\mathrm{X}\right)\middle|\mathcal{F}_s\right].$$

Si nous revenons à la suite de processus élémentaires X_n, nous avons

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{I}\left(\mathbb{1}_{[0,s]}\mathrm{X}_n\right)\middle|\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{j-1} a_i(\mathrm{B}_{t_{i+1}} - \mathrm{B}_{t_i}) + a_j(\mathrm{B}_s - \mathrm{B}_{t_j})\middle|\mathcal{F}_s\right] = \mathrm{I}\left(\mathbb{1}_{[0,s]}\mathrm{X}_n\right)$$

car tout est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_s$, en supposant que $s \in]t_j, t_{j+1}]$,. Pour le deuxième terme, nous avons

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{I}\left(\mathbb{1}_{[s,t]}\mathrm{X}_n\right)\middle|\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[a_j(\mathrm{B}_{t_{j+1}} - \mathrm{B}_s) + \sum_{i=j+1}^{k-1} a_i(\mathrm{B}_{t_{i+1}} - \mathrm{B}_{t_i}) + a_k(\mathrm{B}_t - \mathrm{B}_{t_k})\middle|\mathcal{F}_s\right].$$

Les trois termes se calculent de la même façon,

$$\mathbb{E}\left[a_j(\mathrm{B}_{t_{j+1}} - \mathrm{B}_s)\middle|\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[a_j(\mathrm{B}_{t_{j+1}} - \mathrm{B}_s)\middle|\mathcal{F}_{t_j}\right]\middle|\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[a_j\mathbb{E}\left[\mathrm{B}_{t_{j+1}} - \mathrm{B}_s\middle|\mathcal{F}_{t_j}\right]\middle|\mathcal{F}_s\right] = 0$$

par indépendance des incréments, que $s > t_j$ et que $a_j \in \mathcal{F}_{t_j}$. Par l'isométrie d'Itô et la convergence dans

$L^2(d\mathbb{P} \times dt)$ de X_n vers X, on obtient bien que

$$\mathbb{E}[Z_t|\mathcal{F}_s] \xleftarrow[n\to\infty]{L^2(d\mathbb{P})} \mathbb{E}\left[I\left(\mathbb{1}_{[0,t]}X_n\right)\middle|\mathcal{F}_s\right] = I\left(\mathbb{1}_{[0,s]}X_n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{L^2(d\mathbb{P})} Z_s.$$

□

On a donc défini un processus continu qui est une martingale et pour $X \in \mathcal{H}^2([0,T])$, on le dénote

$$Z_t = \int_0^t X_s dB_s.$$

Par exemple, on peut réécrire l'isométrie d'Itô comme

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t X_s(\omega)dB_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t X_s^2(\omega)ds\right].$$

On remarque que l'on a aussi une version conditionnelle de l'isométrie d'Itô.

Proposition 6.8. Si $X \in \mathcal{H}^2$ et $0 \leqslant s \leqslant t$, alors

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_s^t X_u(\omega)dB_u\right)^2\middle|\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_s^t X_u^2 du\middle|\mathcal{F}_s\right].$$

Démonstration. Pour tout $A \in \mathcal{F}_s$, nous devons prouver

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A\left(\int_s^t X_u dB_u\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A \int_s^t X_u^2 du\right].$$

Pour ceci, il suffit de considérer le processus

$$\tilde{X}_u = \begin{cases} 0 & \text{si } u \leqslant s \\ \mathbb{1}_A X_u & \text{si } s < u \leqslant t \end{cases}$$

et d'appliquer l'isométrie d'Itô. □

Cette dernière proposition nous donne une généralisation du fait que $(B_t^2 - t)_t$ est une martingale.

Corollaire 6.9. Si $X \in \mathcal{H}^2$ alors

$$M_t = \left(\int_0^t X_u dB_u\right)^2 - \int_0^t X_u^2 dt$$

est une martingale par rapport à la filtration brownienne standard.

On remarque que pour $X \in \mathcal{H}^2$, puisque $Z_t = \int_0^t X_s dB_s$ est une martingale, nous avons

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t X_s dB_s\right] = \mathbb{E}[Z_t] = \mathbb{E}[Z_0] = 0.$$

6.3 Un calcul explicite

Nous allons faire un premier calcul pour obtenir la valeur de

$$\int_0^t B_s dB_s.$$

Pour une intégrale de Riemann habituelle, nous aurions pour une fonction $\mathcal{C}^1$ avec $f(0) = 0$,

$$\int_0^t f(t)f'(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}f(t)^2.$$

Est-il possible que

$$\int_0^t \mathrm{B}_s\mathrm{dB}_s = \frac{1}{2}\mathrm{B}_t^2 \ ?$$

En tant que deux variables aléatoires, on peut tout d'abord vérifier que leur espérance soit égale mais

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \mathrm{B}_s\mathrm{dB}_s\right] = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}\mathrm{B}_t^2\right] = \frac{t}{2}$$

où nous avons utilisé le fait que l'intégrale d'Itô est une martingale pour calculer le premier terme. Ce calcul nous donne en revanche un candidat clair, a-t-on

$$\int_0^t \mathrm{B}_s\mathrm{dB}_s = \frac{1}{2}\mathrm{B}_t^2 - \frac{t}{2} \ ?$$

Nous savons que le premier moment est le bon, nous pouvons vérifier le second moment,

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \mathrm{B}_s\mathrm{dB}_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \mathrm{B}_s^2\mathrm{d}s\right] = \int_0^t s\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2}.$$

Pour le deuxième terme,

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{2}\mathrm{B}_s^2 - \frac{t}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{4}\mathbb{E}[\mathrm{B}_t^4] - \frac{1}{2}\mathbb{E}[t\mathrm{B}_t^2] + \frac{t^2}{4} = \frac{3t^2}{4} - \frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{4} = \frac{t^2}{2}.$$

Cela ne prouve bien sur pas que les deux valeurs sont égales mais nous allons voir que c'est le cas.

Tout d'abord, est-ce que $\mathrm{B} \in \mathcal{H}^2$? C'est un processus mesurable et adaptée à la filtration brownienne standard. De plus,

$$\mathrm{E}\left[\int_0^t \mathrm{B}_s^2(\omega)\mathrm{d}s\right] = \frac{t^2}{2} < \infty.$$

Faisons une approximation explicite par une fonction dans $\mathcal{H}_0^2$. Considérons $t_i = \frac{i\mathrm{T}}{n}$ pour $0 \leqslant i \leqslant n$ et le processus

$$\mathrm{B}_{n,t}(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{B}_{t_i}(\omega)\mathbb{1}_{t_i < t \leqslant t_{i+1}} \in \mathcal{H}_0^2.$$

Nous pouvons calculer

$$\|\mathrm{B}_n - \mathrm{B}\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{d}\mathbb{P}\times\mathrm{d}t)} = \mathbb{E}\left[\int_0^\mathrm{T}\left(\sum_{i=0}^{n-1}(\mathrm{B}_{t_i} - \mathrm{B}_t)\mathbb{1}_{t_i < t \leqslant t_{i+1}}\right)^2\mathrm{d}t\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^\mathrm{T}\sum_{i=0}^{n-1}(\mathrm{B}_{t_i} - \mathrm{B}_t)^2\mathbb{1}_{t_i < t \leqslant t_{i+1}}\mathrm{d}t\right]$$

où l'on a simplement développé le carré et utilisé les propriétés des fonctions indicatrices. Nous pouvons maintenant calculer exactement cette quantité

$$\|\mathrm{B}_n - \mathrm{B}\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{d}\mathbb{P}\times\mathrm{d}t)} = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}(t - t_i)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1} - t_i)^2 = \frac{\mathrm{T}^2}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Par définition de l'intégrale d'Itô, nous avons donc que

$$\int_0^t \mathrm{B}_s\mathrm{dB}_s = \lim_{n\to\infty}\mathrm{I}(\mathbb{1}_{[0,t]}\mathrm{B}_n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i\leqslant k_n}\mathrm{B}_{t_i}(\mathrm{B}_{t_{i+1}} - \mathrm{B}_{t_i}) + \mathrm{B}_{t_{k_n+1}}(\mathrm{B}_t - \mathrm{B}_{t_{k_n+1}})$$

avec $k_n = \max\{k, t_{k+1} \leqslant t\}$. Si on regarde le deuxième terme nous avons que

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{B}_{t_{k_n+1}}(\mathrm{B}_t - \mathrm{B}_{t_{k_n+1}})\right] = \mathbb{E}\left[\mathrm{B}_{t_{k_n+1}}\right]\mathbb{E}\left[\mathrm{B}_t - \mathrm{B}_{t_{k_n+1}}\right] = 0$$

par l'indépendance des incréments. On peut calculer sa variance, et on a

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{B}^2_{t_{k_n+1}}(\mathrm{B}_t - \mathrm{B}_{t_{k_n+1}})^2\right] = t_{k_n+1}(t - t_{k_n+1}) \leqslant \frac{t\mathrm{T}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

et ainsi nous avons maintenant

$$\int_0^t \mathrm{B}_s \mathrm{d}\mathrm{B}_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i\leqslant k_n} \mathrm{B}_{t_i}(\mathrm{B}_{t_{i+1}} - \mathrm{B}_{t_i}).$$

On peut réécrire

$$\mathrm{B}_{t_i}(\mathrm{B}_{t_{i+1}} - \mathrm{B}_{t_i}) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{B}^2_{t_{i+1}} - \mathrm{B}^2_{t_i}\right) - \frac{1}{2}(\mathrm{B}_{t_{i+1}} - \mathrm{B}_{t_i})^2$$

et ainsi

$$\int_0^t \mathrm{B}_s \mathrm{d}\mathrm{B}_s = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\mathrm{B}^2_{t_{k_n+1}} - \frac{1}{2}\sum_{i\leqslant k_n}(\mathrm{B}_{t_{i+1}} - \mathrm{B}_{t_i})^2 = \frac{1}{2}\mathrm{B}^2_t - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{i\leqslant k_n}(\mathrm{B}_{t_{i+1}} - \mathrm{B}_{t_i})^2.$$

Soit $\mathrm{Y}_n = \frac{1}{2}\sum_{i\leqslant k_n}(\mathrm{B}_{t_{i+1}} - \mathrm{B}_{t_i})^2$ alors

$$\mathbb{E}[\mathrm{Y}_n] = \frac{1}{2}\sum_{i\leqslant k_n}(t_{i+1} - t_i) = \frac{1}{2}t_{k_n+1} = \frac{(k_n+1)\mathrm{T}}{2n}.$$

et

$$\left|\mathbb{E}[\mathrm{Y}_n] - \frac{t}{2}\right| = \left|\frac{(k_n+1)\mathrm{T}}{n} - \frac{t}{2}\right| \leqslant \frac{\mathrm{T}}{2n}$$

car par définition $t_{k_n+1} \leqslant t \leqslant t_{k_n+2}$. Maintenant nous avons

$$\left\|\mathrm{Y}_n - \frac{t}{2}\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{d}\mathbb{P})} \leqslant \|\mathrm{Y}_n - \mathbb{E}[\mathrm{Y}_n]\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{d}\mathbb{P})} + \left\|\mathbb{E}[\mathrm{Y}_n] - \frac{t}{2}\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{d}\mathbb{P})}$$

et nous venons de voir que le deuxième terme tend vers 0. Pour le premier, nous devons donc calculer la variance de Y_n,

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\mathrm{Y}_n) &= \frac{1}{2}\sum_{i\leqslant k_n}\mathrm{Var}\left((\mathrm{B}_{t_{i+1}} - \mathrm{B}_{t_i})^2\right) = \frac{1}{2}\sum_{i\leqslant k_n}\left(\mathbb{E}\left[(\mathrm{B}_{t_{i+1}} - \mathrm{B}_{t_i})^4\right] - \mathbb{E}\left[(\mathrm{B}_{t_{i+1}} - \mathrm{B}_{t_i})^2\right]\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i\leqslant k_n}\left(3(t_{i+1} - t_i)^2 - (t_{i+1} - t_i)^2\right) = \sum_{i\leqslant k_n}(t_{i+1} - t_i)^2 \leqslant k_n\frac{\mathrm{T}^2}{n^2} \leqslant t\frac{\mathrm{T}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Finalement $\mathrm{Y}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{L}^2(\mathrm{d}\mathbb{P})} \frac{1}{2}t$ ce qui nous donne

$$\int_0^t \mathrm{B}_s \mathrm{d}\mathrm{B}_s = \frac{1}{2}\mathrm{B}_t - \frac{t}{2}.$$

Remarque nous pouvons généraliser ce que nous avons prouver sur Y_n.

PROPOSITION 6.10. Pour toute subdivision $\pi = \{t_0, \dots, t_m\}$ tele que $s = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = t$ si on définit le pas maximal de la subdivision

$$|\pi| = \max_{0\leqslant k\leqslant m-1} |t_{k+1} - t_k|$$

alors

$$\mathrm{S}_\pi = \sum_{k=0}^{m-1} (\mathrm{B}_{t_{k+1}} - \mathrm{B}_{t_k})^2 \xrightarrow[|\pi|\to 0^+]{\mathrm{L}^2(\mathrm{d}\mathbb{P})} t - s.$$

En particuler le mouvement brownien n'est pas à variation finie, c'est-à-dire que

$$\sum_{k=0}^{m-1} |\mathrm{B}_{t_{k+1}} - \mathrm{B}_{t_k}| \xrightarrow[|\pi|\to 0^+]{} \infty.$$

En effet sinon, puisque

$$\mathrm{S}_\pi \leqslant \max_{0\leqslant k\leqslant m-1} |\mathrm{B}_{t_{k+1}} - \mathrm{B}_{t_k}| \cdot \sum_{k=0}^{m-1} |\mathrm{B}_{t_{k+1}} - \mathrm{B}_{t_k}|$$

et que le premier terme converge vers 0 par continuité de B, nous aurions $\mathrm{S}_\pi \to 0$ qui est absurde.

6.4 Propriétés de l'intégrale d'Itô

Nous commençons par voir que l'intégrale d'Itô d'une fonction nulle presque partout est nulle

Proposition 6.11. Si $\mathrm{X} \in \mathcal{H}^2$ est bornée et si ν est un temps d'arrêt tels que $\mathrm{X}_s(\omega) = 0$ pour presque tout $\omega \in \{\omega \in \Omega,\, s \leqslant \nu(\omega)\}$ alors

$$\mathrm{Z}_t(\omega) = \int_0^t \mathrm{X}_s(\omega)\mathrm{dB}_s = 0 \text{ pour preqsue tout } \omega \in \{\omega \in \Omega,\, t \leqslant \nu(\omega)\}$$

L'idée de la preuve est de dire la chose suivante

$$\mathrm{Z}_{t\wedge\nu} = \int_0^{t\wedge\nu} \mathrm{X}_s(\omega)\mathrm{dB}_s = \int_0^t \mathrm{X}_s(\omega)\mathbb{1}_{s\leqslant\nu}\mathrm{dB}_s = 0.$$

Mais on remarque que la seconde inégalité n'est pas évidente par la construction de notre intégrale, nous allons donc la justifier.

Démonstration. Si $\mathrm{X} \in \mathcal{H}_0^2$ que l'on écrit $\sum_{i=0}^{n-1} a_i(\omega)\mathbb{1}_{t_i<s\leqslant t_{i+1}}$ avec $a_i \in \mathcal{F}_{t_i}$ et $\mathbb{E}[a_i] < \infty$. Si $\mathrm{X}_s(\omega) = 0$ presque sûrement sur $\{s \leqslant \nu\}$ alors $a_i = 0$ presque sûrement pour tout i tel que $t_i \leqslant \nu$. Ainsi,

$$\int_0^t \mathrm{X}_s(\omega)\mathrm{dB}_s = \sum_{i=0}^{k-1} a_i(\omega)(\mathrm{B}_{t_{i+1}-\mathrm{B}_{t_i}}) + a_k(\omega)(\mathrm{B}_t - \mathrm{B}_{t_k})$$

si $t \in]t_k, t_{k+1}]$ et si $t \leqslant \nu$, alors

$$\int_0^t \mathrm{X}_s(\omega)\mathrm{dB}_s = 0$$

et le théorème est donc vrai pour les processus dans $\mathcal{H}_2^0$.

Soit $\mathrm{X} \in \mathcal{H}^2$ alors il existe une suite de processus $(\mathrm{X}_n) \in (\mathcal{H}_0^2)^{\mathbb{N}}$ telle que $\|\mathrm{X}_n - \mathrm{X}\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{d}\mathbb{P}\times\mathrm{d}t)} \to 0$. De plus $|\mathrm{X}| \leqslant \mathrm{B}$ alors on peut écrire

$$\mathrm{X}_{n,s}(\omega) = \sum_{i=0}^{2^n-1} a_i(\omega)\mathbb{1}_{t_i<s\leqslant t_{i+1}} \text{ avec } t_i = \frac{i\mathrm{T}}{2^n}$$

et $|a_i| \leqslant \mathrm{B}$. En revanche, il faut faire attention car on ne sait pas que $\mathrm{X}_{n,s}(\omega) = 0$ sur $\{s \leqslant \nu\}$et pour régler cela, nous construisons un nouveau processus dans $\mathcal{H}_0^2$,

$$\hat{\mathrm{X}}_{n,s}(\omega) = \sum_{i=0}^{2^n-1} a_i(\omega)\mathbb{1}_{\nu\leqslant t_i}\mathbb{1}_{t_i<s\leqslant t_{i+1}} \in \mathcal{H}_0^2$$

car $\mathbb{1}_{\nu\leqslant t_i} \in \mathcal{F}_{t_i}$ car ν est un temps d'arrêt. Tout d'abord, nous remarquons que presque sûrement sur $\{s \leqslant \nu\}$,

$\hat{X}_{n,s} = 0$ et ainsi nous savons par le début de la preuve que

$$\int_0^t \hat{X}_{n,s}(\omega)\mathrm{dB}_s = 0 \text{ pour } t \leqslant \nu.$$

Prouvons maintenant que $\hat{X}_n \to X$ dans $L^2(d\mathbb{P} \times dt)$.On sait que $X_n \to X$ dans $L^2(d\mathbb{P} \times dt)$ et aussi que $X_s(\omega) = X_s(\omega)\mathbb{1}_{\nu<s}$ puisque $X_s(\omega) = 0$ pour $\omega \in \{s \leqslant \nu\}$. Donc

$$f_n \mathbb{1}_{\nu<s} \xrightarrow[n\to\infty]{L^2(d\mathbb{P}\times dt)} X.$$

On dénote

$$\Delta_{n,s}(\omega) = X_{n,s}(\omega)\mathbb{1}_{\nu<s} - \hat{X}_{n,s}(\omega),$$

alors $\Delta_{n,s}(\omega) = 0$ sauf si $s \in [t_i, t_{i+1}[$ et $\nu(\omega) \in [t_i, t_{i+1}[$ et ainsi

$$\|\Delta_{n,s}(\omega)\|_{L^2(d\mathbb{P}\times dt)} = \mathbb{E}\left[\int_0^T |\Delta_{n,s}(\omega)|^2 ds\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\max_i |a_i(\omega)|^2 \frac{1}{2^n}\right] \leqslant \frac{1}{2^n} B^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Ainsi, pour tout $t \in [0, T]$, nous avons que $Z_t = \lim_{n\to\infty} \int_0^t \hat{X}_{n,s} dB_s = 0$ presque sûrement sur $\{t \leqslant \nu\}$. Il faut faire attention, car nous avons un ensemble de probabilité 1 pour chaque $t \in [0, T]$ qui est un ensemble indénombrable mais nous sommes sauvés par la continuité ! On peut par exemple écrire,

$$\mathbb{P}\left(\forall t \in [0,T], Z_t(\omega) = 0 \text{ sur } \{t \leqslant \nu(\omega)\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{t\in\mathbb{Q}\cap[0,T]} \{Z_t(\omega) = 0 \text{ sur } \{t \leqslant \nu(\omega)\}\}\right) = 1.$$

□

En réalité, nous n'avons pas besoin de f bornée mais ceci simplifiait la preuve. Nous énonçons le même résultat différemment dans la prochaine proposition.

Proposition 6.12. Si X, Y sont dans $\mathcal{H}^2$ et si ν est un temps d'arrêt tel que $X_s(\omega) = Y_s(\omega)$ presque sûrement sur $\{s \leqslant \omega\}$ alors

$$\int_0^t X_s(\omega)dB_s = \int_0^t Y_s(\omega)dB_s \text{ presque sûrement sur } \{t \leqslant \nu\}.$$

6.5 Intégrale d'Itô dans $\mathcal{L}^2_{\mathrm{Loc}}$

On a bien défini $\int_0^t X_s(\omega)dB_s$ pour un processus X tel que $\mathbb{E}\left[\int_0^t X_s^2(\omega)ds\right] < \infty$ mais ceci est assez restrictif. par exemple, $X_s(\omega) = \exp(B_s^4(\omega))$ n'est pas dans $\mathcal{H}^2$. On va étendre notre définition de l'intégrale stochastique à l'ensemble suivant.

Définition 6.13
On définit

$$\mathcal{L}^2_{\mathrm{Loc}} = \left\{X \text{ mesurables et adaptés de } \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R} \text{ tels que } \mathbb{P}\left(\int_0^T X_s(\omega)^2 dt < \infty\right) = 1\right\} \supset \mathcal{H}^2.$$

Par exemple, $\exp(B^4) \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{Loc}}$ et en fait tout $f(B)$ pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue est dans $\mathcal{L}^2_{\mathrm{Loc}}$. Nous allons maintenant voir pourquoi nous appelons cet ensemble $\mathcal{L}^2_{\mathrm{Loc}}$, en particulier d'où vient ce Loc.

Définition 6.14
Une suite croissante de temps d'arrêt (τ_n) est localisante pour $X \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{Loc}}$ si

$$X_{n,t}(\omega) = X_t(\omega)\mathbb{1}_{t\leqslant\tau_n} \in \mathcal{H}^2$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\tau_n = T\}\right) = 1$

On voit que cette définition permet de se ramener à $\mathcal{H}^2$ et en particulier cela est possible à partir de processus dans $\mathcal{L}^2_{\text{Loc}}$.

PROPOSITION 6.15. Soit $X \in \mathcal{L}^2_{\text{Loc}}$ alors la suite de temps d'arrêt

$$\tau_n = \inf\left\{t \in [0,T], \int_0^t X_s^2(\omega)dt \geqslant n \text{ ou } t \geqslant T\right\}$$

est une suite localisante pour X.

Démonstration. Tout d'abord (τ_n) est clairement une suite croissante de temps d'arrêt et de plus

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\tau_n = T\}\right) = \mathbb{P}\left(\exists n \in \mathbb{N},\, \tau_n = T\right) = \mathbb{P}\left(\int_0^T X_s^2(\omega)dB_s < \infty\right) = 1.$$

Si on définit $X_{n,s}(\omega) = X_s(\omega)\mathbb{1}_{s \leqslant \tau_n}$ alors

$$\|X_n\|^2_{L^2(d\mathbb{P}\times dt)} = \mathbb{E}\left[\int_0^T X_s^2(\omega)\mathbb{1}_{s\leqslant\tau_n}ds\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau_n \wedge T} X_s^2(\omega)ds\right] \leqslant n$$

et $X_n \in \mathcal{H}^2$. Donc (τ_n) est une suite localisante pour X. □

Pour étendre la définition de l'intégrale stochastique à $\mathcal{L}^2_{\text{Loc}}$, on veut réaliser le raisonnement suivant : pour $X \in \mathcal{L}^2_{\text{Loc}}$, on choisit τ_n une suite localisante (que l'on sait existe par la proposition précédente) et on définit $Z_{n,t} = \int_0^t X_s(\omega)\mathbb{1}_{s\leqslant\tau_n}dB_s$ que l'on peut définir puisque l'intégrand est dans $\mathcal{H}^2$. Le but est alors de définir un processus continu Z_t tel que pour tout $t \in [0,T]$,

$$\mathbb{P}\left(Z_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} Z_{n,t}\right) = 1$$

et on définira de cette façon $Z_t(\omega) = \int_0^t X_s(\omega)dB_s$.

PROPOSITION 6.16. Soit $X \in \mathcal{L}^2_{\text{Loc}}$ et (τ_n) une suite localisante. Si on définit la suite de martingales continues $Z_{n,t} = \int_0^t X_s(\omega)\mathbb{1}_{s\leqslant\nu_n}dB_s$ alors pour tout $t \in [0,T]$ et $n \geqslant m$,

$$Z_{n,t}(\omega) = Z_{m,t}(\omega) \text{ pour presque tout } \omega \in \{\omega \in \Omega,\, t \leqslant \tau_m(\omega)\}.$$

Démonstration. Puisque (τ_n) est une suite localisante, c'est une suite croissante et $\tau_m \leqslant \tau_n$ et ainsi

$$X_{m,t}(\omega) = X_t(\omega)\mathbb{1}_{t\leqslant\nu_m} = X_t(\omega)\mathbb{1}_{t\leqslant\tau_n} = X_{n,t}(\omega)$$

pour presque tout $\omega \in \{\omega \in \Omega,\, t \leqslant \nu_m\}$. Ainsi par la Proposition 6.12 nous obtenons que

$$\int_0^t X_{n,s}(\omega)dB_s = \int_0^t X_{m,s}(\omega)dB_s$$

presque sûrement sur $\{t \leqslant \tau_m\}$. □

On peut maintenant utiliser cette proposition pour construire l'intégrale d'Itô sur $\mathcal{L}^2_{\text{Loc}}$.

PROPOSITION 6.17. Il existe un processus continu $(Z_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ tel que

$$\mathbb{P}\left(Z_t = \lim_{n\to\infty} Z_{n,t}\right) = 1 \text{ pour tout } t \in [0,T].$$

Démonstration. Soit $N(\omega) = \min\{n \in \mathbb{N}, \tau_n(\omega) = T\}$, on sait que $\mathbb{P}(N < \infty) = 1$ car (τ_n) est une suite localisante. Soit $\Omega_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{t \mapsto Z_{n,t} \text{ est continue }\}$, alors nous savons que pour tout $\omega \in \Omega_0 \cap \{N < \infty\}$, nous pouvons définir $Z_t(\omega) := Z_{N(\omega),t}(\omega)$ et ainsi sur cette ensemble $t \mapsto Z_t(\omega)$ est un processus continu et est donc continu presque sûrement puisque $\mathbb{P}(\Omega_0 \cap \{N < \infty\}) = 1$. De plus, pour tout $t \in [0,T]$, par la proposition précédente, nous avons que

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} Z_{n,t} = Z_t\right) = \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} Z_{n,t} = Z_{N,t}\right) = 1.$$

□

Nous avons donc défini un processus continu que l'on dénote $\int_0^t X_s(\omega)dB_s$ pour $X \in \mathcal{L}^2_{\text{Loc}}$. Il y a par contre un problème dans notre définition, ce n'est pas clair qu'elle ne dépende pas de la suite localisante choisie. Nous allons régler ce problème avec la proposition suivante.

Proposition 6.18. Si (τ_n) et $(\hat{\tau}_n)$ sont deux suites localisantes de $X \in \mathcal{L}^2_{\text{Loc}}$ alors

$$\lim_{n\to\infty} Z_{n,t} := \lim_{n\to\infty}\int_0^t X_s \mathbb{1}_{s\leqslant\tau_n} dB_s = \lim_{n\to\infty}\int_0^t X_s \mathbb{1}_{s\leqslant\hat{\tau}_n} dB_s =: \lim_{n\to\infty} \hat{Z}_{n,t}$$

presque sûrement pour tout $t \in [0,T]$.

Démonstration. Soit $\nu_n = \min(\tau_n, \hat{\tau}_n)$ alors on voit que pour tout $n \geqslant m$,

$$\hat{Z}_{n,t} = Z_{n,t} \text{ presque sûrement sur } \{t \leqslant \nu_m\}.$$

On sait aussi que les processus convergent et donc

$$\lim_{n\to\infty} \hat{Z}_{n,t} = \lim_{n\to\infty} Z_{n,t} \text{ presque sûrement sur } \{t \leqslant \nu_m\}.$$

Mais $\bigcup_{m=1}^{\infty}\{\nu_m = T\} = \bigcup_{m=1}^{\infty}\{\tau_m = T\} \cap \{\hat{\tau}_m = T\}$ qui est de probabilité 1 car ce sont deux suites localisantes. Ainsi, nous avons que

$$\lim_{n\to\infty} Z_{n,t} = \lim_{n\to\infty} \hat{Z}_{n,t} \text{ presque sûrement pour tout } t \in [0,T].$$

□

Nous avons aussi une proposition similaire à la Proposition 6.12 pour l'int'egrale stochastique dans $\mathcal{L}^2_{\text{Loc}}$.

Proposition 6.19. Soient $X, Y \in \mathcal{L}^2_{\text{Loc}}$, et τ un temps d'arrêt tel que $X_s(\omega) = Y_s(\omega)$ pour tout $s \leqslant \tau$ alors

$$\int_0^t X_s(\omega)dB_s = \int_0^t Y_s(\omega)dB_s \text{ presque sûrement sur } \{t \leqslant \tau\}.$$

Il y a un cas particulier très important de l'intégrale stochastique lorsque l'on intègre une fonction déterminisite.

Proposition 6.20. Soit $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue déterministe alors le processus défini par

$$Z_t = \int_0^t f(s)dB_s$$

pour $t \in [0,T]$ est un processus gaussien centré à accroissements indépendants et de covariance

$$\text{Cov}(Z_t, Z_s) = \int_0^{s\wedge t} f^2(u)du.$$

Il faut faire bien attention que la gaussianité de l'intégrale stochastique vient du fait que la fonction intégrée est déterministe. En effet, nous avons vu que si on intègre par exemple le mouvement brownien lui-même alors

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}B_s^2 - \frac{t}{2}$$

qui n'est certainement pas gaussien puisque B_s^2 est le carré d'une variable gaussienne.

COROLLAIRE 6.21. Soit $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ tel que $f(s) > 0$ pour tout $s > 0$ et

$$\int_0^t f^2(s)ds \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty.$$

Soient $\tau_t = \inf\{u \geqslant 0,\ \int_0^u f^2(s)ds \geqslant t\}$ et $Y_t = \int_0^{\tau_t} f(s)dB_s$ alors $(Y_t)_{t\geqslant 0}$ est un mouvement brownien standard.

Démonstration. La preuve vient seulement du calcul de la covariance

$$\mathrm{Cov}(Y_t, Y_s) = \int_0^{\tau_s\wedge\tau_t} f^2(u)du = s \wedge t.$$

□

La preuve de la Proposition 6.20 vient de la proposition suivante qui donne une représentation de l'intégrale stochastique comme une approximation de Riemann du mouvement brownien.

PROPOSITION 6.22. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et $t_i = \frac{iT}{n}$ pour $0 \leqslant i \leqslant n$ alors nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n f(B_{t_{i-1}})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) = \int_0^T f(B_s)dB_s$$

où la convergence est en probabilité.

7. MARTINGALES LOCALES

7.1 Martingale locale et intégrale stochastique

Pour l'instant, nous avons vu deux propriétés particulièrement importantes de l'intégrale stochastique :

- Si $X \in \mathcal{H}^2$ alors $\left(\int_0^t X_s dB_s\right)_{t\geqslant 0}$ est une martingale continue.
- Si f est déterministe et continue alors $\left(\int_0^t f(s)dB_s\right)_{t\geqslant 0}$ est un processus gaussien centrée de covariance $\int_0^{s\wedge t} f^2(u)du$.

Que se passe-t-il alors si $X \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{Loc}}$?

DÉFINITION 7.1

Soit $(M_t)_{t\geqslant 0}$ un processus adapté à la filtration brownienne standard $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ alors $(M_t)_{t\geqslant 0}$ est une martingale locale si il existe une suite croissante de temps d'arrêt $(\tau_n)_n$ telle que $\tau_n \to \infty$ presque sûrement et telle que pour chaque k,

$$M_t^{(k)} = M_{t\wedge\tau_k} - M_0$$

est une martingale par rapport à $\{\mathcal{F}_t\}$.

On remarque l'on peut définir de la même façon une sous-martingale ou sur-martingale locale. On a lors le théorème suivant qui est immédiat avec les résultats que nous avons obtenus précédemment.

Théorème 7.2

Soit $X \in \mathcal{L}^2_{\text{Loc}}$ alors il existe une martingale locale continue Z_t telle que

$$\mathbb{P}\left(Z_t(\omega) = \int_0^t X_s(\omega)\mathrm{d}B_s\right) = 1.$$

De plus , on peut choisir $\tau_n(\omega) = \inf\{t \geqslant 0, \int_0^t X_s^2(\omega)\mathrm{d}B_s \geqslant n \text{ ou } t \geqslant T\}$ comme suite localisante.

Démonstration. La preuve est simplement basée sur le fait que $X_{n,s}(\omega) = X_s(\omega)\mathbb{1}_{s\leqslant\tau_n} \in \mathcal{H}^2$. □

Il est important de savoir qu'une martingale est toujours une martingale locale mais qu'une martingale locale n'est pas nécessairement une martingale. En particulier, on peut construire un exemple d'un processus $X \in \mathcal{L}^2_{\text{Loc}}$ qui n'est pas dans $\mathcal{H}^2$ et tel que son intégrale stochastique est une martingale locale stricte (c'est-à-dire n'est pas une martingale).

Soit U une variable aléatoire presque sûrement finie, mesurable par rapport à $\mathcal{F}_0$, et indépendante de B telle que $\mathbb{E}[|U|] = +\infty$. Alors si on définit, $X_s(\omega) = U(\omega)\mathbb{1}_{[0,T]}$, nous avons

$$\mathbb{P}\left(\int_0^T X_s(\omega)^2\mathrm{d}t < \infty\right) = \mathbb{P}\left(TU^2(\omega) < \infty\right) = \mathbb{P}(|U| < \infty) = 1$$

et ainsi $X \in \mathcal{L}^2_{\text{Loc}}$. Nous savons donc que $(\int_0^t X_s(\omega)\mathrm{d}B_s)_{s\geqslant 0}$ existe et est une martingale locale continue. Mais, nous pouvons facilement faire le calcul pour voir que

$$Z_t(\omega) = \int_0^t U(\omega)\mathbb{1}_{[0,T]}\mathrm{d}B_s = U(\omega)B_{t\wedge T}(\omega)$$

et donc

$$\mathbb{E}\left[|Z_t|\right] = \mathbb{E}\left[|UB_{t\wedge T}|\right] = \mathbb{E}[|U|]\mathbb{E}[|B_{t\wedge T}|] = +\infty$$

et la condition d'intégrabilité d'une martingale n'est pas satisfaite. Donc $(Z_t)_{t\geqslant 0}$ est bien une martingale locale stricte.

7.2 Premières propriétés des martingales locales

Nous allons voir dans cette sous-section des propriétés des martingales locales et en particulier leur lien avec les martingales.

Proposition 7.3. Si X est une martingale locale continue et $B \in \mathbb{R}$ tel que $|X_t| \leqslant B$ pour tout $t \geqslant 0$ alors X est une martingale.

Démonstration. Pour simplifier, supposons que $X_0 = 0$. Soient $(\tau_n)_n$ une suite localisante et $s \leqslant t$ alors nous savons que $(X_{t\wedge\tau_n})_t$ est une martingale et ainsi

$$\mathbb{E}\left[X_{t\wedge\tau_n}|\mathcal{F}_s\right] = X_{s\wedge\tau_n}.$$

Nous savons que $\tau_n \to \infty$ et ainsi $X_{t\wedge\tau_n} \xrightarrow[k\to\infty]{} X_t$, puisque $|X_{t\wedge\tau_n}| \leqslant B$ pour tout n, nous pouvons utiliser le théorème de convergence dominée pour voir ainsi que

$$\mathbb{E}\left[X_t|\mathcal{F}_s\right] = X_s.$$

□

Proposition 7.4. Soit X une martingale locale avec $\mathbb{E}[|X_0|] < \infty$ alors si $X_t \geqslant 0$ pour tout $t \geqslant 0$ alors X est une surmartingale et si en plus $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_0]$ alors $(X_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ est une martingale.

Démonstration. Soit $(\tau_n)_n$ une suite localisante, nous savons que

$$X_{s\wedge\tau_n} = \mathbb{E}\left[X_{t\wedge\tau_n}|F_s\right]$$

pour tout $s \leqslant t$. Ainsi, par le lemme de Fatou (que nous pouvons utiliser car $X \geqslant 0$),

$$\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}\left[\liminf_{n\to\infty} X_{t\wedge\tau_n}\middle|\mathcal{F}_s\right] \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[X_{t\wedge\tau_n}|\mathcal{F}_s\right] \leqslant \liminf_{n\to\infty} X_{s\wedge\tau_n} = X_s$$

et ainsi X est une surmartingale. En prenant l'espérance, on obtient

$$\mathbb{E}[X_t] \leqslant E[X_s]$$

et si on choisit $t \leqslant T$, on obtient

$$\mathbb{E}[X_0] \geqslant \mathbb{E}[X_s] \geqslant \mathbb{E}[X_t] \geqslant \mathbb{E}[X_T]$$

et donc $\mathbb{E}[X_t]$ est constante pour $0 \leqslant t \leqslant T$ si $\mathbb{E}[X_0] = \mathbb{E}[X_T]$. Si il existe $\Omega_0 \subset \Omega$ tel que $\mathbb{P}(\Omega_0) > 0$ et tel que $X_s(\omega) > \mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s](\omega)$ pour $\omega \in \Omega_0$, nous aurions $\mathbb{E}[X_s] > \mathbb{E}[X_t]$ ce qui est impossible donc $\mathbb{P}(\Omega_0) = 0$ et X est une martingale. ☐

> **PROPOSITION 7.5.** Si X est une martingale locale continue avec $X_0 = 0$ et si
>
> $$\tau_{A,B} = \inf\{t \geqslant 0, X_t \notin]-B, A[\}$$
>
> est tel que $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$ alors $\mathbb{E}[X_{\tau_{A,B}}] = 0$.

Démonstration. Soit $(\tau_n)_n$ une suite localisante alors $Y_t^{(k)} = X_{t\wedge\tau_k}$ est une martingale et par le théorème d'arrêt nous savons que $(Y_{t\wedge\tau_{A,B}}^{(k)})$ est aussi une martingale. Comme $\mathbb{P}(\tau_{A,B} < \infty) = 1$, nous avons que $Y_{t\wedge\tau_{A,B}}^{(k)} \xrightarrow[t\to\infty]{} Y_{\tau_{A,B}}^{(k)}$ presque sûrement et puisque $\sup_t |Y_{t\wedge\tau_{A,B}}^{(k)}| \leqslant A + B$, par le théorème de convergence dominée,

$$\mathbb{E}\left[Y_{\tau_{A,B}}^{(k)}\right] = \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left[Y_{t\wedge\tau_{A,B}}^{(k)}\right] = 0.$$

Puisque $\tau_k \to \infty$ presque sûrement, $Y_{\tau_{A,B}}^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} X_{\tau_{A,B}}$ par continuité de X et par le même théorème de convergence dominée nous avons que

$$\mathbb{E}[X_{\tau_{A,B}}] = \mathbb{E}\left[\lim_{k\to\infty} Y_{\tau_{A,B}}^{(k)}\right] = \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\left[Y_{\tau_{A,B}}^{(k)}\right] = 0.$$

☐

Nous avons aussi un autre critère lié à l'uniforme intégrabilité des martingales locales

> **PROPOSITION 7.6.** Soit M une martingale locale continue telle que pour tout $t > 0$,
>
> $$\{M_{t\wedge\tau}, \tau \text{ temps d'arrêt}\}$$
>
> est uniformément intégrale alors M est une martingale.

Démonstration. Soit $(\tau_n)_n$ une suite localisante pour M_t alors $(M_{t\wedge\tau_n})_{t\geqslant 0}$ est une martingale, nous avons que

$$M_{s\wedge\tau_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} M_s, \quad M_{t\wedge\tau_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} M_t.$$

Or, comme la suite $(M_{t\wedge\tau_n})$ est uniformément intégrable, nous avons que $M_{t\wedge\tau_n} \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} M_t \in L^1$ et

$$\mathbb{E}\left[M_{t\wedge\tau_n}|\mathcal{F}_s\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}\left[M_t|\mathcal{F}_s\right].$$

□

Nous finissons cette section par prouver un théorème d'arrêt pour les martingales locales.

PROPOSITION 7.7. Si X est une martingale locale et τ un temps d'arrêt alors $Y_t = X_{t\wedge\tau}$ est une martingale locale.

Démonstration. Soit $(\tau_n)_n$ une suite localisante alors $Y_{t\wedge\tau_n} = X_{t\wedge\tau\wedge\tau_n}$. Par définition de τ_n, nous savons que $(X_{t\wedge\tau_n})$ est une martingale et par le théorème d'arrêt de Doob, $(X_{t\wedge\tau_n\wedge\tau})$ est une martingale. Ainsi $(Y_{t\wedge\tau_n})_t$ est une martingale et Y est une martingale locale. □

7.3 Changement de temps de martingale locale

DÉFINITION 7.8

Si $\{\tau_t,\, 0 \leqslant t < \infty\}$ est un processus croissant continu à droite tel que pour tout $t \geqslant 0$, τ_t est un $\mathcal{F}_t$-temps d'arrêt alors $\{\tau_t,\, 0 \leqslant t < \infty\}$ est appelé un changement de temps.

L'idée d'un changement de temps est que si (M_t) est une martingale locale alors (M_{τ_t}) en est aussi une. Nous allons énoncer cette proposition dans un cas simple.

PROPOSITION 7.9. Sioent M une $\mathcal{F}_t$-martingale locale continue et τ_t un $\mathcal{F}_t$-changement de temps. Si $M_t(\omega)$ est constante sur $[\tau_{u^-}(\omega), \tau_u(\omega)]$ pour tout $u \geqslant 0$ et $\omega \in \Omega$ alors (M_{τ_t}) est une $\mathcal{F}_{\tau_t}$-martingale locale continue.

Démonstration. Soit $\{\sigma_n\}$ une suite localisante tel que $(M_{t\wedge\tau_n})$ soit une martingale continue bornée pour tout n. Alors nous savons que pour $\tau_s \leqslant \tau_t$, nous avons $\mathbb{E}\left[M_{\tau_t\wedge\sigma_n}|\mathcal{F}_{\tau_s}\right] = M_{\tau_s\wedge\sigma_n}$. Soit

$$\sigma_n^* = \inf\{t,\, \tau_t \geqslant \sigma_n\}$$

alors $\sigma_n^* \to \infty$ et σ_n^* est un $\mathcal{F}_{\tau_t}$-temps d'arrêt. On définit $Y_t = M_{\tau_t}$ alors nous avons

$$Y_{t\wedge\sigma_n^*} = M_{\tau_{t\wedge\sigma_n^*}} = M_{\tau_t\wedge\sigma_n}.$$

En effet, pour la second inégalité, nous voyons que si $t < \sigma_n^*$ alors $\tau_t < \sigma_n$ and thus

$$Y_{t\wedge\sigma_n^*} = Y_t = M_{\tau_t} = M_{\tau_t\wedge\sigma_n}$$

et si $t \geqslant \sigma_n^*$ alors comme (τ_t) est monotone, on voit que $\tau_t \geqslant \tau_{\sigma_n^*} \geqslant \sigma_n$ et de plus, $\sigma_n \in [\tau_{\sigma_n^*-}, \tau_{\sigma_n^*}]$, comme M est constante sur cet intervalle nous avons donc $M_{\sigma_n} = M_{\tau_{\sigma_n^*}}$. Ainsi la propriété de martingale donnée plus haut se traduit donc par

$$\mathbb{E}\left[Y_{t\wedge\sigma_n^*}|\mathcal{F}_{\tau_s}\right] = Y_{s\wedge\sigma_n^*}$$

et σ_n^* est une suite localisante pour la martingale locale Y. □

La propriété de constance sur l'intervalle $[\tau_{u^-}, \tau_u]$ est très importante. En effet, si on considère un mouvement brownien standard B et $\overline{\mathcal{F}} = \sigma(B_s, s \leqslant t)$ alors $\tau_t = \inf\{s,\, B_s > t\}$ est un changement de temps mais $Y_t = B_{\tau_t} = t$ n'est clairement pas une martingale locale. Cela vient du fait que B n'est pas constant sur les intervalles du type $[\tau_{u^-}, \tau_u]$.

7.4 Variation quadratique

DÉFINITION 7.10

Soit X un processus mesurable et adapté. Pour $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$, on dénote $\pi = \{t_0, \ldots, t_n\}$ une partition de $[0,t]$ et on définit

$$\mathrm{Q}_\pi(\mathrm{X}_t) = \sum_{i=0}^{n-1} (\mathrm{X}_{t_{i+1}} - \mathrm{X}_{t_i})^2$$

la π-variation quadratique de X. Si il existe un processus dénoté $\langle \mathrm{X} \rangle_t = \langle \mathrm{X}, \mathrm{X} \rangle_t = \langle \mathrm{X}_t, \mathrm{X}_t \rangle$ tel que pour toute suite de partition π_k telle que $\max_{0 \leqslant i \leqslant n_k - 1} |t_{i+1}^{(k)} - t_i^{(k)}| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ on a

$$\mathrm{Q}_{\pi_k}(\mathrm{X}_t) \xrightarrow[k\to\infty]{} \langle \mathrm{X} \rangle_t$$

alors $\langle \mathrm{X} \rangle$ est appelé la variation quadratique de X.

De même, nous pouvons définir la *covariation quadratique* que nous dénotons $\langle \mathrm{X}, \mathrm{Y} \rangle_t = \langle \mathrm{X}_t, \mathrm{Y}_t \rangle$ en considérant la limite de

$$\mathrm{Q}_\pi(\mathrm{X}_t, \mathrm{Y}_t) = \sum_{i=0}^{n-1} (\mathrm{X}_{t_{i+1}} - \mathrm{X}_{t_i})(\mathrm{Y}_{t_{i+1}} - \mathrm{Y}_{t_i}).$$

Nous énonçons le théorème d'existence de la variation quadratique d'une martingale locale sans le prouver. Nous prouverons à la place, l'existence de la variation quadratique des processus d'Itô dans la section suivante.

THÉORÈME 7.11

Soit M une martingale locale alors $\langle \mathrm{M} \rangle$ existe et est l'unique processus croissant tel que $(\mathrm{M}_t^2 - \langle \mathrm{M} \rangle_t)$ soit une martingale locale.

L'unicité vient du fait que la variation quadratique d'un processus à variation finie est nulle.

PROPOSITION 7.12. Soit M une martingale locale, si M est un processus à variation finie alors $\mathrm{M} = 0$ presque sûrement.

Démonstration. On rappelle que M est à variation finie signifie que pour presque tout $\omega \in \Omega$, $t \mapsto \mathrm{M}_t(\omega)$ est à variaton finie : pour tout $t > 0$, il existe une mesure signée μ telle que $\mathrm{M}_t = \mu([0,t])$ et en particulier $\mathrm{M}_0 = 0$. On définit la suite de temps d'arrêt

$$\tau_n = \inf \left\{ t \geqslant 0, \int_0^t |\mu| \geqslant n \right\}.$$

On définit $\mathrm{N}_t = \mathrm{M}_{t \wedge \tau_n}$ qui est une martingale locale avec $\mathrm{N}_0 = 0$. Nous avons $\int_0^\infty |d\mathrm{N}_s| \leqslant n$ et ainsi

$$\mathrm{N}_t = \int_0^t d\mathrm{N}_t \leqslant \int_0^\infty |d\mathrm{N}_s| \leqslant n$$

et est donc une martingale. Soit $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$ une partition de $[0,t]$ alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathrm{N}_t^2] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{N}_{t_{i+1}}^2 - \mathrm{N}_{t_i}^2\right] &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[\mathrm{N}_{t_{i+1}}^2 - 2\mathrm{N}_{t_i}^2 + \mathrm{N}_{t_i}^2\right] = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[\mathrm{N}_{t_{i+1}}^2 - 2\mathbb{E}\left[\mathrm{N}_{t_i}\mathrm{N}_{t_{i+1}} | \mathcal{F}_{t_i}\right] + \mathrm{N}_{t_i}^2\right] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[\mathrm{N}_{t_{i+1}}^2 - 2\mathrm{N}_{t_{i+1}}\mathrm{N}_{t_i} + \mathrm{N}_{t_i}^2\right] = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[(\mathrm{N}_{t_{i+1}} - \mathrm{N}_{t_i})^2\right]\end{aligned}$$

en utilisant le fait que N est une (vraie) martingale. Ainsi,

$$\mathbb{E}\left[N_t^2\right] = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[(N_{t_{i+1}} - N_{t_i})^2\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\sup_i |N_{t_{i+1}} - N_{t_i}| \sum_{i=0}^{n-1} |N_{t_{i+1}} - N_{t_i}|\right] \leqslant n\mathbb{E}\left[\sup_i |N_{t_{i+1}} - N_{t_i}|\right]$$

qui tend vers 0 lorsque $\mu(\pi) \to 0$ par continuité et convergence dominée. Ainsi, nous avons

$$\mathbb{E}\left[M_{t\wedge\tau_n}^2\right] = \mathbb{E}\left[N_t^2\right] = 0$$

et ainsi $\mathbb{E}\left[M_t^2\right] = 0$ en prenant $n \to \infty$ par le lemme de Fatou. □

Preuve de l'unicité dans le Théorème 7.11. Si il existe deux tels processus croissants que l'on dénote A et A′ alors $A - A'$ en tant que différence de deux fonctions croissantes est à variation finie et de plus

$$A_t - A'_t = (M_t^2 - A'_t) - (M_t^2 - A_t)$$

est une martingale locale à variation finie et est donc presque sûrement nulle. □

La variation quadratique nous donne d'autres conditions à vérifier pour qu'une martingale locale soit une vraie martingale.

THÉORÈME 7.13

Soit M une martingale locale avec $M_0 = 0$ alors

(i) M est une martingale bornée dans L^2 est équivalent à $\mathbb{E}[\langle M\rangle_\infty] < \infty$. De plus, si ceci est vrai alors $(M_t^2 - \langle M\rangle_t)$ est une martingale uniformément intégrable et $\mathbb{E}[M_\infty^2] = \mathbb{E}[\langle M\rangle_\infty]$.

(ii) M est une martingale dans L^2 i.e pour tout $t \geqslant 0$, $M_t \in L^2$ est équivalent à $\mathbb{E}[\langle M\rangle_t] < \infty$ pour tout $t \geqslant 0$. De plus, si ceci est vrai alors $(M_t^2 - \langle M\rangle_t)$ est une martingale.

Démonstration. Prouvons l'implication $\Rightarrow$ pour (i). Soit $T > 0$ alors nous savons que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leqslant t\leqslant T} M_t^2\right] \leqslant 4\mathbb{E}[M_T^2] \leqslant 4\sup_{t\geqslant 0}\mathbb{E}\left[M_t^2\right]$$

et en prenant $T \to \infty$, nous obtenons

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\geqslant 0} M_t^2\right] < \infty.$$

Soit $(\tau_n)_n$ une suite localisante de la martingale locale $(M_t^2 - \langle M\rangle)$ alors $\mathbb{E}\left[M_{t\wedge\tau_n}^2 - \langle M\rangle_{t\wedge\tau_n}\right] = 0$ et ainsi

$$\mathbb{E}\left[\langle M\rangle_{t\wedge\tau_n}\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\sup_{s\geqslant 0} M_s^2\right] < \infty.$$

En prenant $n \to \infty$ puis $t \to \infty$, nous obtenons

$$\mathbb{E}\left[\langle M\rangle_\infty\right] < \infty.$$

Pour l'implication $\Leftarrow$, nous considérons encore une suite localisante τ_n et

$$\nu_n = \tau_n \wedge \inf\{t \geqslant 0,\ |M_t| \geqslant n\}$$

une autre suite localisante telle que $M_{t\wedge\tau_n}$ soit bornée. Alors nous avons

$$\mathbb{E}\left[M_{t\wedge\nu_n}^2\right] = \mathbb{E}\left[\langle M\rangle_{t\wedge\nu_n}\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\langle M\rangle_\infty\right] < \infty$$

et ainsi par le lemme de Fatou,

$$\mathbb{E}\left[M_t^2\right] = \mathbb{E}\left[\liminf_{n\to\infty} M_{t\wedge\nu_n}^2\right] \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[M_{t\wedge\nu_n}^2\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\langle M\rangle_\infty\right].$$

et M est donc bornée dans L^2. Puisque $(M_{t\wedge\nu_n})$ est bornée dans L^2, elle est uniformément intégrable et ainsi

$$M_{t\wedge\nu_n} \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} M_t$$

et ainsi comme $\mathbb{E}\left[M_{t\wedge\nu_n}|\mathcal{F}_s\right] = M_{s\wedge\nu_n}$, nous avons $\mathbb{E}\left[M_t|\mathcal{F}_s\right]$ et finalement M est une martingale bornée dans L^2. De plus,

$$|M_t^2 - \langle M\rangle_t| \leqslant \sup_{t\geqslant 0} M_t^2 + \langle M\rangle_\infty \in L^1$$

et nous savons donc que $(M_t^2 - \langle M\rangle_t)$ est une vraie martingale.

Pour prouver (ii), il suffit de fixer t et de considérer la martingale locale $(M_{s\wedge t})_s$. □

On remarque que les mêmes propriétés s'appliquent pour la covariation quadratique

Proposition 7.14. Soient M et N deux martingales locales alors $\langle M, N\rangle$ est l'unique processus à variation finie tel que $(M_tN_t - \langle M, N\rangle_t)$ soit une martingale locale.

De plus, si M et N sont deux martingales bornées dans L^2 alors $MN - \langle M, N\rangle$ est une martingale uniformément intégrable et $\langle M, N\rangle_\infty$ est bien défini et vérifie $\mathbb{E}[M_\infty N_\infty] - \mathbb{E}[M_0N_0] = \mathbb{E}[\langle M, N\rangle_\infty]$.

La variation quadratique peut aussi être utilise pour contrôler l'ordre de grandeur des martingales locales.

Théorème 7.15: Inégalités de Burkholder-Gundy-Davis

Soit $p > 0$ alors il existe deux constantes positives c_p et C_p telles que pour toute martingale locale M continue avec $M_0 = 0$,

$$c_p\mathbb{E}\left[\langle M\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\left(\sup_{s\geqslant 0}|M_s|\right)^p\right] \leqslant C_p\mathbb{E}\left[\langle M\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}\right].$$

On remarque tout d'abord que l'on peut remplacer ∞ par t en prenant la martingale locale $(M_{s\wedge t})$. Nous allons prouver l'inégalité de gauche pour $p \geqslant 4$ et l'inégalité de droite pour $p \geqslant 2$. La preuve est basée sur l'application de la formule d'Itô que nous verrons dans la prochaine section.

Démonstration. Soit $p \geqslant 2$ et $\tau_n = \inf\{t \geqslant 0, |M_t| \geqslant n\}$ alors $N_t = M_{t\wedge\tau_n}$ est bornée. Si on considère $f(x) = |x|^p$ alors $f \in \mathcal{C}^2$ pour $p \geqslant 2$. De plus, $f'(x) = p|x|^{p-1}\text{signe}(x)$ et $f''(x) = p(p-1)|x|^{p-2}$. Ainsi par la formule d'Itô,

$$d|N_t|^p = p|N_t|^{p-1}\text{signe}(N_t)dN_t + \frac{1}{2}p(p-1)|N_t|^{p-2}d\langle N\rangle_t.$$

On voit que le premier terme est un intégrande dans $\mathcal{H}^2$ et ainsi en prenant l'espérance, nous obtenons

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|N_t|^p\right] = \frac{p(p-1)}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^t |N_s|^{p-2}d\langle N\rangle_s\right] &\leqslant \frac{p(p-1)}{2}\mathbb{E}\left[\left(\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|N_s|\right)^{p-2}\langle N\rangle_t\right] \\ &\leqslant \frac{p(p-1)}{2}\mathbb{E}\left[\left(\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|N_s|\right)^p\right]^{\frac{p-2}{p}}\mathbb{E}\left[\langle N\rangle_t^{\frac{p}{2}}\right]^{\frac{2}{p}}.\end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'inégalité de Hölder avec $\frac{p-2}{p} + \frac{2}{p} = 1$. En utilisant l'inégalité de Doob L^p, nous avons

$$\mathbb{E}\left[\left(\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|\mathrm{N}_s|\right)^p\right] \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\left[|\mathrm{N}_t|^p\right] \leqslant \left(\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \frac{p(p-1)}{2}\right)\mathbb{E}\left[\left(\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|\mathrm{N}_s|\right)^p\right]^{\frac{p-2}{p}} \mathbb{E}\left[\langle \mathrm{N}\rangle_t^{\frac{p}{2}}\right]^{\frac{2}{p}}.$$

En réarrangeant bien, on obtient

$$\mathbb{E}\left[\left(\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|\mathrm{N}_s|\right)^p\right] \leqslant \mathrm{C}_p\mathbb{E}\left[\langle \mathrm{N}\rangle_t^{\frac{p}{2}}\right]$$

et on obtient bien le résultat en prenant $n \to \infty$.

Regardons l'autre inégalité pour $p \geqslant 4$. De la même manière on peut se ramener au cas où $\langle \mathrm{M}\rangle_t$ est bornée. Alors nous avons

$$\mathrm{M}_t^2 = 2\int_0^t \mathrm{M}_s \mathrm{d}\mathrm{M}_s + \langle \mathrm{M}\rangle_t$$

et ainsi

$$\mathbb{E}\left[\langle \mathrm{M}\rangle_t^{\frac{p}{2}}\right] = \mathbb{E}\left[\left(\mathrm{M}_t^2 - 2\int_0^t \mathrm{M}_s\mathrm{d}\mathrm{M}_s\right)^{\frac{p}{2}}\right] \leqslant a_p\mathbb{E}\left[|\mathrm{M}_t|^p + \left|\int_0^t \mathrm{M}_s\mathrm{d}\mathrm{M}_s\right|^{\frac{p}{2}}\right]$$
$$\leqslant a_p\mathbb{E}\left[\left(\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|\mathrm{M}_s|\right)^p\right] + \mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \mathrm{M}_s\mathrm{d}\mathrm{M}_s\right|^{\frac{p}{2}}\right].$$

En prenant $t \to \infty$, on obtient

$$\mathbb{E}\left[\langle \mathrm{M}\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}\right] \leqslant a_p\mathbb{E}\left[\left(\sup_{s\geqslant 0}|\mathrm{M}_s|\right)^p\right] + \mathbb{E}\left[\left|\int_0^\infty \mathrm{M}_s\mathrm{d}\mathrm{M}_s\right|^{\frac{p}{2}}\right].$$

Si on considère $\mathrm{N}_t = \int_0^t \mathrm{M}_s\mathrm{d}\mathrm{M}_s$ alors N_t est une martingale locale et $\mathrm{d}\langle \mathrm{N}\rangle_t = \mathrm{M}_t^2\mathrm{d}\langle \mathrm{M}\rangle_t$ et $\langle \mathrm{N}\rangle_\infty = \int_0^\infty \mathrm{M}_t^2\mathrm{d}\langle \mathrm{M}\rangle_t$. On peut alors utiliser l'inégalité que nous venons de prouver pour $p \geqslant 2$ et voir ainsi que

$$\mathbb{E}\left[\langle \mathrm{M}\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}\right] \leqslant a_p\mathbb{E}\left[\left(\sup_{s\geqslant 0}|\mathrm{M}_s|\right)^p\right] + b_p\mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty \mathrm{M}_t^2\mathrm{d}\langle \mathrm{M}\rangle_t\right)^{\frac{p}{4}}\right]$$
$$\leqslant b_p\mathbb{E}\left[\left(\sup_{s\geqslant 0}|\mathrm{M}_s|\right)^p\right] + b_p\mathbb{E}\left[\left(\sup_{t\geqslant 0}\mathrm{M}_t^2\right)^{\frac{p}{4}}\left(\langle \mathrm{M}\rangle_\infty\right)^{\frac{p}{4}}\right]$$
$$\leqslant b_p\mathbb{E}\left[\left(\sup_{s\geqslant 0}|\mathrm{M}_s|\right)^p\right] + b_p\sqrt{\mathbb{E}\left[\left(\sup_{s\geqslant 0}|\mathrm{M}_t|\right)^p\right]}\sqrt{\mathbb{E}\left[\langle \mathrm{M}\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}\right]}$$

avec $b_p = a_p\mathrm{C}_{\frac{p}{2}} \geqslant a_p$. En dénotant $x = \sqrt{\mathbb{E}\left[\langle \mathrm{M}\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}\right]}$ et $y = \sqrt{\mathbb{E}\left[\left(\sup_{s\geqslant 0}|\mathrm{M}_s|\right)^p\right]}$ alors on obtient l'équation

$$x^2 - b_pxy - b_py^2 \leqslant 0.$$

Ainsi, x doit être plus petit que la plus grande racine λ_+ et ainsi

$$x \leqslant \lambda_+ = \frac{b_py + b_py\sqrt{1+\frac{4}{b_p}}}{2} \leqslant \left(\frac{b_p + b_p\sqrt{1+\frac{4}{b_p}}}{2}\right)y =: \frac{1}{\sqrt{c_p}}y$$

□

On peut déduire des inégalités de BDG un critère intéréssant pour prouver qu'une martingale locale est une vraie martingale u.i.

COROLLAIRE 7.16. Soit M une martingale locale telle que $M_0 = 0$, si $\mathbb{E}\left[\sqrt{\langle M\rangle_\infty}\right] < \infty$ alors M est une martingale uniformément intégrable.

Démonstration. On voit que $\mathbb{E}\left[\sup_{t\geqslant 0}|M_t|\right] < \infty$ et ainsi comme $|M_t| \leqslant \sup_{s\geqslant 0}|M_s| \in L^1$, on sait que M est une martingale uniformément intégrable. □

8. FORMULE D'ITÔ

8.1 Formule d'Itô pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

On a vu par un calcul explicite que $\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{t}{2}$. Ainsi, il se passe quelque chose de différent par rapport à la règle de la chaîne habituelle. Ceci est résumé dans la formule d'Itô.

THÉORÈME 8.1: Formule d'Itô
Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^2$ alors

$$f(B_t) = f(0) + \int_0^t f'(B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)ds$$

que l'on écrit parfois

$$df(B_t) = f'(B_t)dB_t + \frac{1}{2}f''(B_t)dt.$$

Par exemple, en prenant $f(x) = \frac{x^2}{2}$ alors on retrouve la formule $\frac{1}{2}B_t^2 = \int_0^t B_s dB_s + \frac{t}{2}$.
On remarque aussi que tout est bien défini : puisque $f \in \mathcal{C}^2$, nous avons que $f'(B_t) \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{Loc}}$.

Démonstration. Donnons tout d'abord le plan de la preuve pour $f \in \mathcal{C}^2_c$ une fonction $\mathcal{C}^2$ à support compact. Dans ce cas,

$$f(B_t) - f(0) = \sum_{i=1}^n (f(B_{t_i}) - f(B_{t_{i-1}}))$$

avec $t_i = \frac{it}{n}$ pour $i \in \{0, \dots, n\}$. Comme $f \in \mathcal{C}^2$ alors

$$f(y) - f(x) = (y-x)f'(x) + \frac{(y-x)^2}{2}f''(x) + r(x,y)$$

avec

$$r(x,y) = \int_x^y (y-u)(f''(u) - f''(x))du.$$

On peut borner r de telle sorte

$$|r(x,y)| \leqslant \int_x^y |y-u| \sup_{x\leqslant v\leqslant y}|f''(v) - f''(x)|du = \frac{1}{2}(y-x)^2 h(x,y)$$

avec $h(x,y) = \sup_{x\leqslant v\leqslant y}|f''(v) - f''(x)|$ qui est uniformément continue, bornée et telle que $h(x,x) = 0$. Ainsi nous avons

$$f(B_t) - f(0) = \sum_{i=1}^n (f(B_{t_i}) - f(B_{t_{i-1}})) = \sum_{i=1}^n \left[(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})f'(B_{t_i}) + \frac{1}{2}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 f''(B_{t_i}))\right] + \varepsilon_n.$$

Et nous avons

$$|\varepsilon_n| \leqslant \sum_{i=1}^n (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 h(B_{t_{i-1}}, B_{t_i}).$$

Nous avons donc trois buts dans notre preuve :

(I) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{B}_{t_i}-\mathrm{B}_{t_{i-1}})f'(\mathrm{B}_{t_i}) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \int_0^t f'(\mathrm{B}_t)\mathrm{dB}_t.$

(II) $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{B}_{t_i}-\mathrm{B}_{t_{i-1}})^2 f''(\mathrm{B}_{t_{i-1}}) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \frac{1}{2}\int_0^t f''(\mathrm{B}_t)\mathrm{d}t$

(III) $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0.$

Considérons le premier but (**I**). Soit $\mathrm{M}\in\mathbb{R}_+$, on considère

$$\tau_{\mathrm{M}} = t\wedge \inf\{s\in[0,t],\ |\mathrm{B}_s|\geqslant \mathrm{M}\}$$

et f_{M} qui est une fonction continue à support compact telle que $f_{\mathrm{M}}(x)=f(x)$ pour tout $x\in[-\mathrm{M},\mathrm{M}]$. Alors nous avons que $f_{\mathrm{M}}(\mathrm{B}_t)\in\mathcal{H}^2([0,t])$. Définissons le processus élémentaire

$$\mathrm{X}_{n,s}(\omega)=\sum_{i=1}^{n} f_{\mathrm{M}}(\mathrm{B}_{t_{i-1}}(\omega))\mathbb{1}_{t_{i-1}<s\leqslant t_i}\in\mathcal{H}_0^2.$$

Alors nous avons

$$\begin{aligned}\|\mathrm{X}_n-f_{\mathrm{M}}(\mathrm{B})\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{d}\mathbb{P}\times\mathrm{d}t)} &= \mathbb{E}\left[\int_0^t\sum_{i=1}^{n}(f_{\mathrm{M}}(\mathrm{B}_{t_{i-1}})-f_{\mathrm{M}}(\mathrm{B}_s))^2\mathbb{1}_{t_{i-1}<s\leqslant t_i}\mathrm{d}s\right]\\ &\leqslant \frac{t}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\sup_{t_{i-1}<s\leqslant t_i}\left(f_{\mathrm{M}}(\mathrm{B}_{t_{i-1}})-f_{\mathrm{M}}(\mathrm{B}_s)\right)^2\right]\end{aligned}$$

Comme f_{M} est continue à support compact, nous avons que le module de continuité

$$\mu(h)=\sup\left\{|f_{\mathrm{M}}(x)-f_{\mathrm{M}}(y)|\,,\ |x-y|\leqslant h\right\}\xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

Ainsi,

$$\|\mathrm{X}_n-f_{\mathrm{M}}(\mathrm{B})\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{d}\mathbb{P}\times\mathrm{d}t)}\leqslant\frac{t}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\mu\left(\sup_{t_{i-1}<s\leqslant t_i}|\mathrm{B}_{t_{i-1}}-\mathrm{B}_{t_i}|\right)^2\right]\leqslant t\delta_n$$

avec $\delta_n\to 0$ as $n\to\infty$ où l'on a utilisé le théorème de convergence dominée car $\mu(h)$ est bornée. Nous pouvons finir par le fait que l'on sait par l'isométrie d'Itô que

$$\sum_{i=1}^{n} f_{\mathrm{M}}(\mathrm{B}_{t_{i-1}})(\mathrm{B}_{t_i}-\mathrm{B}_{t_{i-1}})=\int_0^t \mathrm{X}_{n,s}\mathrm{dB}_s\xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{L}^2}\int_0^t f_{\mathrm{M}}(\mathrm{B}_s)\mathrm{dB}_s.$$

La convergence L^2 entraîne bien la convergence en probabilité et nous avons donc fini avec le but (**I**) pour f_{M} à la place de f. Nous allons maintenant utiliser notre temps d'arrêt τ_{M}. En effet, pour tout $\omega\in\{\tau_{\mathrm{M}}=t\}$ alors $f(\mathrm{B}_s(\omega))=f_{\mathrm{M}}(\mathrm{B}_s(\omega))$ pour tout $s\in[0,t]$ et par la persistance de l'identité

$$\int_0^t f(\mathrm{B}_s)\mathrm{dB}_s=\int_0^t f_{\mathrm{M}}(\mathrm{B}_s)\mathrm{dB}_s \text{ p.s sur } \{\tau_{\mathrm{M}}=t\}.$$

Soit $\varepsilon>0$, et

$$\mathrm{A}_n(\varepsilon)=\left\{\omega\in\Omega,\ \left|\sum_{i=1}^{n} f(\mathrm{B}_{t_{i-1}}(\omega))(\mathrm{B}_{t_i}(\omega)-\mathrm{B}_{t_{i-1}}(\omega))-\int_0^t f(\mathrm{B}_s(\omega))\mathrm{dB}_s\right|\geqslant\varepsilon\right\}.$$

alors nous voulons montrer que $\mathbb{P}(\mathrm{A}_n(\varepsilon))\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ mais nous pouvons écrire

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}_n(\varepsilon))=\mathbb{P}(\mathrm{A}_n(\varepsilon)\cap\{\tau_{\mathrm{M}}<t\})+\mathbb{P}(\mathrm{A}_n(\varepsilon)\cap\{\tau_{\mathrm{M}}=t\})\leqslant\mathbb{P}(\tau_{\mathrm{M}}<t)+\mathbb{P}(\mathrm{A}_n(\varepsilon)\cap\{\tau_{\mathrm{M}}=t\}).$$

Soit $\delta > 0$ alors il existe $\mathrm{M} > 0$ tel que $\mathbb{P}(\tau_{\mathrm{M}} < t) \leqslant \delta$, pour le deuxième terme, nous avons

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}_n(\varepsilon) \cap \{\tau_{\mathrm{M}} = t\}) \leqslant \mathbb{P}\left(\left\{\left|\sum_{i=1}^n f_{\mathrm{M}}(\mathrm{B}_{t_{i-1}})(\mathrm{B}_{t_i} - \mathrm{B}_{t_{i-1}}) - \int_0^t f_{\mathrm{M}}(\mathrm{B}_s)\mathrm{dB}_s\right| \geqslant \varepsilon\right\}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

vu que l'on a prouvé la convergence en probabilité pour f_{M}. Cela finit la preuve de (**I**).

Pour la preuve de (**II**), nous commençons par centrer notre terme et considérer

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n f''(\mathrm{B}_{t_{i-1}})\left((\mathrm{B}_{t_i} - \mathrm{B}_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1})\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n f''(\mathrm{B}_{t_{i-1}})(t_i - t_{i-1}).$$

Comme la fonction $s \mapsto f''(\mathrm{B}_s(\omega))$ est continue presque sûrement nous avons que

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n f''(\mathrm{B}_{t_{i-1}})(t_i - t_{i-1}) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} \frac{1}{2}\int_0^t f''(\mathrm{B}_s)\mathrm{d}s.$$

Si on dénote

$$\widetilde{\mathrm{B}}_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n f''(\mathrm{B}_{t_{i-1}})\left((\mathrm{B}_{t_i} - \mathrm{B}_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1})\right)$$

alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\widetilde{\mathrm{B}}_n^2\right] &= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[f''(\mathrm{B}_{t_{i-1}})^2\left((\mathrm{B}_{t_i} - \mathrm{B}_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1})\right)^2\right] \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{i<j}\mathbb{E}\left[f''(\mathrm{B}_{t_{i-1}})f''(\mathrm{B}_{t_{j-1}})\left((\mathrm{B}_{t_i} - \mathrm{B}_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1})\right)\left((\mathrm{B}_{t_j} - \mathrm{B}_{t_{j-1}})^2 - (t_j - t_{j-1})\right)\right].\end{aligned}$$

Si on regarde le deuxième terme, on remarque que chaque terme est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_{t_{j-1}}$ sauf le dernier qui en est indépendant par l'indépendance des accroissements du mouvement brownien. De telle sorte que l'on peut réécrire cette espérance comme

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[f''(\mathrm{B}_{t_{i-1}})f''(\mathrm{B}_{t_{j-1}})\left((\mathrm{B}_{t_i} - \mathrm{B}_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1})\right)\mathbb{E}\left[(\mathrm{B}_{t_j} - \mathrm{B}_{t_{j-1}})^2 - (t_j - t_{j-1})\middle|\mathcal{F}_{t_{j-1}}\right]\right] \\ &\quad = \mathbb{E}\left[f''(\mathrm{B}_{t_{i-1}})f''(\mathrm{B}_{t_{j-1}})\left((\mathrm{B}_{t_i} - \mathrm{B}_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1})\right)\mathbb{E}\left[(\mathrm{B}_{t_j} - \mathrm{B}_{t_{j-1}})^2 - (t_j - t_{j-1})\right]\right] = 0.\end{aligned}$$

comme l'on a centré le terme avec le mouvement brownien au carré. Ainsi, seul le premier terme nous importe dans l'expression de $\mathbb{E}[\widetilde{\mathrm{B}}_n^2]$ ci-dessus et on peut borner

$$\mathbb{E}\left[\widetilde{\mathrm{B}}_n^2\right] \leqslant \frac{1}{4}\|f''\|_{\infty,[0.t]}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[\left((\mathrm{B}_{t_i} - \mathrm{B}_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1})\right)^2\right].$$

De plus, les $\mathrm{B}_{t_i} - \mathrm{B}_{t_{i-1}}$ sont identiquement distribués comme $\mathcal{N}\left(0, \frac{t}{n}\right)$ et ainsi on peut simplement calculer l'espérance pour obtenir la borne

$$\mathbb{E}\left[\widetilde{\mathrm{B}}_n^2\right] \leqslant \frac{1}{4}\|f''\|_{\infty,[0,t]}\sum_{i=1}^n \frac{2t^2}{n^2} = \frac{t^2\|f''\|_\infty}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Cela nous confirme donc bien le point (**II**) et

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n(\mathrm{B}_{t_i} - \mathrm{B}_{t_{i-1}})^2 f''(\mathrm{B}_{t_{i-1}}) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \frac{1}{2}\int_0^t f''(\mathrm{B}_t)\mathrm{d}t.$$

Finalement, pour le point (**III**), nous voulons prouver que $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$ et on sait déjà que nous avons la borne

$$|\varepsilon_n| \leqslant \sum_{i=1}^n(\mathrm{B}_{t_i} - \mathrm{B}_{t_{i-1}})^2 h(\mathrm{B}_{t_{i-1}}, \mathrm{B}_{t_i}).$$

Par l'inégalité de Cauchy–Schwarz, nous avons

$$\mathbb{E}\left[|\varepsilon_n|\right] \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\mathbb{E}\left[(\mathrm{B}_{t_i} - \mathrm{B}_{t_{i-1}})^4\right]} \sqrt{\mathbb{E}\left[h^2(\mathrm{B}_{t_{i-1}}, \mathrm{B}_{t_i})\right]} \leqslant \sqrt{\frac{3t^2}{n^2}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\mathbb{E}\left[h^2(\mathrm{B}_{t_{i-1}}, \mathrm{B}_{t_i})\right]}.$$

Nous savons que h est uniformément continue et que $h(x,x) = 0$, donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que pour tout x, y avec $|x - y| \leqslant \delta$, nous avons $|h(x,y)| \leqslant \varepsilon$. Donc en particulier, pour un $\varepsilon > 0$ donné

$$\mathbb{E}\left[h^2(\mathrm{B}_{t_{i-1}}, \mathrm{B}_{t_i})\right] \leqslant \varepsilon^2 + \|h^2\|_\infty \mathbb{P}\left(|\mathrm{B}_{t_i} - \mathrm{B}_{t_{i-1}}| \geqslant \delta\right) \leqslant \varepsilon^2 + \frac{\|h^2\|_\infty}{\delta^2} \mathbb{E}\left[|\mathrm{B}_{t_i} - \mathrm{B}_{t_{i-1}}|^2\right] \leqslant \varepsilon^2 + \frac{\|h^2\|_\infty t}{\delta^2 n}.$$

Donc pour n assez grand, nous avons que par exemple

$$\mathbb{E}\left[|\varepsilon_n|\right] \leqslant \sqrt{\frac{3t^2}{n^2}} n \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{\|h^2\|_\infty t}{\delta^2 n}} \leqslant 2\sqrt{3} t \varepsilon$$

et ainsi $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{L}^1} 0$ qui implique $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$.

Nous avons convergence en probabilité de tous les termes de notre développement de Taylor. Maintenant on sait que si $\mathrm{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \mathrm{Y}$ alors il existe une sous-suite $(n_k)_k$ telle que $\mathrm{X}_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{p.s} \mathrm{Y}$. Ainsi pour chaque t fixé, nous pouvons obtenir une limite presque sûre de chaque terme : pour tout $t \in [0, \mathrm{T}]$, il existe Ω_t avec $\mathbb{P}(\Omega_t) = 1$ tel que pour $\omega \in \Omega_t$,

$$f(\mathrm{B}_t(\omega)) = f(0) + \int_0^t f'(\mathrm{B}_s(\omega)) \mathrm{d}\mathrm{B}_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(\mathrm{B}_s(\omega)) \mathrm{d}s.$$

Nous ne pouvons pas prendre directement l'intersection sur tous les t mais nous pouvons utiliser la continuité de tous les termes sur un ensemble de probabilité 1 que nous appelons Ω'. Alors nous pouvons obtenir l'égalité sur $\bigcap_{t\in\mathbb{Q}} \Omega_t \cap \Omega'$ qui est un événement de probabilité 1 comme intersection dénombrable d'événements de probabilité 1 et par continuité de tous les termes sur Ω', nous avons la formule d'Itô. Le résultat est donc démontré pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_c^2$.

Si $f \in \mathcal{C}^2$, alors on peut localiser de la même façon que l'on a fait plus haut. Pour $\mathrm{M} \in \mathbb{R}_+$, on considère une fonction $f_\mathrm{M} \in \mathcal{C}_c^2$ telle que $f_\mathrm{M}(x) = f(x)$ pour tout $x \in [-\mathrm{M}, \mathrm{M}]$. Alors on sait que la formule d'Itô est vraie et donc

$$f_\mathrm{M}(\mathrm{B}_t) = f_\mathrm{M}(0) + \int_0^t f'_\mathrm{M}(\mathrm{B}_s) \mathrm{d}\mathrm{B}_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''_\mathrm{M}(\mathrm{B}_s) \mathrm{d}s.$$

Soit $\tau_\mathrm{M} = \inf\{t, |\mathrm{B}_t| \geqslant \mathrm{M}\}$, alors pour $\omega \in \{s \leqslant \tau_\mathrm{M}\}$ alors $f'(\mathrm{B}_s) = f'_\mathrm{M}(\mathrm{B}_s)$ et on sait donc que

$$\int_0^t f'(\mathrm{B}_s(\omega)) \mathrm{d}\mathrm{B}_s = \int_0^t f'_\mathrm{M}(\mathrm{B}_s(\omega)) \mathrm{d}\mathrm{B}_s \text{ pour } \omega \in \{t \leqslant \tau_\mathrm{M}\}$$

et aussi sur ce même ensemble, $f(\mathrm{B}_t(\omega)) = f_\mathrm{M}(\mathrm{B}_t(\omega))$ et $\int_0^t f''(\mathrm{B}_s(\omega)) \mathrm{d}s = \int_0^t f''_\mathrm{M}(\mathrm{B}_s(\omega)) \mathrm{d}s$. Ainsi la formule d'Itô est vraie sur $\{t \leqslant \tau_\mathrm{M}\}$. Comme nous avons que $\tau_\mathrm{M} \xrightarrow[\mathrm{M}\to\infty]{p.s} +\infty$ alors nous obtenons bien que la formule est valide sur un événement de probabilité 1. □

On remarque que l'on peut réécrire la formule d'Itô de la façon suivante

$$\int_0^t f'(\mathrm{B}_s) \mathrm{d}\mathrm{B}_s = f(\mathrm{B}_s) - f(0) - \frac{1}{2} \int_0^t f''(\mathrm{B}_s) \mathrm{d}s.$$

Cela nous donne donc une manière de calculer une intégrale stochastique en reconnaissant une dérivée. Par exemple,

$$\int_0^t \mathrm{B}_s^2 \mathrm{d}\mathrm{B}_s = \frac{1}{3} \mathrm{B}_t^3 - \int_0^t \mathrm{B}_s \mathrm{d}s$$

où on a reconnu la fonction $f(x) = \frac{x^3}{3}$.

8.2 Première généralisation $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$

La version précédente est la version la plus simple de la formule d'Itô pour une fonction d'un seul mouvement brownien. Nous allons voir maintenant des généralisations sans détailler les preuves qui sont très proches de la preuve initiale. La première est pour des fonctions qui sont de t et de B_t, par exemple nous avons vu que le processus suivant est une martingale

$$X_t = \exp\left(\alpha B_t - \frac{\alpha^2 t}{2}\right) =: f(t, B_t)$$

avec $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t,x) = \exp\left(\alpha x - \frac{\alpha^2 t}{2}\right)$. En tant que fonction de deux variables (t et B_t) la formule d'Itô va différer. On rappelle que $\mathcal{C}^{p,q}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ est l'espace des fonctions qui ont p dérivées continues en la première variable (ici t) et q dérivées continues en la deuxième variable (ici x).

Théorème 8.2

Si $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dans $\mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ alors

$$f(t, B_t) = f(0,0) + \int_0^t \partial_t f(s, B_s) ds + \int_0^t \partial_x f(t, B_t) dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \partial^2_{xx} f(t, B_t) ds$$

que l'on écrit parfois

$$df(t, B_t) = \partial_t f(t, B_t) dt + \partial_x f(t, B_t) dB_t + \frac{1}{2}\partial^2_{xx} f(t, B_t) dt.$$

Prenons comme exemple la fonction ci-dessus $f(t,x) = \exp\left(\alpha x - \frac{\alpha^2 t}{2}\right)$, alors si on calcule les dérivées, nous obtenons

$$\partial_t f(t,x) = -\frac{\alpha^2}{2} f(t,x), \quad \partial_x f(t,x) = \alpha f(t,x), \quad \partial^2_{xx} f(t,x) = \alpha^2 f(t,x).$$

Ainsi,

$$df(t, B_t) = -\frac{\alpha^2}{2} f(t, B_t) dt + \alpha f(t, B_t) dB_t + \frac{\alpha^2}{2} f(t, B_t) = \alpha f(t, B_t) dB_t$$

et donc

$$f(t, B_t) = \alpha \int_0^t \exp\left(\alpha B_t - \frac{\alpha^2 t}{2}\right) dB_t.$$

On peut donc écrire f comme une intégrale stochastique et en vérifiant que l'intégrande est dans $\mathcal{H}^2$, nous avons bien une preuve que $f(t, B_t)$ est une martingale. Cela peut se généraliser à une proposition.

Proposition 8.3. Si $f \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ et si $\partial_t f = -\frac{1}{2}\partial_x f$ alors $X_t = f(t, B_t)$ est une martingale locale. De plus, si

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T (\partial_x f(t, B_t))^2 dt\right] < \infty$$

alors $(X_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ est une martingale .

Démonstration. Par la formule d'Itô précédente, nous avons que

$$f(t, B_t) = f(0,0) + \int_0^t \partial_x f(s, B_s) dB_s.$$

Si $f \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ alors $\partial_x f \in \mathcal{C}^1$ et ainsi $\partial_x f(t, B_t) \in \mathcal{L}^2_{\text{Loc}}$ et nous pouvons conclure que son intégrale stochastique est une martingale locale. De plus, si la deuxième condition est vérifiée alors $\partial_x f(t, B_t) \in \mathcal{H}^2([0,T])$ et son intégrale stochastique est donc une (vraie) martingale. □

8.3 Application : Mouvement brownien avec dérive

Pour B un mouvement brownien standard, nous considérons la processus suivant

$$X_t = \mu t + \sigma B_t$$

avec $\mu \in \mathbb{R}$ appelée la dérive et $\sigma > 0$ la constante de diffusion ou la volatilité. Considérons le temps d'arrêt pour $A, B > 0$,

$$\tau_{A,B} = \inf\{t \geqslant 0,\ X_t = A \text{ ou } X_t = -B\}$$

Essayons de calculer $\mathbb{P}(X_{\tau_{A,B}} = A)$. Alors on remarque que si on trouve une fonction $h : [-B, A] \to R$ telle que $M_t = h(X_t)$ est une martingale bornée alors

$$\mathbb{E}[M_0] = \mathbb{E}[M_\tau] = h(A)\mathbb{P}(X_{\tau_{A,B}} = A) + h(-B)\mathbb{P}(X_{\tau_{A,B}} = -B).$$

Si on choisit h telle que $h(A) = 1$ et $h(-B) = 0$, on obtient finalement

$$\mathbb{P}(X_{\tau_{A,B}} = A) = \mathbb{E}[M_0] = h(0).$$

Pour trouver h, nous utilisons la proposition précédente, en posant $f(t,x) = h(\mu t + \sigma x)$, nous avons

$$\partial_t f(t,x) = \mu h'(\mu t + \sigma x), \quad \partial_x f(t,x) = \sigma h'(\mu t + \sigma x), \quad \partial^2_{xx} f(t,x) = \sigma^2 h''(\mu t + \sigma x).$$

On cherche donc h telle que

$$\begin{cases} \mu h'(x) = -\frac{\sigma^2}{2} h''(x), \\ h(A) = 1,\ h(-B) = 0. \end{cases}$$

Nous pouvons résoudre l'équation différentielle du premier ordre sur h' et nous avons

$$h'(x) = \lambda \exp\left(-\frac{2\mu}{\sigma^2}x\right) \quad \text{et ainsi} \quad h(x) = \lambda' \exp\left(-\frac{2\mu}{\sigma^2}x\right) + C.$$

Puisque $h(-B) = 0$ et $h(A) = 1$, nous obtenons finalement

$$h(x) = \frac{\exp\left(-\frac{2\mu}{\sigma^2}x\right) - \exp\left(\frac{2\mu}{\sigma^2}B\right)}{\exp\left(-\frac{2\mu}{\sigma^2}A\right) - \exp\left(\frac{2\mu}{\sigma^2}B\right)}.$$

Nous obtenons donc que

$$\mathbb{P}\left(X_{\tau_{A,B}} = A\right) = h(0) = \frac{1 - \exp\left(\frac{2\mu}{\sigma^2}B\right)}{\exp\left(-\frac{2\mu}{\sigma^2}A\right) - \exp\left(\frac{2\mu}{\sigma^2}B\right)}.$$

On peut aussi en déduire des informations sur le supremum du mouvement brownien avec dérive si $\mu < 0$. En effet,

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\geqslant 0} X_t \geqslant x\right) = \lim_{B\to\infty} \mathbb{P}\left(X_{\tau_{x,B}} = x\right) = \exp\left(\frac{2\mu}{\sigma^2}x\right) = \exp\left(-\frac{2|\mu|}{\sigma^2}x\right),$$

et ainsi

$$\sup_{t\geqslant 0} X_t \sim \operatorname{Exp}\left(\frac{2|\mu|}{\sigma^2}\right).$$

8.4 Deuxième généralisation $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

On peut définir le mouvement brownien standard en plusieurs dimensions, cela consiste à prendre des mouvements browniens standards indépendants à chaque coordonnées.

DÉFINITION 8.4

Le mouvement brownien standard dans $\mathbb{R}^d$ est défini comme

$$\vec{B}_t = (B_t^1, B_t^2, \ldots, B_t^d)$$

où $(B_t^i)_{t\geqslant 0}$ est une famille de mouvements browniens standards indépendants.

Nous allons considérer des fonctions $f \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ dénotée $f(t, x_1, \ldots, x_d)$. On définit ainsi son gradient et son laplacien "spatiaux", c'est-à-dire seulement en ses coordonnées x_i,

$$\vec{\nabla} f(t, \vec{B}_t) = \Big(\partial_{x_1} f(t, \vec{B}_t), \ldots, \partial_{x_d} f(t, \vec{B}_t)\Big) \in \mathbb{R}^d, \quad \Delta f(t, \vec{B}_t) = \sum_{i=1}^{d} \partial^2_{x_i x_i} f(t, \vec{B}_t).$$

La formule d'Itô est alors donnée par le théorème suivant

THÉORÈME 8.5

Si $f \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathrm{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ et $\vec{B}_t$ est un mouvement brownien standard dans $\mathbb{R}^d$ alors

$$\mathrm{d}f(t, \vec{B}_t) = \mathrm{d}f(t, B_t^1, \ldots, B_t^d) = \partial_t f(t, \vec{B}_t)\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i} f(t, \vec{B}_t)\mathrm{d}B_t^i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} \partial^2_{x_i x_i} f(t, \vec{B}_t)\mathrm{d}t$$

que l'on peut réécrire

$$\mathrm{d}f(t, \vec{B}_t) = \partial_t f(t, \vec{B}_t)\mathrm{d}t + \vec{\nabla} f(t, \vec{B}_t) \cdot \mathrm{d}\vec{B}_t + \frac{1}{2}\Delta f(t, \vec{B}_t)\mathrm{d}t.$$

On peut donc généraliser la proposition précédente qui nous donne une condition facilement vérifiable pour construire des martingales locales et des martingales.

PROPOSITION 8.6. Si $f \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ et $\vec{B}$ est un mouvement brownien standard en d dimensions alors $M_t = f(t, B_t)$ est une martingale locale si

$$\partial_t f(t, \vec{\mathbf{x}}) = -\frac{1}{2}\Delta f(t, \vec{\mathbf{x}}).$$

On remarque que si la fonction ne dépend pas de t alors la condition devient simplement $\Delta f(t, \vec{x}) = 0$. Ces fonctions s'appellent des fonctions *harmoniques*.

8.5 Récurrence et transience du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$

8.5.1 Récurrence du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^2$

On va s'aider d'une fonction harmonique pour prouver des résultats sur le mouvement brownien. Considérons la fonction

$$f(\vec{\mathbf{x}}) = f(x_1, x_2) = \log \|\vec{\mathbf{x}}\| = \log\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right).$$

En effet, on calcule facilement,

$$\partial^2_{11} f(t, \vec{\mathbf{x}}) = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_1^2 + x_2^2}, \quad \partial^2_{22} f(t, \vec{\mathbf{x}}) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}$$

et ainsi $\Delta f = 0$. Ces calculs étant bien sûr valables pour $\vec{\mathbf{x}} \neq \vec{0}$. Donc f est une fonction harmonique sur l'anneau, pour $0 < r < R$,

$$A_{r,R} = \left\{\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2,\, r \leqslant \|\vec{\mathbf{x}}\| \leqslant R\right\}.$$

Pour simpifier le problème, on va considérer une légère modification de f, par

$$h(\vec{\mathbf{x}}) = \frac{\log \mathrm{R} - \log \|\vec{\mathbf{x}}\|}{\log \mathrm{R} - \log r}.$$

h est toujours harmonique sur $\mathrm{A}_{r,\mathrm{R}}$ et de plus nous avons maintenant $h(\vec{\mathbf{x}}) = 0$ pour $\|\vec{\mathbf{x}}\| = \mathrm{R}$ et $h(\vec{\mathbf{x}}) = 1$ pour $\|\vec{\mathbf{x}}\| = r$. Soit $\vec{\mathbf{x}} \in \mathrm{A}_{r,\mathrm{R}}$, nous définissons

$$\tau_r = \inf\{t \geqslant 0, \|\vec{\mathrm{B}}_t\| = r\} \quad \text{et} \quad \tau_{\mathrm{R}} = \inf\{t \geqslant 0, \|\vec{\mathrm{B}}_t\| = \mathrm{R}\}$$

et nous travaillerons sur la probabilité $\mathbb{P}_{\vec{\mathbf{x}}}(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot|\vec{\mathrm{B}}_0 = \vec{\mathbf{x}})$. On remarque que si $\tau = \tau_{\mathrm{R}} \wedge \tau_r$ alors $\mathbb{P}_{\vec{\mathbf{x}}}(\tau < \infty) = 1$ (par exemple en utilisant la loi du logarithme itéré), et nous avons

$$\mathbb{E}_{\vec{\mathbf{x}}}\left[h(\mathrm{B}_\tau)\right] = 1 \cdot \mathbb{P}(\tau_r < \tau_{\mathrm{R}}) + 0 \cdot \mathbb{P}(\tau_{\mathrm{R}} < \tau_r) = \mathbb{P}(\tau_r < \tau_{\mathrm{R}}).$$

De plus, comme h est harmonique, nous savons que $h(\mathrm{B})$ est une martingale locale et la martingale arrêtée $(h(\mathrm{B}_{t\wedge\tau}))_t$ est aussi une martingale locale qui est bornée puisque $|h(\mathrm{B}_{t\wedge\tau})| \leqslant 1$, c'est une (vraie) martingale bornée. Par le théorème de convergence dominée, nous avons que

$$\mathbb{E}_{\vec{\mathbf{x}}}\left[h(\vec{\mathrm{B}}_\tau)\right] = \mathbb{E}_{\vec{\mathbf{x}}}\left[\lim_{t\to\infty} h(\vec{\mathrm{B}}_{t\wedge\tau})\right] = \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_{\vec{\mathbf{x}}}\left[h(\vec{\mathrm{B}}_{t\wedge\tau})\right] = \mathbb{E}_{\vec{\mathbf{x}}}\left[h(\vec{\mathrm{B}}_0)\right] = h(\vec{\mathbf{x}}).$$

Ainsi, nous avons que

$$\mathbb{P}_{\vec{\mathbf{x}}}(\tau_r < \tau_{\mathrm{R}}) = \frac{\log \mathrm{R} - \log \|\vec{\mathbf{x}}\|}{\log \mathrm{R} - \log r}$$

pour $r < \|\vec{\mathbf{x}}\| < \mathrm{R}$.

Comme $\tau_{\mathrm{R}} \to \infty$ et $h(\vec{\mathbf{x}}) \to 1$ lorsque $\mathbb{R} \to \infty$, nous voyons que pour tout $r > 0$, et pour tout $\vec{\mathbf{x}}$ tel que $\|\vec{\mathbf{x}}\| \geqslant r$,

$$\mathbb{P}_{\vec{\mathbf{x}}}(\tau_r < \infty) = 1.$$

Ainsi le mouvement brownien standard en dimension 2 peut atteindre n'importe quelle boule de rayon strictement positif en temps fini. On dit que le mouvement brownien en dimension 2 est *récurrent*.

8.5.2 Transience du mouvement brownien en dimension plus grande que 3

Le raisonnement va être similaire mais on va simplement utiliser une nouvelle fonction, cette fois adaptée à la dimension $d \geqslant 3$. Considérons

$$f(\vec{\mathbf{x}}) = \frac{1}{\|\vec{\mathbf{x}}\|^{d-2}} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2}^{\,d-2}}$$

alors nous avons en effet,

$$\partial^2_{x_i x_i} f(\vec{\mathbf{x}}) = (2-d)\left(\frac{1}{\|\vec{\mathbf{x}}\|^d} - d x_i^2 \frac{1}{\|\vec{\mathbf{x}}\|^{d+2}}\right)$$

et ainsi

$$\Delta f(\vec{\mathbf{x}}) = (2-d)\left(\frac{d}{\|\vec{\mathbf{x}}\|^d} - d\sum_{i=1}^d x_i^2 \frac{1}{\|\vec{\mathbf{x}}\|^{d+2}}\right) = d(2-d)\left(\frac{1}{\|\vec{\mathbf{x}}\|^d} - \frac{\|\vec{\mathbf{x}}\|^2}{\|\vec{\mathbf{x}}\|^{d+2}}\right) = 0.$$

La fonction est donc harmonique sur $\mathrm{A}_{r,\mathrm{R}}$ et nous pouvons faire exactement le même raisonnement pour voir que

$$\mathbb{P}_{\vec{\mathbf{x}}}(\tau_r < \tau_{\mathrm{R}}) = \frac{\frac{1}{\mathrm{R}^{d-2}} - \frac{1}{\|\vec{\mathbf{x}}\|^{d-2}}}{\frac{1}{\mathrm{R}^{d-2}} - \frac{1}{r^{d-2}}}.$$

Mais maintenant si nous faisons passer $\mathrm{R} \to \infty$, alors nous obtenons,

$$\mathbb{P}_{\vec{\mathbf{x}}}(\tau_r < \infty) = \left(\frac{r}{\|\vec{\mathbf{x}}\|}\right)^{d-2} < 1.$$

Ainsi, nous pouvons en conclure que le mouvement brownien en dimension 3 et plus ne pourrait, avec probabilité positive, jamais atteindre une boule de rayon positive. On dit que le mouvement brownien en dimension $d \geqslant 3$ est *transient*.

8.6 Troisième généralisation : La formule d'Itô pour les processus d'Itô

Pour l'instant, on a défini l'intégrale stochastique et la formule d'Itô pour le mouvement brownien standard. Nous allons maintenant généraliser ces notions à des processus plus généraux : les processus d'Itô. Pour faire un premier exemple, regardons ce qu'il se passe avec le mouvement brownien standard avec dérive. On rappelle sa définition :

$$\mathrm{X}_t = \mu t + \sigma \mathrm{B}_t$$

que l'on écrit parfois,

$$\mathrm{dX}_t = \mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{dB}_t, \quad \mathrm{X}_0 = 0.$$

Alors si on considère un processus défini à partir d'une fonction $f \in \mathcal{C}^{1,2}$,

$$\mathrm{Y}_t = f(t, \mathrm{X}_t) = f(t, \mu t + \sigma \mathrm{B}_t).$$

On peut appliquer la formule d'Itô à cette fonction, qui est une fonction de t et de B_t,

$$\begin{aligned}
\mathrm{dY}_t &= \left(\partial_t f(t, \mathrm{X}_t) + \mu \partial_x f(t, \mathrm{X}_t)\right) \mathrm{d}t + \sigma \partial_x f(t, \mathrm{X}_t) \mathrm{dB}_t + \frac{1}{2}\sigma^2 \partial^2_{xx} f(t, \mathrm{X}_t) \mathrm{d}t \\
&= \partial_t f(t, \mathrm{X}_t)\mathrm{d}t + \partial_x f(t, \mathrm{X}_t)\left(\mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{dB}_t\right) + \frac{1}{2}\partial^2_{xx} f(t, \mathrm{X}_t)\sigma^2 \mathrm{d}t \\
&= \partial_t f(t, \mathrm{X}_t)\mathrm{d}t + \partial_x f(t, \mathrm{X}_t)\mathrm{dX}_t + \frac{1}{2}\partial^2_{xx} f(t, \mathrm{X}_t)\sigma^2 \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

La formule est presque la même que la formule d'Itô pour le mouvement brownien en remplaçant B par X. Il y a une différence subtile, le terme avec la dérivée seconde a gagné un σ^2 ! Nous verrons que ce terme n'est en fait que la variation quadratique de X mais pour l'instant nous pouvons donner une règle de calcul très simple selon ce tableau

$\mathrm{d}\langle\cdot,\cdot\rangle$	$\mathrm{d}t$	dB_t
$\mathrm{d}tt$	0	0
dB_t	0	$\mathrm{d}t$

Ainsi, pour le mouvement brownien avec dérive

$$\mathrm{d}\langle \mathrm{X}\rangle_t = \mathrm{d}\langle \mu t + \sigma \mathrm{B}_t, \mu t + \sigma \mathrm{B}_t\rangle = \mu^2 \mathrm{d}\langle t, t\rangle + \mu\sigma \mathrm{d}\langle t, \mathrm{B}_t\rangle + \mu\sigma \mathrm{d}\langle \mathrm{B}_t, t\rangle + \sigma^2 \mathrm{d}\langle \mathrm{B}_t, \mathrm{B}_t\rangle = \sigma^2 \mathrm{d}t.$$

Ainsi, nous pous réécrire la formule plus haut comme

$$\mathrm{dY}_t = \partial_t f(t, \mathrm{X}_t)\mathrm{d}t + \partial_x f(t, \mathrm{X}_t)\mathrm{dX}_t + \frac{1}{2}\partial^2_{xx} f(t, \mathrm{X}_t)\mathrm{d}\langle \mathrm{X}\rangle_t.$$

Ceci correspond à la formule d'Itô pour le mouvement brownien avec dérive. Nous allons généraliser la formule aux processus d'Itô qui seront les processus les plus généraux que nous verrons dans ce cours.

Définition 8.7

Un processus $(\mathrm{X}_t)_{0 \leqslant t \leqslant \mathrm{T}}$ est appelé *processus d'Itô* si nous pouvons écrire

$$\mathrm{X}_t(\omega) = x_0 + \int_0^t a_s(\omega)\mathrm{d}s + \int_0^t b_s(\omega)\mathrm{dB}_s \quad \text{pour } t \in [0, \mathrm{T}]$$

ou encore

$$dX_t(\omega) = a_t(\omega)ds + b_t(\omega)dB_s, \quad X_0 = x_0$$

où a et b sont des processus mesurables et adaptés tels que

$$\mathbb{P}\left(\int_0^T |a_s(\omega)|ds < \infty\right) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(\int_0^T |b_s(\omega)|^2 ds < \infty\right) = 1.$$

Par exemple, nous voyons que le mouvement brownien est un processus d'Itô avec $a = 0$ et $b = 1$. Le mouvement brownien avec dérive esst aussi un processus d'Itô avec $a = \mu$ et $b = \sigma$. Nous avons donc une formule d'Itô pour ces processus.

Théorème 8.8

Si $f \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathrm{R})$ et X est un processus d'Itô alors

$$df(t, X_t) = \partial_t f(t, X_t)dt + \partial_x f(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}\partial^2_{xx} f(t, X_t)d\langle X\rangle_t.$$

Avec nos règles de calcul, si on écrit

$$dX_t = a_t dt + b_t dB_t$$

alors nous avons

$$d\langle X\rangle_t = a_t\langle dt, dt\rangle + 2a_t b_t\langle dt, B_t\rangle + b_t^2\langle dB_t, dB_t\rangle = b_t^2 dt$$

et ainsi

$$df(t, X_t) = \partial_t f(t, X_t)dt + \partial_x f(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}\partial^2_{xx} f(t, X_t)b_t^2 dt.$$

Parfois, nous avons des processus définis à partir de différents mouvements browniens. Nous pouvons étendre les règles de calcul lorsque nous avons plusieurs mouvements browniens *indépendants* $B^{(1)}$ et $B^{(2)}$

$d\langle\cdot,\cdot\rangle$	dt	$dB_t^{(1)}$	$dB_t^{(2)}$
dt	0	0	0
$dB_t^{(1)}$	0	dt	0
$dB_t^{(2)}$	0	0	dt

et cela nous permet d'avoir une formule d'Itô pour plusieurs processus.

Théorème 8.9

Si $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ et X et Y sont deux processus d'Itô alors

$$df(X_t, Y_t) = \partial_x f(X_t, Y_t)dX_t + \partial_y f(X_t, Y_t)dY_t + \frac{1}{2}\left(\partial^2_{xx} f(X_t, Y_t)d\langle X\rangle_t + \partial^2_{yy} f(X_t, Y_t)d\langle Y\rangle_t + 2\partial^2_{xy} f(X_t, Y_t)d\langle X, Y\rangle_t\right).$$

Faisons une application simple de cette formule en utilisant la fonction $f(x, y) = xy$, dans ce cas nous avons

$$\partial_x f(x, y) = y, \quad \partial_y f(x, y) = x, \quad \partial^2_{xx} f(x, y) = \partial^2_{yy} f(x, y) = 0, \quad \partial^2_{xy} f(x, y) = 1$$

et la formule donne

$$d(X_t Y_t) = Y_t dX_t + X_t dY_t + d\langle X, Y\rangle_t.$$

Si nous avons deux mouvements browniens indépendants et

$$dX_t = a_t dt + b_t dB_t^{(1)}, \quad dY_t = \alpha_t dt + \beta_t dB_t^{(2)}$$

alors la formule devient, en suivant les règles de calcul,

$$df(X_t, Y_t) = \partial_x f(X_t, Y_t)dX_t + \partial_y f(X_t, Y_t)dY_t + \frac{1}{2}\left(\partial^2_{xx} f(X_t, Y_t) b_t^2 dt + \partial^2_{yy} f(X_t, Y_t)\beta_t^2 dt\right)$$

puisque la covariance quadratique $d\langle X, Y\rangle_t = 0$.
En revanche, nous pouvons aussi avoir deux processus d'Itô définis à partir du même mouvement brownien B,

$$dX_t = a_t dt + b_t dB_t, \quad dY_t = \alpha_t dt + \beta_t dB_t$$

dans ce cas là, nous pouvons calculer

$$d\langle X, Y\rangle_t = b_t \beta_t dt.$$

8.7 Variation quadratique des processus d'Itô

Pour l'instant, nous avons simplement donné les règles de calcul du crochet $\langle X, Y\rangle$ pour deux processus d'Itô X et Y. En fait, ce crochet correspond bien à la variation quadratique que nous avons dans le chapitre sur les martingales locales. Nous rappelons la définition ici,

DÉFINITION 8.10

Soit X un processus mesurable et adapté. Pour $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$, on dénote $\pi = \{t_0, \ldots, t_n\}$ une partition de $[0, t]$ et on définit

$$Q_\pi(X_t) = \sum_{i=0}^{n-1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2$$

la π-variation quadratique de X. Si il existe un processus dénoté $\langle X\rangle_t = \langle X, X\rangle_t = \langle X_t, X_t\rangle$ tel que pour tout suite de partition π_k telle que $\max_{0\leqslant i\leqslant n_k-1} |t^{(k)}_{i+1} - t^{(k)}_i| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ on a

$$Q_{\pi_k}(X_t) \xrightarrow[k\to\infty]{} \langle X\rangle_t$$

alors $\langle X\rangle$ est appelé la variation quadratique de X.

Nous avions aussi vu que nous pouvions définir la covariation quadratique par la limite de

$$Q_\pi(X_t, Y_t) = \sum_{i=0}^{n-1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}).$$

Nous allons maintenant prouver les règles de calcul que nous avons vu plus tôt. La première est que $\langle dt, dt\rangle = 0$.

PROPOSITION 8.11. Si a_t est un processus mesurable et adapté tel que pour presque tout ω,

$$\int_0^t |a_s(\omega)| ds < \infty$$

alors si $A_t = \int_0^t a_s(\omega) ds$, $\langle A\rangle_t = 0$.

Démonstration. Pour presque tout $\omega \in \Omega$, $u \mapsto \int_0^u a(\omega, s) ds$ est uniformément continue sur $[0, t]$ ainsi pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta(\omega) > 0$ tel que pour toute partition π, avec $\mu(\pi) = \max_{0\leqslant i\leqslant n-1} |t_{i+1} - t_i| \leqslant \delta(\omega)$,

$$Q_\pi(A_t) = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} a_s(\omega) ds\right)^2 \leqslant \max_{0\leqslant i\leqslant n-1}\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} |a_s(\omega)| ds\right) \sum_{i=0}^{n-1}\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} |a_s(\omega)|\right) \leqslant \varepsilon \int_0^t |a_s(\omega)| ds.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, nous voyons que $\langle A\rangle_t = 0$. □

Le théorème plus difficile est l'existence, et la valeur, de la variation quadratique pour les processus d'Itô qui correspond en fait à la règle de calcul $d\langle b_t dB_t\rangle_t = b_t^2 dt$.

Théorème 8.12

Si X est un processus d'Itô que l'on écrit

$$dX_t = a_t dt + b_t dB_t$$

alors $\langle X\rangle_t$ existe et on a

$$\langle X\rangle_t = \int_0^t b_s^2 ds \quad \text{ou encore} \quad d\langle X\rangle_t = b_t^2 dt.$$

De plus, si Y est un processus d'Itô que l'on écrit

$$dY_t = \alpha_t dt + \beta_t dB_t$$

alors $\langle X, Y\rangle_t$ existe et

$$\langle X, Y\rangle_t = \int_0^t b_s \beta_s ds \quad \text{ou encore} \quad d\langle X, Y\rangle_t = b_t \beta_t dt.$$

On remarque que l'on a déjà vu que si $A_t = \int_0^t a_s ds$ alors $\langle A\rangle_t = 0$. Nous allons commencer par prouver un lemme qui nous donnera que la variation *quartique* d'une martingale continue tend vers 0.

Lemme 8.13. Soit Z une martingale continue telle que $\sup_{0\leqslant s\leqslant t} |Z_s| \leqslant B$ pour un $B < \infty$ alors il existe $C > 0$ tel que

$$\sup_\pi \mathbb{E}\left[Q_\pi^2(Z_t)\right] \leqslant C\mathbb{E}\left[(Z_t - Z_0)^2\right] < \infty$$

et

$$\lim_{\mu(\pi)\to 0} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[(Z_{t_i} - Z_{t_{i-1}})^4\right] \to 0.$$

Démonstration. On commence par écrire pour $\pi = \{t_0 = 0, \ldots, t_n = t\}$ une partition,

$$Q_\pi^2(Z_t) = \sum_{i=1}^n (Z_{t_i} - Z_{t_{i-1}})^4 + 2\sum_{i=1}^{n-1}\left((Z_{t_i} - Z_{t_{i-1}})^2 \sum_{j=i+1}^n (Z_{t_j} - Z_{t_{j-1}})^2\right).$$

Maintenant nous avons

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=i+1}^n (Z_{t_j} - Z_{t_{j-1}})\right)^2 \middle| \mathcal{F}_{t_i}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{j=i+1}^n (Z_{t_j} - Z_{t_{j-1}})^2 \middle| \mathcal{F}_{t_i}\right] + 2\sum_{j_1 < j_2 = i+1}^n \mathbb{E}\left[(Z_{t_{j_1}} - Z_{t_{j_1 -1}})(Z_{t_{j_2}} - Z_{t_{j_2-1}}) \middle| \mathcal{F}_{t_i}\right].$$

Pour la double somme ci-dessus, nous pouvons conditionner sur $\mathcal{F}_{t_{j_2-1}} \supset \mathcal{F}_{t_i}$ tel que

$$\mathbb{E}\left[(Z_{t_{j_1}} - Z_{t_{j_1-1}})\mathbb{E}\left[(Z_{t_{j_2}} - Z_{t_{j_2-1}})\middle|\mathcal{F}_{t_{j_2-1}}\right]\middle|\mathcal{F}_{t_i}\right] = 0$$

où on a utilisé la propriété de martingale. Donc nous avons,

$$\mathbb{E}\left[\sum_{j=i+1}^n (Z_{t_j} - Z_{t_{j-1}})^2 \middle| \mathcal{F}_{t_i}\right] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=i+1}^n (Z_{t_j} - Z_{t_{j-1}})\right)^2 \middle| \mathcal{F}_{t_i}\right] = \mathbb{E}\left[(Z_t - Z_{t_i})^2 \middle| \mathcal{F}_{t_i}\right] \leqslant 4B^2$$

et ainsi

$$\mathbb{E}\left[Q_\pi^2(Z_t)\right] \leqslant 4B^2 \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[(Z_{t_i} - Z_{t_{i-1}})^2\right] + 8B^2 \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[(Z_{t_i} - Z_{t_{i-1}})^2\right] \leqslant 12B^2 \mathbb{E}\left[(Z_t - Z_0)^2\right]$$

où on a utilisé l'orthogonalité des incréments que nous avons prouvé ci-dessus.

Pour le deuxième résultat, nous introduisons le module de continuité de Z.

$$\rho(\delta,\omega) = \sup\left\{|Z_u(\omega) - Z_v(\omega)|,\, 0 \leqslant u \leqslant v \leqslant t,\, |u-v| \leqslant \delta\right\}.$$

On remarque tout d'abord que nous avons la borne immédiate

$$\rho(\delta,\omega) \leqslant 2B$$

et de plus comme $s \mapsto Z_s(\omega)$ est uniformément continue sur $[0,t]$ presque sûrement, nous avons que $\rho(\delta,\omega) \xrightarrow[\delta\to 0]{p.s} 0$. Ainsi, nous avons

$$\sum_{i=1}^{n} (Z_{t_i}(\omega) - Z_{t_{i-1}}(\omega))^4 \leqslant \rho^2(\mu(\pi),\omega) Q_\pi(Z_t),$$

et par l'inégalité de Cauchy–Schwarz, nous avons

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} (Z_{t_i} - Z_{t_{i-1}})^4\right] \leqslant \left\|\rho^2(\mu(\pi),\omega)\right\|_{L^2(d\mathbb{P})} \|Q_\pi(Z_t)\|_{L^2(d\mathbb{P})}.$$

Par le théorème de convergence dominée, nous avons que $\left\|\rho^2(\mu(\pi),\omega)\right\|_{L^2(d\mathbb{P})} \xrightarrow[\mu(\pi)\to 0]{} 0$ et par la première partie du lemme nous avons $\|Q_\pi(Z_t)\|_{L^2(d\mathbb{P})} \leqslant 4\sqrt{3}B^2$ et finalement nous obtenons que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} (Z_{t_i} - Z_{t_{i-1}})^4\right] \xrightarrow[\mu(\pi)\to 0]{} 0.$$

$\square$

Nous allons maintenant prouver l'existence de la variation quadratique dans le cas où l'intégrale stochastique est bornée. Par un argument de localisation, nous prouverons le théorème complet. Avant cela, nous allons voir une généralisation de la martingale quadratique du mouvement brownien

Proposition 8.14. Si $b \in \mathcal{H}^2([0,T])$ alors $Z_t = \int_0^t b_s dB_s$ et $M_t = Z_t^2 - \int_0^t b_s^2 ds$ sont des martingales par rapport à la filtration brownienne standard.

Démonstration. Nous savons déjà que Z est une martingale, pour M cela vient de l'isométrie d'Itô conditionnelle

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_s^t b_u dB_u\right)^2 \middle| \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_s^t b_s^2 ds \middle| \mathcal{F}_s\right].$$

$\square$

Proposition 8.15. Soit b un processus mesurable et adapté tel que $\int_0^T b_s^2 ds \leqslant C$ presque sûrement pour une constante $C < \infty$. Si $Z_t = \int_0^t b_s dB_s$ est bornée, $|Z_t| \leqslant C$, alors $\langle Z\rangle_t$ existe presque sûrement et

$$\langle Z\rangle_t = \int_0^t b_s^2 ds \quad \text{pour tout} \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Démonstration. Nous commençons par écrire

$$\Delta_\pi = Q_\pi(Z_t) - \int_0^t b_s^2 ds = \sum_{i=1}^{n} \left((Z_{t_i} - Z_{t_{i-1}})^2 - \int_{t_i}^{t_{i-1}} b_s^2 ds\right) =: \sum_{i=1}^{n} d_i.$$

On a encore orthogonalité des incréments par l'isométrie d'Itô conditionnelle puisque pour $i \leqslant j$,

$$\mathbb{E}\left[d_i d_j\right] = \mathbb{E}\left[d_i \mathbb{E}\left[d_j \middle| \mathcal{F}_{t_i}\right]\right] = 0.$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}\left[\Delta_\pi^2\right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[d_i^2\right] \leqslant 2\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[(Z_{t_i} - Z_{t_{i-1}})^4\right] + 2\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} b_s^2 ds\right)^2\right].$$

Si on définit le module de continuité

$$\rho(\delta) = \sup\left\{\int_u^v b_s^2 ds,\ 0 \leqslant u \leqslant v \leqslant T,\ |u-v| \leqslant \delta\right\} \leqslant C$$

car Z est bornée. Ainsi,

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} b_s^2 ds\right)^2\right] \leqslant \rho(\mu(\pi)) \int_0^t b_s^2 ds \leqslant C\rho(\mu(\pi)) \xrightarrow[\mu(\pi)\to 0]{} 0.$$

Comme on sait déjà que

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[(Z_{t_i} - Z_{t_{i-1}})^4\right] \xrightarrow[\mu(\pi)\to 0]{} 0$$

le théorème de convergence dominée nous donne que

$$\mathbb{E}\left[\Delta_\pi^2\right] \xrightarrow[\mu(\pi)\to 0]{} 0$$

et le résultat est prouvé. □

Nous sommes maintenant prêts à prouver le Théorème 8.12

Preuve du Théorème 8.12. Pour réaliser notre argument de localisation, nous introduisons un temps d'arrêt défini pour $M > 0$ par

$$\tau_M = \inf\left\{u \geqslant 0,\ \int_0^u |a_s| ds \geqslant M,\ \int_0^u b_s^2 ds \geqslant M,\ \left|\int_0^u b_s dB_s\right| \geqslant M\right\} \wedge T.$$

alors nous avons que pour tout $\omega \in \{\omega \in \Omega,\ t \leqslant \tau_M(\omega)\}$, $Q_\pi(X_t) = Q_\pi(X_{t\wedge\tau_M})$. Nous pouvons donc écrire pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left|Q_\pi(X_t) - \int_0^t b_s^2 ds\right| \geqslant \varepsilon\right) &\leqslant \mathbb{P}\left(\left|Q_\pi(X_t) - \int_0^t b_s^2 ds\right| \geqslant \varepsilon,\ t \leqslant \tau_M\right) + \mathbb{P}\left(\tau_M < t\right)\\ &= \mathbb{P}\left(\left|Q_\pi(X_{t\wedge\tau_M}) - \int_0^t b_s^2 \mathbb{1}_{t\leqslant\tau_M} ds\right| \geqslant \varepsilon\right) + \mathbb{P}\left(\tau_M < t\right).\end{aligned}$$

Comme nous avons un processus d'Itô, par continuité presque sûre du processus, nous pouvons choisir M assez grand pour rendre $\mathbb{P}(\tau_M < t)$ aussi petit que possible. Pour le premier terme, nous écrivons

$$\tilde{X}_t := X_{t\wedge\tau_M} = \int_0^t a_s \mathbb{1}_{\tau_M \geqslant t} dt + \int_0^t b_s \mathbb{1}_{\tau_M\geqslant t} dB_s =: \int_0^t \tilde{a}_s ds + \int_0^t \tilde{b}_s dB_s.$$

On voit donc que

$$Q_\pi(\tilde{X}_t) = Q_\pi\left(\int_0^s \tilde{a}_s ds\right) + Q\left(\int_0^t \tilde{b}_s dB_s\right) + 2C_\pi\left(\int_0^t \tilde{a}_s ds, \int_0^t \tilde{b}_s dB_s\right)$$

avec

$$C_\pi\left(\int_0^t \tilde{a}_s ds, \int_0^t \tilde{b}_s dB_s\right) = \sum_{i=1}^n \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} a_s ds\right)\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} \tilde{b}_s dB_s\right).$$

Par la Proposition 8.11, nous savons que $Q_\pi\left(\int_0^s \tilde{a}_s \mathrm{d}s\right) \xrightarrow[\mu(\pi)\to 0]{\mathbb{P}} 0$ et par la Proposition 8.15, nous savons que

$$Q\left(\int_0^t \tilde{b}_s \mathrm{d}B_s\right) \xrightarrow[\mu(\pi)\to 0]{\mathbb{P}} \int_0^t b_s^2 \mathbb{1}_{t\leqslant \tau_M} \mathrm{d}s.$$

Enfin,

$$C_\pi\left(\int_0^t \tilde{a}_s \mathrm{d}s, \int_0^t \tilde{b}_s \mathrm{d}B_s\right) \leqslant \sqrt{Q_\pi\left(\int_0^s \tilde{a}_s \mathrm{d}s\right) Q\left(\int_0^t \tilde{b}_s \mathrm{d}B_s\right)} \xrightarrow[\mu(\pi)\to 0]{\mathbb{P}} 0$$

puisque un terme converge vers 0 en probabilité et l'autre reste borné car converge vers une quantité finie et nous avons donc montré que

$$\mathbb{P}\left(\left|Q_\pi(X_{t\wedge\tau_M}) - \int_0^t b_s^2 \mathbb{1}_{t\leqslant\tau_M} \mathrm{d}s\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[\mu(\pi)\to 0]{} 0$$

et le résultat est prouvé. □

9. Équations Différentielles Stochastiques

Lorsque l'on applique la formule d'Itô, il arrives souvent que l'on obtienne une équation de la forme

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t &= \mu(t, X_t)\mathrm{d}t + \sigma(t, X_t)\mathrm{d}B_t \\ X_0 &= x_0 \end{cases}$$

On remarque en particulier que notre dérive μ et volatilité σ dépendent de X. C'est un exemple d'équation différentielle stochastique. Commençons par plusieurs exemples où on est capable de donner une solution explicite.

9.1 Mouvement brownien géométrique, processus d'Ornstein–Uhlenbeck & pont brownien

9.1.1 Mouvement brownien géométrique

Le premier exemple est donné par $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, et $x_0 > 0$ et l'équation

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t &= \mu X_t \mathrm{d}t + \sigma X_t \mathrm{d}B_t \\ X_0 &= x_0 \end{cases}$$

On voit que la croissance du processus donné par la dérive ainsi que ses fluctuations données par sa volatilité dépendent linéairement du processus lui-même. On appelle X le *mouvement brownien géometrique*.

Pour résoudre cette équation, on va utiliser la formule d'Itô, ainsi on cherche une fonction f telle que, $X_t = f(t, B_t)$ alors nous avons

$$\mathrm{d}X_t = \partial_t f(t, X_t) + \partial_x f(t, X_t) + \frac{1}{2}\partial_{xx}^2 f(t, X_t)$$

et en identifiant les coeffcients, nous obtenons

$$\begin{cases} \partial_t f + \frac{1}{2}\partial_{xx}^2 f &= \mu f, \\ \partial_x f = \sigma f \end{cases}$$

La seconde équation peut se réécrire

$$\frac{\partial_x f}{f} = \sigma \Rightarrow f(t, x) = \exp\left(\sigma x + g(t)\right)$$

et nous obtenons la fonction $g(t)$ par la première équation.

$$g'(t)f(t,x) + \frac{\sigma^2}{2} f(t,x) = \mu f(t,x) \Rightarrow g'(t) = \mu - \frac{\sigma^2}{2} \Rightarrow g(t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + c.$$

Finalement, nous obtenons une solution

$$X_t = x_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma B_t\right).$$

On remarque que l'on ne sait pas pour l'instant que c'est la seule solution de cette équation, et on le verra pus tard avec un théorème général. Ce modèle est beaucoup utilisé en finance car contrairement au mouvement brownien, il reste positif et ainsi peut modéliser de manière plus cohérente le cours d'un produit à risque avec un taux de rendement attendu μ. En effet, on remarque que son espérance est donné par

$$\mathbb{E}\left[X_t\right] = x_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t\right) \mathbb{E}\left[\exp\left(\sigma B_t\right)\right] = \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t\right) \exp\left(\frac{\sigma^2 t}{2}\right) = x_0 \exp\left(\mu t\right).$$

En revanche, on remarque si le produit a une grande volatilité $\frac{\sigma^2}{2} > \mu > 0$ alors puisque

$$\frac{B_t}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{p.s} 0$$

nous avons que

$$X_t = x_0 \exp\left(t\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} + \sigma\frac{B_t}{t}\right)\right) \xrightarrow[t\to\infty]{p.s} 0.$$

AInsi, le cours du produit à risque tend vers 0 même si son espérance tend vers l'infini ! Sa grande volatilité "tue" son espérance.

9.1.2 Processus d'Ornstein–Uhlenbeck

Le deuxième exemple dépend de $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, et de $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} dX_t &= -\alpha X_t dt + \sigma dB_t, \\ X_0 &= x_0. \end{cases}$$

Cette fois-ci, nous voyons que la dérive dépend linéairement de X mais la volatilité reste constante. Essayons tout d'abord le même raisonnement que pour le mouvement brownien géométrique en cherchant une fonction f telle que $X_t = f(t, B_t)$. Nous obtenons le système

$$\begin{cases} \partial_t f + \frac{1}{2}\partial^2_{xx} f &= -\alpha f, \\ \partial_x f &= \sigma. \end{cases}$$

La deuxième équation nous donne que

$$f(t,x) = \sigma x + g(t)$$

et la première nous donne

$$g'(t) = -\alpha\left(\sigma x + g(t)\right)$$

qui est impossible puisque nous avons une fonction uniquement de t à gauche mais une fonction de t et de x à droite. Il faut donc faire autrement, l'idée est de voir que comme la volatilité est constante, X pourrait être un processus gaussien et nous pouvons ainsi le chercher de la forme

$$X_t = a(t)\left(x_0 + \int_0^t b(s) dB_s\right) \quad \text{avec} \quad a(0) = 1 \text{ et } a(t) > 0.$$

Alors nous avons,

$$\mathrm{dX}_t = a'(t)\left(x_0 + \int_0^t b(s)\mathrm{dB}_s\right)\mathrm{d}t + a(t)b(t)\mathrm{dB}_t = \frac{a'(t)}{a(t)}\mathrm{X}_t\mathrm{d}t + a(t)b(t)\mathrm{dB}_t.$$

Nous obtenons alors le système d'équation

$$\begin{cases} \frac{a'(t)}{a(t)} & = -\alpha, \\ a(t)b(t) & = \sigma. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(t) & = \exp(-\alpha t), \\ b(t) & = \sigma \exp(\alpha t). \end{cases}$$

Finalement, nous avons la formule explicite

$$\mathrm{X}_t = \mathrm{e}^{-\alpha t}\left(x_0 + \sigma\int_0^t \mathrm{e}^{\alpha s}\mathrm{dB}_s\right) = x_0\mathrm{e}^{-\alpha t} + \sigma\int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha(t-s)}\mathrm{dB}_s.$$

On peut calculer son espérance ainsi que sa variance

$$\mathbb{E}[\mathrm{X}_t] = x_0\mathrm{e}^{-\alpha t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0, \quad \mathrm{Var}(\mathrm{X}_t) = \sigma^2\int_0^t \mathrm{e}^{-2\alpha(t-s)}\mathrm{d}s = \frac{\sigma^2}{2\alpha}\left(1-\mathrm{e}^{-2\alpha t}\right) \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{\sigma^2}{2\alpha}.$$

Ainsi, sachant que X est un processus gaussien, on obtient à l'infini une variable aléatoire gaussienne centrée de variance $\frac{\sigma^2}{2\alpha}$. Cette distribution est d'équilibre pour ce processus dans le sens que si $x_0 \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right)$ alors $\mathrm{X}_t \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right)$ pour tout $t \geqslant 0$.

9.1.3 Pont brownien

Nous avons vu dans la première feuille d'exercices une définition du pont brownien. Tout d'abord avec son développement en série grâce aux fonctions de Haar, tout comme la construction de Lévy du mouvement brownien, mais aussi comme la définition

$$u_t = \mathrm{B}_t - t\mathrm{B}_1 \quad \text{pour tout } 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Le principe du pont brownien est d'avoir un mouvement brownien qui retourne en 0 au temps 1. Ainsi, si au temps t, le processus est en X_t, nous voudrions un drift de $-\frac{\mathrm{X}_t}{1-t}$ qui ramenerait le processus en 0 au temps 1. Ainsi, l'équation différentielle stochastique proposée serait

$$\begin{cases} \mathrm{dX}_t & = -\frac{\mathrm{X}_t}{1-t}\mathrm{d}t + \mathrm{dB}_t, \\ \mathrm{X}+0 & = 0. \end{cases}$$

Si on réalise le même raisonnement que pour le processus d'Ornstein–Uhlenbeck et que l'on cherche un processus gaussien, nous obtenons cette fois les équations

$$\begin{cases} \frac{a'(t)}{a(t)} = -\frac{1}{1-t}, \\ a(t)b(t) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(t) = 1-t, \\ b(t) = \frac{1}{1-t}. \end{cases}$$

Nous obtenons alors une autre formule pour le pont brownien

$$\mathrm{X}_t = (1-t)\int_0^t \frac{\mathrm{dB}_s}{1-s}, \quad \text{pour tout } 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

X est donc bien un processus gaussien et nous pouvons calculer sa covariance (que nous connaissons déjà), pour $s \leqslant t$,

$$\mathbb{E}[\mathrm{X}_t\mathrm{X}_s] = (1-t)(1-s)\int_0^s \frac{\mathrm{d}u}{(1-u)^2} = s(1-t).$$

Il faut faire attention que les processus X et U ne sont pas égaux mais ont seulement la même distribution en tant que processus gaussien continu avec la même espérance et la même fonction de covariance.

9.2 Théorème d'existence et d'unicité

Pour l'instant, nous avons pris trois exemples et nous avons pu trouvé une solution pour chaque équation stochastique par différents moyens mais ceci ne nous donne pas que la solution trouvée est la seule ou même l'existence de solutions pour des équations différentielles stochastiques plus générales.

THÉORÈME 9.1

Soit B un mouvement brownien strandard. Si on a l'équation différentielle stochastique pour $t \in [0, T]$,

$$\begin{cases} dX_t &= \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \\ X_0 &= x_0 \end{cases}$$

et si il existe $K > 0$ tel que pour tout $t \in [0, T]$ et pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

- $|\mu(t,x) - \mu(t,y)|^2 + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)|^2 \leqslant K|x-y|^2$ (Lipschitz en espace)
- $|\mu(t,x)|^2 + |\sigma(t,x)|^2 \leqslant K(1 + |x|^2)$ (croissance au plus linéaire)

alors il existe une solution X continue et adaptée telle que

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \mathbb{E}\left[X_t^2\right] < \infty$$

et de plus, si X_t et Y_t sont deux telles solutions alors

$$\mathbb{P}\left(X_t = Y_t \text{ pour tout } t \in [0, T]\right) = 1.$$

Regardons si nous avons besoin de ces conditions en étudiant des contre-exemples. Ces contre-exemples n'ont même pas besoin d'être stochastique. En effet, si on considère

$$dX_t = 3X_t^{\frac{2}{3}}dt \quad \text{et } X_0 = 0.$$

Nous voyons que la dérive $\mu(t, x) = x^{\frac{2}{3}}$ n'est pas une fonction Lipschitz mais on remarque que toute fonction, pour $a > 0$,

$$X_t^{(a)} = \begin{cases} (t-a)^3 & \text{si } t > a, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

est solution et nous avons donc pas unicité.
Maintenant, si nous considérons

$$dX_t = X_t^2 dt \quad \text{et } X_0 = 1$$

alors nous avons $X_t = \frac{1}{1-t}$ et la solution explose en $t = 1$ et nous avons ainsi pas existence sur tout $[0, T]$. Ceci vient du fait que $\mu(t, x) = x^2$ n'est pas à croissance au plus linéaire.

On remarque que le fait que X soit bornée dans L^2 nous donne l'existence de l'intégrale stochastique dans la définition même de X. En effet, nous avons

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \sigma^2(t, X_t)dt\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\int_0^T K\left(1 + X_t^2\right)dt\right] \leqslant KT\left(1 + \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \mathbb{E}\left[X_t^2\right]\right) < \infty$$

et ainsi $\sigma(t, X_t) \in \mathcal{H}^2([0, T])$.

On commence par rappeler le lemme de Gronwall que nous utiliserons dans la preuve de l'existence et unicité des solutions.

LEMME 9.2. Soit f une fonction continue positive telle que $f' \leqslant af$ pour un $a > 0$ alors nous avons

$$f(t) \leqslant f(0)e^{at}.$$

Commençons par prouver l'unicité des solutions de l'équation.

Preuve de l'unicité dans le Théorème 9.1. Si on suppose que l'on a deux solutions X_t et Y_t alors nous avons

$$X_t - Y_t = \int_0^t (\mu(s, X_s) - \mu(s, Y_s))\, ds + \int_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s))\, dB_s.$$

Ainsi, en utilisant le fait que $(x+y)^2 \leqslant 2x^2 + 2y^2$, on a

$$\mathbb{E}\left[|X_t - Y_t|^2\right] \leqslant 2\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t (\mu(s, X_s) - \mu(s, Y_s))\, ds\right)^2\right] + 2\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s))\, dB_s\right)^2\right].$$

Pour le premier terme, on peut utiliser l'inégalité de Jensen,

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t (\mu(s, X_s) - \mu(s, Y_s))\right)^2\right] \leqslant \mathbb{E}\left[t\int_0^t (\mu(s, X_s) - \mu(s, Y_s))^2\, ds\right] \leqslant \mathrm{T}\mathbb{E}\left[\int_0^t (\mu(s, X_s) - \mu(s, Y_s))^2\, ds.\right]$$

Pour le deuxième terme, on utiliser l'isométrie d'Itô, justifiée par le fait que X et Y sont bornées dans L^2 et on a

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s))\, dB_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s))^2\, ds\right].$$

On peut ainsi utiliser la propriété de Lipschitz, pour voir que

$$\mathbb{E}\left[|X_t - Y_t|^2\right] \leqslant \max(2\mathrm{TK}, 2\mathrm{K}) \int_0^t \mathbb{E}\left[|X_s - Y_s|^2\right] ds.$$

On est donc exactement dans le cadre du lemme de Gronwall avec $f(0) = 0$ et ainsi

$$\mathbb{E}\left[|X_t - Y_t|^2\right] = 0 \quad \text{ou encore} \quad \mathbb{P}\left(X_t = Y_t\right) = 1 \text{ pour tout } t \in [0, \mathrm{T}].$$

On utiliser maintenant l'argument de continuité avec une intersection sur les temps rationnels pour voir que nous avons

$$\mathbb{P}\left(X_t = Y_t \text{ pour tout } t \in [0, \mathrm{T}]\right) = 1.$$

□

Pour montrer l'existence, nous allons faire une preuve similaire au cas des équations différentielles ordinaires en faisant une itération de Picard :

$$X_t^{(n+1)} = x_0 + \int_0^t \mu(s, X_s^{(n)}) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^{(n)}) dB_s \quad \text{et} \quad X_t^{(0)} = x_0$$

et on va voir que

$$X^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} X$$

où X est une solution. On a donc plusieurs étapes à prouver :

- Montrer que l'itération est bien définie.
- Montrer l'existence d'une limite.
- Montrer que la limite est bornée dans L^2.
- Montrer que la limite est solution.

Lemme 9.3. Si $X_t^{(n)}$ est bornée dans L^2 sur $[0, \mathrm{T}]$, $\sup_{t\in[0,\mathrm{T}]} \mathbb{E}\left[|X_t^{(n)}|^2\right] \leqslant \mathrm{C}$ alors nous avons

$$\sigma(t, X_t^{(n)}) \in \mathcal{H}^2([0, \mathrm{T}]) \quad \text{et} \quad \int_0^t \mu(s, X_s^n) ds \in L^2$$

et $X_t^{(n+1)}$ est bornée dans L^2.

Démonstration. Nous avons

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \sigma^2(s, X_s^{(n)})ds\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\int_0^T K(1+X_s^2)ds\right] \leqslant KT(1+C)$$

et ainsi $\sigma(t, X_t^{(n)}) \in \mathcal{H}^2([0,T])$. De même nous obtenons,

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \mu(t, X_t^{(n)})dt\right)^2\right] \leqslant KT(1+C).$$

Par l'isométrie d'Itô et la définition de $X_t^{(n+1)}$, on obtient le résultat. □

Ceci nous prouve le premier point sur notre liste, pour notre deuxième, nous allons utiliser le fait que l'on a une suite de Cauchy dans l'espace des fonctions continues muni de la norme infinie.

LEMME 9.4. Il existe un $C > 0$ tel que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\left|X_s^{(n+1)} - X_s^{(n)}\right|^2\right] \leqslant C\int_0^t \mathbb{E}\left[\left|X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}\right|^2\right] ds.$$

Démonstration. On commence par écrire

$$X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)} = D_t + M_t$$

avec

$$D_t = \int_0^t \left(\mu(s, X_s^{(n)}) - \mu(s, X_s^{(n-1)})\right) ds \quad \text{et} \quad M_t = \int_0^t \left(\sigma(s, X_s^{(n)}) - \sigma(s, X_s^{(n-1)})\right) dB_s.$$

Ainsi, nous avons

$$\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\left|X_s^{(n+1)} - X_s^{(n)}\right|^2 \leqslant 2\sup_{0\leqslant s\leqslant t} D_s^2 + 2\sup_{0\leqslant s\leqslant t} M_s^2.$$

Pour le premier terme, nous avons

$$\sup_{0\leqslant s\leqslant t} D_s^2 \leqslant \sup_{0\leqslant s\leqslant t} s\int_0^s |\mu(u, X_u^{(n)}) - \mu(u, X_u^{(n-1)})|^2 du \leqslant T\int_0^t |\mu(u, X_u^{(n)}) - \mu(u, X_u^{(n-1)})|^2 du.$$

Pour le deuxième terme, on utilise le fait que M est une martingale et par l'inégalité L^2 de Doob, on a

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leqslant s\leqslant t} M_s^2\right] \leqslant 4\mathbb{E}\left[M_t^2\right] = 4\mathbb{E}\left[\int_0^t |\sigma(u, X_u^{(n)}) - \sigma(u, X_u^{(n-1)})|^2 du\right].$$

En réunissant ces deux bornes, nous avons

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\left|X_s^{(n+1)} - X_s^{(n)}\right|^2\right] \leqslant 8\mathbb{E}\left[\int_0^t |\sigma(u, X_u^{(n)}) - \sigma(u, X_u^{(n-1)})|^2 du\right] \\ + 2T\mathbb{E}\left[\int_0^t |\mu(u, X_u^{(n)}) - \mu(u, X_u^{(n-1)})|^2 du\right]$$

et finalement, en utilisant le fait que les fonctions sont Lipschitz en espace, on obtient le résultat voulu avec $C = 2\max(8K, 2KT)$. □

On voit que ce lemme nous donne presque une forme du lemme de Gronwall. Nous allons utiliser cela pour prouver l'existence d'une limite.

Proposition 9.5. Il existe un processus continu X borné dans L^2 tel que

$$\mathbb{P}\left(X^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_\infty} X_t\right) = 1.$$

Démonstration. Soit

$$g_n(t) = \mathbb{E}\left[\sup_{0\leqslant s\leqslant t} |X_s^{(n+1)} - X_s^{(n)}|^2\right].$$

La proposition précédente nous donne que nous avons

$$g_n(t) \leqslant C\int_0^t g_{n-1}(t)\mathrm{d}s$$

qui est presque une inégalité de Gronwall. On remarque que nous avons

$$\begin{aligned}
g_0(t) = \mathbb{E}\left[\sup_{0\leqslant s\leqslant t} |X_s^{(1)} - x_0|^2\right] &\leqslant \mathbb{E}\left[\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\left(\int_0^s \mu(u,x_0)\mathrm{d}u + \int_0^s \sigma(u,x_0)\mathrm{dB}_u\right)^2\right] \\
&\leqslant \mathbb{E}\left[\sup_{0\leqslant s\leqslant t} 2\left(\int_0^s \mu(u,x_0)\mathrm{d}u\right)^2 + 2\left(\int_0^s \sigma(u,x_0)\mathrm{dB}_u\right)^2\right] \\
&\leqslant 2T\int_0^t \mu(u,x_0)^2\mathrm{d}u + 2\mathbb{E}\left[\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\left(\int_0^s \sigma(u,x_0)\mathrm{dB}_u\right)^2\right] \\
&\leqslant 2T^2K(1+x_0^2) + 8\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \sigma(u,x_0)\mathrm{dB}_u\right)^2\right] \\
&\leqslant 2T^2K(1+x_0^2) + 8\mathbb{E}\left[\int_0^t \sigma^2(u,x_0)\mathrm{d}u\right] \\
&\leqslant KT\,(2T+8)\,(1+x_0^2) =: A.
\end{aligned}$$

En utilisant notre inégalité de type Gronwall, on obtient que

$$g_1(t) \leqslant CAt \Rightarrow g_2(t) \leqslant \frac{C^2t^2}{2}A \Rightarrow \cdots \Rightarrow g_n(t) \leqslant \frac{C^nt^n}{n!}A.$$

Ainsi par l'inégalité de Bienaymé–Chebyshev, on a

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\leqslant s\leqslant t} |X_s^{(n+1)} - X_s^{(n)}| \geqslant \frac{1}{2^n}\right) \leqslant 2^{2n}\frac{C^nt^n}{n!}A.$$

qui est le terme général d'une série convergente. Ainsi par le lemme de Borel–Cantelli, il existe $\Omega_0 \subset \Omega$ tel que $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ et tel que pour tout $\omega \in \Omega_0$, $\left(t \mapsto X_t^{(n)}(\omega)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans l'espace $(C([0,T]), \|\cdot\|_\infty)$ qui est complet. Ainsi pour tout $\omega \in \Omega_0$, il existe $X(\omega)$ un processus continu tel que $X^{(n)}(\omega)$ converge uniformément vers X.

De plus, nous avons que

$$\left\|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}\right\|_{L^2(\mathrm{d}\mathbb{P})} \leqslant \sqrt{g_n(T)} \leqslant \sqrt{A}\frac{C^{\frac{n}{2}}T^{\frac{n}{2}}}{n!}$$

qui est sommable et indépendant de t. Donc $(X^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans L^2 qui est aussi complet et ainsi converge dans L^2. Par unicité de la limite nous avons que $X^{(n)}$ converge vers X dans L^2. Enfin, nous pouvons écrire

$$\|X_t\|_{L^2} \leqslant x_0 + \|X_t - x_0\|_{L^2} \leqslant x_0 + \sum_{n=0}^{\infty}\|X_t^{n+1} - X_t^{(n)}\|_{L^2} \leqslant x_0 + \sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{A}\frac{C^{\frac{n}{2}}T^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n!}} =: B.$$

On obtient donc que X est borné dans L^2. □

Il ne nous reste plus qu'à voir que notre limite est bien solution de notre équation.

PROPOSITION 9.6. Nous avons les limites

$$\int_0^t \sigma(s, X_s^{(n)}) dB_s \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s \quad \text{et} \quad \int_0^t \mu(s, X_s^{(n)}) ds \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} \int_0^t \mu(s, X_s) ds.$$

Démonstration. Nous savons que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |\sigma(s, X_s^{(n)}) - \sigma(s, X_s)|^2 ds\right] \leqslant K\mathbb{E}\left[\int_0^T |X_s^{(n)} - X_s|^2 ds\right] = K\int_0^T \mathbb{E}\left[|X_s^{(n)} - X_s|^2\right] ds$$

Puisque nous avons que

$$\mathbb{E}\left[|X_s^{(n)} - X_s|^2\right] \leqslant \sum_{i=n}^{\infty} \sqrt{A}\frac{C^{\frac{i}{2}}T^{\frac{i}{2}}}{\sqrt{i!}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{unif. en } s} 0,$$

on obtient notre limite L^2, il ne nous reste plus qu'à utiliser l'isométrie d'Itô pour montrer que

$$\int_0^t \sigma(s, X_s^{(n)}) dB_s \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s.$$

La deuxième limite se prouve de manière similaire. □

Nous pouvons enfin prouver notre théorème.

Preuve du Théorème 9.1. On a

$$X_t^{(n+1)} = x_0 + \int_0^t \mu(s, X_s^{(n)}) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^{(n)}) dB_s.$$

On sait tout d'abord que $X_t^{(n+1)}$ converge presque sûrement vers X_t. De plus, la convergence L^2 des deux autres termes nous donne l'existence d'une sous-suite $(n_k)_k$ telle que pour tout $t \in [0, T] \cap \mathbb{Q}$,

$$\int_0^t \mu(s, X_s^{(n_k)}) ds \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} \int_0^t \mu(s, X_s) ds \quad \text{et} \quad \int_0^t \sigma(s, X_s^{(n_k)}) dB_s \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s.$$

Ainsi il existe pour tout $t \in [0, T] \cap \mathbb{Q}$, un ensemble Ω_t avec $\mathbb{P}(\Omega_t) = 1$, tel que pour tout $\omega \in \Omega_t$,

$$X_t = x_0 + \int_0^t \mu(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, B_s) dB_s.$$

On finit ensuite avec un argument de continuité pour voir qu'il exsite un ensemble Ω_0 de probabilité 1 sur lequel nous avons que X est solution de l'équation différentielle stochastique. □

9.3 Système d'équations différentielles stochastiques

Nous pouvons aussi considéré des systèmes déquations différentielles stochastiques en écrivant

$$d\vec{B}_t = \begin{bmatrix} dB_t^1 \\ \vdots \\ dB_t^d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^d, \quad \vec{\mu}(t, X_t) = \begin{bmatrix} \mu_1(t, \vec{X}_t) \\ \vdots \\ \mu_d(t, \vec{X}_t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^d, \quad \Sigma(t, \vec{X}_t) = \left[\sigma_{ij}(t, \vec{X}_t)\right]_{1\leqslant i,j\leqslant d} \in \mathbb{R}^{d\times d}$$

et

$$d\vec{X}_t = \vec{\mu}(t, X_t)dt + \Sigma(t, \vec{X}_t)d\vec{B}_t, \quad \vec{X}_0 = \vec{x}_0.$$

Par exemple si on considère $X_t = \cos(B_t)$ et $Y_t = \sin(B_t)$ alors on a par la formule d'Itô

$$dX_t = -\sin(B_t)dB_t - \frac{1}{2}\cos(B_t)dt = -Y_t dB_t - \frac{1}{2}X_t dt$$

et de même,

$$dY_t = X_t dB_t - \frac{1}{2}Y_t dt.$$

Ainsi on peut écrire

$$d\begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} -Y_t & 0 \\ X_t & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dB_t \\ dB_t \end{bmatrix}.$$

9.4 Solution forte et solution faible

Notre théorème d'existence et unicité des solutions nous donne plusieurs propriétés pour notre solution : la solution existe, est unique et est adapté par rapport à la filtration brownienne standard. On a fixé un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\}_t)$ et un mouvement brownien standard sur cet espace et on a pu construire une solution adaptée X telle que

$$X_t = x_0 + \int_0^t \mu(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$$

On appelle ce type de solution une *solution forte*.

DÉFINITION 9.7

Si pour tout $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\})$ et B un mouvement brownien standard sur cet espace, il existe un processus X adapté tel que

$$dX_t = x_0 + \int_0^t \mu(s, X_s)dt + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s,$$

On dit que notre équation différentielle stochastique possède une solution forte.

Il existe un autre type de solutions où on construit à la fois le mouvement brownien et la solution X, on parle alors de *solution faible*.

DÉFINITION 9.8

Si il existe $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\}_t)$ et B un mouvement brownien standard sur cet espace et un processus X tel que

$$dX_t = x_0 + \int_0^t \mu(s, X_s)dt + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s,$$

On dit que notre équation différentielle stochastique possède une solution faible.

On a aussi deux notions d'unicité des équations différentielles stochastiques.

DÉFINITION 9.9

Soient X et Y deux solutions d'une équation différentielle stochastique. Si on a

$$X \overset{(d))}{=} Y$$

alors nous avons *unicité faible*.

Si on a

$$\mathbb{P}\left(X_t = Y_t \text{ pour tout } t \in [0, T]\right) = 1$$

alors nous avons *unicité trajectorielle*.

Ainsi, notre théorème d'existence et d'unicité nous donne unicité trajectorielle de notre problème.

10. Théorèmes de représentations

10.1 Représentation des martingales

On a vu que si $X \in \mathcal{H}^2$ alors $\int_0^t X_s dB_s$ était une martingale. En fait, nous avons la réciproque par le théorème suivant.

Théorème 10.1

Soit X une martingale par rapport à la filtration brownienne standard. Si il existe $T > 0$ tel que $\mathbb{E}\left[X_T^2\right] < \infty$ et si $X_0 = 0$ alors il existe $Z \in \mathcal{H}^2([0, T])$ tel que

$$X_t = \int_0^t Z_s dB_s \quad \text{pour tout } 0 \leqslant t \leqslant T.$$

De plus, Z est unique à part sur un ensemble de $d\mathbb{P} \times dt$-mesure zéro.

Preuve de l'unicité. Si Z et ζ sont deux processus dans $\mathcal{H}^2([0, T])$ tel que

$$X_t = \int_0^t Z_s dB_s = \int_0^t \zeta_s dB_s$$

alors

$$\int_0^T (Z_s - \zeta_s)\, dB_s = 0$$

et par l'isométrie d'Itô, nous obtenons

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T (Z_s - \zeta_s)\, dB_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T (Z_s - \zeta_s)^2\right] = 0$$

et ainsi $Z_s = \zeta_s$ pour presque tout $(\omega, s) \in \Omega \times [0, T]$. □

La preuve de l'existence est plus difficile et nous la construirons le long de cette section. Tout d'abord, regardons un exemple où on savait déjà que nous avions cela : un cas du mouvement brownien géométrique. On rappelle l'équation différentielle stochastique,

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t, \quad X_0 = 1.$$

Si on a $\mu = 0$, alors nous avons

$$dX_t = \sigma X_t dB_t, \quad \text{ou encore} \quad X_t = 1 + \sigma \int_0^t X_s dB_s.$$

On connait la solution de cette EDS,

$$X_t = \exp\left(\sigma B_t - \frac{\sigma^2 t}{2}\right)$$

qui est la martingale exponentielle que nous avions vu dans la Section 3. Finalement, $(X_t - 1)_{t \geqslant 0}$ est une martingale et on peut vérifier que $\mathbb{E}\left[(X_T - 1)^2\right] < \infty$ et on a bien

$$X_t = 1 + \int_0^t \sigma \exp\left(\sigma B_s - \frac{\sigma^2 s}{2}\right) ds = 1 + \int_0^t Z_s dB_s.$$

avec $Z_s = \exp\left(\sigma B_s - \frac{\sigma^2 s}{2}\right) \in \mathcal{H}^2$. On peut réécrire ce calcul comme

$$e^{\sigma B_t} = e^{\frac{\sigma^2 t}{2}} + \int_0^t \sigma \exp\left(\sigma B_s - \frac{\sigma^2}{2}(s - t)\right) dB_s.$$

Dans notre calcul, on peut choisir $\sigma \in \mathbb{C}$, ainsi si $\sigma = \mathrm{i}\theta$, on obtient

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta B_t} = \mathrm{e}^{-\frac{\theta^2 t}{2}} + \int_0^t \mathrm{i}\theta \exp\left(\mathrm{i}\theta B_s - \frac{\theta^2}{2}(t-s)\right) \mathrm{d}B_s.$$

De plus, par la loi de Markov simple, nous savons que $(B_{u+s} - B_u)_{s \geqslant 0}$ est un mouvement brownien standard et ainsi

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(B_{t+s}-B_s)} = \mathrm{e}^{-\frac{\theta^2 t}{2}} + \int_s^{s+t} \mathrm{i}\theta \exp\left(\mathrm{i}\theta(B_u - B_s) - \frac{\theta^2}{2}(t+s-u)\right) \mathrm{d}B_u =: \int_0^T Z_u \mathbb{1}_{u \in [s,t+s]} \mathrm{d}B_u.$$

La prochaine étape est de considérer des produits de tels processus

$$\prod_{j=1}^n \exp\left(\mathrm{i}\theta_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\right).$$

Pour ce faire, nous allons utiliser le lemme suivant qui nous permettre de calculer le produit de ces variables aléatoires.

LEMME 10.2. Soient X, Y des variables aléatoires bornées telles que

$$X = x_0 + \int_0^T Z_t \mathrm{d}B_t, \quad Y = y_0 + \int_0^T \zeta_t \mathrm{d}B_t$$

avec $Z, \zeta \in \mathcal{H}^2([0,T])$. Si $\int_0^T Z_t \zeta_t \mathrm{d}t = 0$ alors

$$XY = x_0 y_0 + \int_0^T (X_t Z_t + Y_t \zeta_t) \,\mathrm{d}B_t$$

avec $X_t = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t]$ et $Y_t = \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_t]$.

Démonstration. Tout d'abord on remarque que

$$X_t = x_0 + \int_0^t Z_s \mathrm{d}B_s, \quad Y_t = y_0 + \int_0^t \zeta_s \mathrm{d}B_s.$$

Par la formule d'Itô, nous avons

$$\mathrm{d}(X_t Y_t) = X_t \mathrm{d}Y_t + Y_t \mathrm{d}X_t + \mathrm{d}\langle X, Y\rangle_t = X_t \zeta_t \mathrm{d}B_t + Y_t Z_t \mathrm{d}B_t + Z_t \zeta_t \mathrm{d}t.$$

En intégrant de 0 à T, on obtient

$$XY - x_0 y_0 = \int_0^T (X_t Z_t + Y_t \zeta_t) \,\mathrm{d}B_t + \int_0^T Z_t \zeta_t \mathrm{d}t = \int_0^T (X_t Z_t + Y_t \zeta_t) \,\mathrm{d}B_t$$

et le résultat est prouvé. □

On peut utiliser ce lemme pour prouver le corollaire suivant qui nous donner une représentation des variables aléatoires produits.

COROLLAIRE 10.3. Soient $0 \leqslant t_0 < t_1 < \cdots < t_n \leqslant T$ et

$$Y = \prod_{j=1}^n \exp\left(\mathrm{i}\theta_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\right)$$

alors on peut écrire

$$Y = \mathbb{E}[Y] + \int_0^T Z_t \mathrm{d}B_t$$

avec $Z \in \mathcal{H}^2([0,T])$.

Démonstration. On remarque tout d'abord que Y est bornée puisque chaque terme est de module 1. De plus, on a

$$\exp\left(i\theta_j(B_{t_j}-B_{t_{j-1}})\right) = \exp\left(-\frac{\theta_j^2}{2}(t_j-t_{j-1})\right) + \int_{t_{j-1}}^{t_j} Z_s dB_s = \int_0^T Z_s^{(j)} \mathbb{1}_{[t_j,t_{j-1}]} dB_s.$$

Par propriété des fonctions indicatrices, on a pour $i \neq j$,

$$\int_0^T Z_s^{(j)} \mathbb{1}_{[t_j,t_{j-1}]} Z_s^{(i)} \mathbb{1}_{[t_i,t_{i-1}]} ds = 0.$$

Thus, by a clear induction and the previous lemma, we get that

$$Y = \mathbb{E}[Y] + \int_0^T Z_t dB_t$$

et $Z \in \mathcal{H}^2([0,T])$. □

Maintenant l'idée de la preuve est la suivante, si on considère $X \in \{X \in \mathcal{F}_T, \mathbb{E}\left[|X_T|^2\right] < \infty\} = L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ alors il existe une suite de variables aléatoires (X_n) telle que

$$X_n \in \mathrm{Vect}\left\{\prod_{j=1}^n \exp\left(i\theta_j(B_{t_j}-B_{t_{j-1}})\right), \theta_j \in \mathbb{R}, 0 \leqslant t_0 < t_1 < \cdots < t_n \leqslant T, n \geqslant 1\right\} =: S$$

et telle que $X_n \to X$ et on peut transférer la propriété de représentation depuis S jusqu'à L^2. Pour ce faire nous allons utiliser la densité de S dans L^2 que nous ne prouverons pas

LEMME 10.4. S est dense dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$.

et la proposition suivante

PROPOSITION 10.5. Si X_n peut être écrit $X_n = \mathbb{E}[X_n] + \int_0^T Z_{n,t} dB_t$ avec $Z_n \in \mathcal{H}^2$ et si $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2(d\mathbb{P})} X$ alors il existe $Z \in \mathcal{H}^2$ tel que $Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2(d\mathbb{P}\times dt)} Z$ et

$$X = \mathbb{E}[X] + \int_0^T Z_t dB_t.$$

Démonstration. Comme X_n converge vers X dans L^2 on sait que $\mathbb{E}[X_n]$ converge vers $\mathbb{E}[X]$. Ainsi $(Y_n) := (X_n - \mathbb{E}[X_n])$ est une suite convergente et donc de Cauchy dans $L^2(d\mathbb{P})$ et donc

$$E\left[|Y_n - Y_m|^2\right] = \mathbb{E}\left[\left|\int_0^T (Z_{n,t} - Z_{m,t}) dB_t\right|^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T |Z_{n,t} - Z_{m,t}|^2\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Donc la suite (Z_n) est une suite de Cauchy dans $L^2(d\mathbb{P} \times dt)$ qui est complet et converge donc vers $Z \in \mathcal{H}^2$ et le résultat est prouvé. □

On est maintenant paré à prouver le Théorème 10.1.

Preuve du Théorème 10.1. Comme on a $\mathbb{E}[X_T^2] < \infty$, on sait qu'il existe $(X_n) \in S^{\mathbb{N}}$ telle que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2(d\mathbb{P})} X$. Par la proposition précédente, on sait qu'il existe $Z \in \mathcal{H}^2$ tel que

$$X^T = \mathbb{E}[X_T] + \int_0^T Z_s dB_s = \int_0^T Z_s dB_s.$$

Ainsi, pour tout $t \in [0, \mathrm{T}]$,

$$\mathrm{X}_t = \mathbb{E}\left[\mathrm{X}_\mathrm{T} | \mathcal{F}_t\right] = \int_0^t \mathrm{Z}_s \mathrm{dB}_s.$$

□

10.2 Théorème de représentation de Lévy

Le théorème de représentation est aussi très utile pour prouver que des martingales sont en fait des mouvement browniens. Il suffit en effet de calculer leur variation quadratique.

Théorème 10.6

Soit M une martingale par rapport à la filtration brownienne standard continue. Si $\mathbb{E}\left[\mathrm{M}_t^2\right] < \infty$ et $\langle \mathrm{M} \rangle_t = t$ pour tout $t \geqslant 0$ alors $(\mathrm{M}_t - \mathrm{M}_0)_{t \geqslant 0}$ est un mouvement brownien standard.

Démonstration. On voit tout d'abord que $\mathrm{M}_0 - \mathrm{M}_0 = 0$ et que $\mathrm{M} - \mathrm{M}_0$ est bien continue. Il suffit donc de prouver que $\mathrm{M}_t - \mathrm{M}_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ et que $\mathrm{M}_t - \mathrm{M}_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$. Pour montrer cela, on va montrer que

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\mathrm{M}_t - \mathrm{M}_s)} \middle| \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{P}(\mathrm{A})\mathrm{e}^{-\frac{\theta^2(t-s)}{2}}.$$

En effet, cela équivaut à pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{F}_s$,

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_\mathrm{A} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\mathrm{M}_t - \mathrm{M}_s)}\right] = \mathbb{P}(\mathrm{A})\mathrm{e}^{-\frac{\theta^2(t-s)}{2}}$$

et en prenant $\mathrm{A} = \Omega$, on obtient que $\mathrm{M}_t - \mathrm{M}_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$. De plus, pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{F}_s$ avec $\mathbb{P}(\mathrm{A}) \geqslant 0$, on a

$$\mathbb{E}_\mathrm{A}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\mathrm{M}_t - \mathrm{M}_s)}\right] := \frac{\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_\mathrm{A} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\mathrm{M}_t - \mathrm{M}_s)}\right]}{\mathbb{P}(\mathrm{A})} = \mathrm{e}^{-\frac{\theta^2(t-s)}{2}}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}_\mathrm{A}\left(\mathrm{M}_t - \mathrm{M}_s \leqslant x\right) := \frac{\mathbb{P}\left(\{\mathrm{M}_t - \mathrm{M}_s \leqslant x\} \cap \mathrm{A}\right)}{\mathbb{P}(\mathrm{A})} = \int_{-\infty}^x \frac{\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2(t-s)}}}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \mathrm{d}y = \mathbb{P}(\mathrm{M}_t - \mathrm{M}_s \leqslant x)$$

où on a utilisé dans la dernière égalité le fait que $\mathrm{M}_t - \mathrm{M}_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$. Ceci nous donne donc

$$\mathbb{P}\left(\{\mathrm{M}_t - \mathrm{M}_s \leqslant x\} \cap \mathrm{A}\right) = \mathbb{P}(\mathrm{A})\mathbb{P}(\mathrm{M}_t - \mathrm{M}_s \leqslant x)$$

et $\mathrm{M}_t - \mathrm{M}_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$.

Pour prouver l'égalité, nous allons utiliser le théorème de représentation des martingales. On sait qu'il existe X tel que $\mathrm{dM}_t = \mathrm{X}_t \mathrm{dB}_t$ et on sait de plus que $\mathrm{d}\langle \mathrm{M} \rangle_t = \mathrm{d}t$ par hypothèse. Par la formule d'Itô, nous avons

$$\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\mathrm{M}_t - \mathrm{M}_s)}\right) = \mathrm{i}\theta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\mathrm{M}_t - \mathrm{M}_s)} \mathrm{dM}_t - \frac{\theta^2}{2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\mathrm{M}_t - \mathrm{M}_s)} \mathrm{d}t = \mathrm{i}\theta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\mathrm{M}_t - \mathrm{M}_s)} \mathrm{X}_t \mathrm{dB}_t - \frac{\theta^2}{2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\mathrm{M}_t - \mathrm{M}_s)} \mathrm{d}t.$$

Ainsi, en intégrant de s à t,

$$\phi(t) := \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\mathrm{M}_t - \mathrm{M}_s)} \middle| \mathcal{F}_s\right] = 1 + \mathbb{E}\left[\int_s^t \mathrm{i}\theta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\mathrm{M}_u - \mathrm{M}_s)} \mathrm{X}_u \mathrm{dB}_u \middle| \mathcal{F}_s\right] - \mathbb{E}\left[\frac{\theta^2}{2} \int_s^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\mathrm{M}_u - \mathrm{M}_s)} \middle| \mathcal{F}_s\right] \mathrm{d}u.$$

Pour la première intégrale, puisque l'intégrande est dans $\mathcal{H}^2$, on a une martingale et ainsi

$$\mathbb{E}\left[\int_s^t \mathrm{i}\theta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\mathrm{M}_u - \mathrm{M}_s)} \mathrm{X}_u \mathrm{dB}_u \middle| \mathcal{F}_s\right] = 0$$

et l'équation devient

$$\phi(t) = 1 - \frac{\theta^2}{2}\int_s^t \phi(t) \Rightarrow \phi(t) = \mathrm{e}^{-\frac{\theta^2(t-s)}{2}}$$

et le résultat est prouvé. □

Donnons un exemple, si on considère le processus

$$M_t = \int_0^t \mathrm{signe}(B_s)dB_s \quad \text{avec} \quad \mathrm{signe}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geqslant 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

On voit que le processus $\mathrm{signe}(B)$ est bien dans $\mathcal{H}^2([0,T])$ pour tout $T > 0$ car le processus est bornée. Ainsi M est une martingale continue qui commence en zéro et nous avons $\mathbb{E}\left[M_t^2\right] = t < \infty$. On sait calculer sa variation quadratique qui est

$$\langle M\rangle_t = \int_0^t \mathrm{signe}^2(B_s)ds = \int_0^t ds = t.$$

Ainsi, M est un mouvement brownien standard.

10.3 Représentation par changement de temps

Le théorème suivant nous donne que l'on peut réaliser un changement de temps d'une intégrale stochastique (et donc d'une martingale en génerale) pour retrouver un mouvement brownien. La réciproque nous donne aussi que toute intégrale stochastique peut être représentée comme le changement de temps d'un mouvement brownien.

Théorème 10.7

Soit $Z \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{Loc}}([0,T])$ pour tout $T > 0$ et soit $X_t = \int_0^t Z_s dB_s$. Si on a

$$\mathbb{P}\left(\int_0^\infty Z_s^2 ds = \infty\right) = 1$$

alors $(X_{\tau_t})_{t\geqslant 0}$ est un mouvement brownien standard avec

$$\tau_t = \min\{u, \int_0^u Z_s^2 ds \geqslant t\}.$$

De plus, il existe un mouvement brownien standard $\tilde{B}$ tel que $X_t = \tilde{B}_{\langle X\rangle_t}$.

Démonstration. On considère la martingale exponentielle,

$$M_t = \exp\left(i\theta X_t + \frac{\theta^2}{2}\int_0^t Z_s^2 ds\right) = \exp\left(i\theta\int_0^t Z_s dB_s\right)\exp\left(\frac{\theta^2}{2}\int_0^t Z_s^2 ds\right) =: Y_t Y_t'.$$

Par la formule d'Itô, on a

$$dY_t = i\theta Z_t Y_t dB_t - \frac{\theta^2}{2}Z_t^2 Y_t dt, \quad dY_t' = \frac{\theta^2}{2}Z_t^2 Y_t' dt, \quad d\langle Y, Y'\rangle_t = 0.$$

Ainsi, par la formule du produit on obtient

$$dM_t = Y_t dY_t' + Y_t' dY_t = \frac{\theta^2}{2}Z_t^2 M_t dt + i\theta Z_t M_t dB_t - \frac{\theta^2}{2}Z_t^2 M_t dt = i\theta Z_t M_t dB_t.$$

Ainsi, on peut écrire

$$Z_t = 1 + \int_0^t i\theta Z_t M_t dB_t$$

et on voit que M est une martingale locale. On admet que cela nous donne que (M_{τ_t}) est une martingale locale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_{\tau_t}$. De plus, on voit que pour tout $T > 0$,

$$|M_{\tau_t}| \leqslant e^{\frac{\theta^2 T}{2}}$$

et ainsi $(M_{\tau_t})_{t\geqslant 0}$ est une vraie martingale par rapport à $\{\mathcal{F}_{\tau_t}\}$. On sait que $X_{\tau_0} = X_0 = 0$ et on admet que $(X_{\tau_t})_{t\geqslant 0}$ est continu alors nous avons plus qu'a prouver que les accroissements sont gaussiens et indépendants. On utilise le même critère vu précedemment et nous allons prouver que

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(i\theta\left(X_{\tau_t} - X_{\tau_s}\right)\right)|\mathcal{F}_{\tau_s}\right] = \exp\left(-\frac{\theta^2(t-s)}{2}\right).$$

On réécrit cette inégalité comme

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(i\theta X_{\tau_t} + \frac{\theta^2 t}{2}\right)\middle|\mathcal{F}_{\tau_s}\right] = \exp\left(i\theta X_{\tau_s} + \frac{\theta^2 s}{2}\right)$$

et par définition de notre changement de temps on peut réécrire encore une fois cette inégalité

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(i\theta X_{\tau_t} + \frac{\theta^2}{2}\int_0^{\tau_t} Z_u^2 \mathrm{d}u\right)\middle|\mathcal{F}_{\tau_s}\right] = \exp\left(i\theta X_{\tau_s} + \frac{\theta^2}{2}\int_0^{\tau_s} Z_u^2 \mathrm{d}u\right)$$

ou encore $\mathbb{E}\left[M_{\tau_t}|\mathcal{F}_{\tau_s}\right] = M_{\tau_s}$ que nous savons puisque (M_{τ_t}) est une $\mathcal{F}_{\tau_t}$-martingale.

Pour la réciproque, on sait que $(X_{\tau_t})_{t\geqslant 0}$ est un mouvement brownien et on définit $\tilde{B}_t = X_{\tau_t}$. Alors nous avons

$$\tilde{B}_{\langle X\rangle_t} = X_{\tau_{\langle X\rangle_t}} \quad \text{avec} \quad \langle X\rangle_t = \int_0^t Z_s^2 \mathrm{d}s.$$

et par définition

$$\tau_{\langle X\rangle_t} = \inf\{u, \int_0^u Z_s^2 \mathrm{d}s \geqslant \int_0^t Z_s^2 \mathrm{d}s\} = t.$$

Finalement, nous avons $X_t = B_{\langle X\rangle_t}$. □

Nous pouvons voir des exemples d'applications de ce théorème. On peut commencer facilement en considérant $X_t = aB_t = a\int_0^t a\mathrm{d}B_t$ alors on a

$$\tau_t = \inf\left\{u, \int_0^u a^2 \mathrm{d}s \geqslant t\right\} = \inf\{u, ua^2 \geqslant t\} = \frac{t}{a^2}.$$

Ainsi nous savons que (X_{τ_t}) est un mouvement brownien standard i.e $\left(aB_{\frac{t}{a^2}}\right)_{t\geqslant 0}$ est un mouvement brownien standard qui est la propriété de changement d'échelle.

Prenons un autre exmple et considérons et essayons de calculer la probabilité suivante

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant 3}\int_0^t \frac{\mathrm{d}B_s}{\sqrt{1+s}} \geqslant 1\right).$$

On commence par voir qu'il existe un mouvement brownien $\tilde{B}$ tel que, si X_t dénote l'intégrale stochastique,

$$X_t = \int_0^t \frac{\mathrm{d}B_s}{\sqrt{1+s}} = \tilde{B}_{\langle X\rangle_t}$$

mais on peut calculer

$$\langle X\rangle_t = \int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{1+s} = \ln(1+t).$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\leqslant s\leqslant 3} X_s \geqslant 1\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{0\leqslant s\leqslant 3} \tilde{B}_{\log(1+s)} \geqslant 1\right) = \mathbb{P}\left(|B_{\log(4)}| \geqslant 1\right) = 2\mathbb{P}\left(\mathcal{N}(0,1) \geqslant \frac{1}{\sqrt{\log(4)}}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\frac{1}{\sqrt{\log(4)}}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \approx 0,396.$$

11. Théorie de Girsanov

Le principe de la théorie de Girsanov est de relier un processus avec dérive à un processus sans dérive.

11.1 Le cas le plus simple : le mouvement brownien avec dérive

Nous allons commencer par illustrer ce phénomène dans le cas plus simple du mouvement brownien avec dérive

$$X_t = \mu t + B_t.$$

Nous allons chercher à calculer pour $0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leqslant T$ et f une fonction bornée Borélienne,

$$\mathbb{E}\left[f\left(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}\right)\right].$$

On commence par écrire, avec $t_0 = 0$,

$$f\left(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}\right) = f\left(X_{t_1} - X_{t_0}, (X_{t_2} - X_{t_1}) + (X_{t_1} - X_{t_0}), \ldots, \sum_{i=1}^{n} (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})\right)$$
$$=: g\left(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}\right)$$

Comme les accroissements du mouvement brownien sont indépendants et que $X_{t_i} - X_{t_{i-1}} \sim \mathcal{N}\left(\mu(t_i - t_{i-1}), t_i - t_{i-1}\right)$, nous connaissons la densité du vecteur gaussien $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$,

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \prod_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})}} \prod_{i=1}^{n} \exp\left(-\frac{(x_i - x_{i-1} - \mu(t_i - t_{i-1}))^2}{2(t_i - t_{i-1})}\right).$$

On commence par développer le numérateur dans l'exponentielle pour écrire cette densité

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \prod_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})}} \prod_{i=1}^{n} \exp\left(-\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2(t_i - t_{i-1})}\right) \cdot \prod_{i=1}^{n} \exp\left(\mu(x_i - x_{i-1}) - \frac{\mu^2}{2}(t_i - t_{i-1})\right)$$

que l'on peut encore réécrire

$$\left[\prod_{i=1}^{n} \frac{\exp\left(-\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2(t_i - t_{i-1})}\right)}{\sqrt{2\pi(t_i - t_{i-1})}}\right] \cdot \exp\left(\mu x_n - \frac{\mu^2}{2} t_n\right).$$

Le premier terme est la densité du vecteur $(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ et ainsi nous venons de prouver l'identité

$$\mathbb{E}\left[f\left(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}\right)\right] = \mathbb{E}\left[f(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n}) M_{t_n}\right] \quad \text{avec} \quad M_{t_n} = \exp\left(\mu B_{t_n} - \frac{\mu^2}{2} t_n\right).$$

On remarque que M_{t_n} n'est autre que la martingale exponentielle au temps t_n. On peut donc réécrire cette identité par

$$\mathbb{E}\left[f\left(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}\right)\right] = \mathbb{E}\left[f(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n}) \mathbb{E}\left[M_T | \mathcal{F}_{t_n}\right]\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[f(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n}) M_T\right] | \mathcal{F}_{t_n}\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[f(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n}) M_T\right].$$

Donnons une application de ce que nous avons prouvé, si on considère la distribution de $\max_{[0,T]}(B_t + \mu t)$. Alors si $S(n) = \frac{iT}{n}$ pour $0 \leqslant i \leqslant n$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \max_{t\in S(n)} (B_t + \mu t) = \max_{t\in[0,T]} (B_t + \mu t).$$

Ainsi, on peut calculer,

$$\mathbb{P}\left(\max_{t\in[0,T]} (B_t + \mu t) < x\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\max_{t\in S(n)}(B_t+\mu t)<x}\right] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\max_{t\in S(n)} B_t<x} \exp\left(\mu B_T - \frac{\mu^2}{2}T\right)\right]$$

où on a utilisé le théorème de convergence dominée puis la formule qu'on a prouvé plus haut. Puisque l'intégrande est borné par $\exp\left(\mu B_T - \frac{\mu^2}{2}T\right) \in L^1$, par le théorème de convergence dominée,

$$\mathbb{P}\left(\max_{t\in[0,T]} (B_t + \mu t) < x\right) = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\max_{t\in[0,T]} B_t<x} \exp\left(\mu B_T - \frac{\mu^2}{2}T\right)\right]$$

et nous pouvons calculer cette espérance car nous connaissons la densité jointe de $(\max_{t\in[0,T]} B_t, B_T)$,

$$f(u,v) = \frac{2(2v-u)}{\sqrt{2\pi T}} \exp\left(-\frac{(2v-u)^2}{2T}\right) \quad \text{pour} \quad (u,v) \in \{\max(0,u) \leqslant v\}.$$

11.2 Reformulation en tant que mesure sur $\mathcal{C}([0,T])$

On peut voir notre théorème d'une autre façon en considérant un autre point de vue du mouvement brownien. Pour l'instant, on a vu le mouvement brownien comme un processus stochastique mais cela induit une mesure sur l'espace des fonctions continues $\mathcal{C}([0,T])$. Soit $\Omega = (\mathcal{C}([0,T]), \|\cdot\|_\infty)$ et $\mathcal{B}$ la tribu borélienne. Soit $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ un espace de probabilité, alors on peut considérer le mouvement brownien comme une variable aléatoire

$$B : \tilde{\Omega} \to \mathcal{C}([0,T]) \quad \text{avec} \quad B(\tilde{\omega}) = t \mapsto B_t(\tilde{\omega})$$

on peut ainsi définir la distribution du mouvement brownien sur l'espace des fonctions continues $(\Omega, \mathcal{B})$ par

$$\mathbb{P}(A) = \tilde{\mathbb{P}}(B^{-1}(A)).$$

Avec cette formalisation, on peut réécrire le résultat que nous avons prouvé

Théorème 11.1

Soit $(B_t)_{t\in[0,T]}$ un $\mathbb{P}$-mouvement brownien et $\mathbb{Q}$ la mesure sur $\mathcal{C}([0,T])$ induite par $X_t = \mu t + B_t$ alors pour toute fonction bornée mesurable W sur $\mathcal{C}([0,T])$, on a

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[W] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[WM_T] \quad \text{avec} \quad M_T = \exp\left(\mu B_T - \frac{\mu^2}{2}T\right).$$

Regardons une application pour calculer la probabilité d'atteindre une droite. Si on considère la probabilité d'atteindre une droite horizontale, $\tau_a = \inf\{B_t = a\}$ alors on a vu que la densité de τ_a est donnée par

$$\frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{a^2}{2t}} \mathbb{1}_{t\geqslant 0}.$$

Si on considère le temps d'atteinte d'une droite $L : a + bt$, $\tau_L = \inf\{t \geqslant 0, B_t = a + bt\}$ pour $a > 0$ alors on voit que $\tau_L = \tau_a^X = \inf\{t \geqslant 0, X_t = a\}$ avec $X_t = B_t - bt$. Ainsi, avec le formalisme de $\mathbb{P}$ la mesure induite par le mouvement brownien et $\mathbb{Q}$ la mesure induite par le mouvement brownien avec dérive, on a

$$\mathbb{P}(\tau_L \leqslant t) = \mathbb{Q}(\tau_a \leqslant t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{1}_{\tau_a\leqslant t}] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{1}_{\tau_a\leqslant t} M_T]$$

où on a utilisé notre première version du théorème de Girsanov. On peut utiliser le fait que M est une martingale pour écrire

$$\mathbb{P}(\tau_L \leqslant t) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\tau_a \leqslant t} M_T | \mathcal{F}_{t\wedge\tau_a}\right]\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathbb{1}_{\tau_a \leqslant t}\mathbb{E}\left[M_T | \mathcal{F}_{t\wedge\tau_a}\right]\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathbb{1}_{\tau_a \leqslant t} M_{t\wedge\tau_a}\right]$$

puis

$$\mathbb{P}(\tau_L \leqslant t) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathbb{1}_{\tau_a \leqslant t}\exp\left(-bB_{t\wedge\tau_a} - \frac{b^2 t\wedge\tau_a}{2}\right)\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathbb{1}_{\tau_a \leqslant t}\exp\left(-ba - \frac{b^2\tau_a}{2}\right)\right]$$

et en utilisant la densité connue de $\mathbb{1}_{\tau_a \leqslant t}$, on obtient

$$\mathbb{P}(\tau_L \leqslant t) = \int_0^t \exp\left(-ba - \frac{b^2 s}{2}\right)\frac{a}{\sqrt{2\pi s^3}}\exp\left(-\frac{a^2}{2s}\right)ds = \int_0^t \frac{a}{\sqrt{2\pi s^3}}\exp\left(-\frac{(a+bt)^2}{2s}\right)ds.$$

On peut aussi voir une autre application en considérant deux mouvement browniens avec dérive du même mouvement brownien pour $t \in [0, T]$,

$$X_t = \mu t + B_t \quad \text{et} \quad \tilde{X}_t = \tilde{\mu} t + B_t.$$

Si on considère $\mathbb{Q}$ la mesure induite par X et $\tilde{\mathbb{Q}}$ la mesure induite par $\tilde{X}$ et $\mathbb{P}$ la mesure induite par B, alors pour A un borélien de $\mathcal{C}([0,T])$, on a

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{1}_A M_T].$$

Ainsi $\mathbb{Q}(A) = 0$ est équivalent à $\mathbb{P}(A) = 0$ puisque $M_T > 0$ mais pour la même raison ceci est équivalent à $\tilde{\mathbb{Q}}(A) = 0$. On voit donc que

$$\mathbb{Q}(A) = 0 \Longleftrightarrow \tilde{\mathbb{Q}}(A) = 0$$

On dit que les mesures $\mathbb{Q}$ et $\tilde{\mathbb{Q}}$ sont *équivalentes*. Sur un temps fini, on voit que l'on ne peut pas différencier les deux processus ! Sur un temps infini, cela est différent car on sait que si on considère l'événement,

$$A_\mu = \left\{f \in \mathcal{C}([0,T]), \lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t} = \mu\right\}$$

alors on a

$$\mathbb{Q}(A_\mu) = 1 \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbb{Q}}(A_\mu) = 0.$$

Dans ce cas, on dit que les mesures sont *singulières*.

11.3 Théorème de Girsanov pour les processus d'Itô

On peut généraliser notre résultat pour le mouvement brownien avec dérive aux processus d'Itô sous certaines hypothèses. Nous allons commencer par considérer des mouvement browniens avec une forme plus générale de la dérive.

Théorème 11.2

Suppose that μ_s est un processus borné, adapté sur $[0, T]$, et soit B un $\mathbb{P}$-mouvement brownien, si

$$X_t = \int_0^t \mu_s ds + B_t$$

alors

$$M_t = \exp\left(-\int_0^t \mu_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \mu_s^2 ds\right)$$

est une $\mathbb{P}$-martingale. De plus si $\mathbb{Q}$ est la mesure sur $\mathcal{C}([0,T])$ définie par

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{1}_A M_T]$$

alors X est un $\mathbb{Q}$-mouvement brownien.

Démonstration. Par la formule d'Itô, on a

$$\mathrm{dM}_t = -\mu_t \mathrm{M}_t \mathrm{dB}_t$$

et ainsi M est une $\mathbb{P}$-martingale locale. On remarque que l'on a une équation différentielle stochastique et comme μ est borné, les conditions de Lipschitz et de croissance au plus linéaire sont vérifiées ainsi M existe et est bornée dans L^2 : $\mathbb{E}[\sup_{0\leqslant t\leqslant \mathrm{T}} \mathrm{M}_t^2] < \infty$. Ceci nous donne que M est une $\mathbb{P}$-martingale. En effet, soit $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite localisante alors nous avons pour $s \leqslant t$,

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{M}_{t\wedge\tau_n}|\mathcal{F}_s\right] = \mathrm{M}_{s\wedge\tau_s}.$$

Comme M est bornée dans L^2 alors M est bornée dans L^1, puisque

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leqslant t\leqslant \mathrm{T}} \mathrm{M}_t\right] \leqslant \sqrt{\mathbb{E}\left[\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant \mathrm{T}} \mathrm{M}_t\right)^2\right]} = \sqrt{\mathbb{E}\left[\sup_{0\leqslant t\leqslant \mathrm{T}} \mathrm{M}_t^2\right]} < \infty$$

et par le théorème de convergence dominée en prenant $n \to \infty$, on obtient

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{M}_t|\mathcal{F}_s\right] = \mathrm{M}_s.$$

Pour montrer que X est un $\mathbb{Q}$-mouvement brownien, nous allons commencer par montrer que pour f une fonction déterministe bornée de $[0,\mathrm{T}]$ vers $\mathbb{C}$,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(\int_0^{\mathrm{T}} f(s)\mathrm{dX}_s\right)\right] = \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{T}} f^2(s)\mathrm{d}s\right).$$

En effet, si on considère la fonction, pour $0 = t_o < t_1 < \cdots < t_n = \mathrm{T}$,

$$f(s) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{i}\theta_j \mathbb{1}_{t_{j-1}\leqslant s\leqslant t_j}$$

alors la formule nous donne que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n}\theta_j(\mathrm{X}_{t_j} - \mathrm{X}_{t_{j-1}})\right)\right] = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\theta_j^2(t_j - t_{j-1})\right)$$

et nous donne ainsi la fonction caractéristique du vecteur $(\mathrm{X}_{t_1}, \mathrm{X}_{t_2} - \mathrm{X}_{t_1}, \ldots \mathrm{X}_{t_n} - \mathrm{X}_{t_{n-1}})$ qui est donc un vecteur gaussien avec la même structure de covariance qu'un mouvement brownien standard. Comme la continuité presque sûre et $\mathrm{X}_0 = 0$ sont immédiats, on obtient que X est un $\mathbb{Q}$-mouvement brownien.

Pour prouver la formule, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(\int_0^{\mathrm{T}} f(s)\mathrm{dX}_s\right)\right] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(\int_0^{\mathrm{T}} f(s)\left(\mu_s\mathrm{d}s + \mathrm{dB}_s\right)\right)\exp\left(-\int_0^{\mathrm{T}}\mu_s\mathrm{dB}_s - \frac{1}{2}\int_0^t \mu_s^2\mathrm{d}s\right)\right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(\int_0^{\mathrm{T}}(f(s)-\mu_s)\mathrm{dB}_s - \frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{T}}(f(s)-\mu_s)^2\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{T}} f^2(s)\mathrm{d}s\right)\right] \\
&= \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{T}} f(s)^2\right)\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathrm{N}_{\mathrm{T}}\right] = \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{T}} f^2(s)\mathrm{d}s\right)
\end{aligned}$$

avec N la martingale exponentielle, similaire à M, mais avec $(f(s) - \mu_s)$ à la place de $-\mu_s$. □

Cette version du théorème de Girsanov nous permet de "tuer" la dérive du processus X_t. On peut faire la même chose, pour "échanger" des dérives.

Théorème 11.3

Soit X un processus d'Itô de la forme

$$dX_t = \mu_s ds + \sigma_s dB_s, \quad X_0 = x$$

alors si

$$\theta_t(\omega) = \frac{\mu_t(\omega) - \nu_t(\omega)}{\sigma_t(\omega)}$$

est bornée sur $[0, T]$ alors

$$M_t = \exp\left(-\int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right)$$

est une $\mathbb{P}$-martingale et si

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathbb{1}_A M_T\right]$$

alors

$$\tilde{B}_t = B_t + \int_0^t \theta_s ds$$

est un $\mathbb{Q}$-mouvement brownien et on a

$$dX_t = \nu_t dt + \sigma_t d\tilde{B}_t, \quad X_0 = x.$$

Démonstration. Par le théorème précédent, nous savons que M est une $\mathbb{P}$-martingale sur $[0, T]$ et de plus que $\tilde{B}$ est un $\mathbb{Q}$-mouvement brownien. Enfin, on remarque que

$$\nu_t dt + \sigma_t d\tilde{B}_t = \nu_t dt + \sigma_t dB_t + \sigma_t\theta_t dt = \nu_t dt + \sigma_t dB_t + (\mu_t - \nu_t)dt = X_t.$$

□

11.4 Conditions de Novikov et Kazamaki

La condition que θ_t soit bornée pour tout $t \in [0, T]$ est une hypothèse très forte sur le processus. Nous allons maintenant voir plusieurs conditions sur le processus d'Itô X qui nous donnera que M est bien une martingale et ainsi le théorème de Girsanov.

Théorème 11.4

Soient $\mu_s \in \mathcal{L}^2_{\text{Loc}}([0, T])$, $Z_t = \int_0^t \mu_s dB_s$, et

$$M_t = \exp\left(Z_t - \frac{1}{2}\langle Z\rangle_t\right)$$

alors si on définit les conditions :

- (i) (Condition de Novikov) $\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \mu_s^2 ds\right)\right] < \infty$,
- (ii) (Condition de Kazamaki) $(Z_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ est une martingale bornée dans L^2 et $\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}Z_T\right)\right] < \infty$,
- (iii) $(M_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ est une martingale uniformément intégrable,

alors $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$.

Démonstration. Supposons que la condition de Novikov soit satisfaite alors cela veut dire que $\langle Z\rangle_T$ a une transformée de Laplace en $\frac{1}{2}$ puisque

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \mu_s^2 ds\right)\right] = \mathbb{E}\left[e^{\frac{1}{2}\langle Z\rangle_T}\right].$$

Cela implique donc que $\langle Z\rangle_T$ est dans L^1 et ainsi

$$\mathbb{E}\left[\langle Z\rangle_T\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T \mu_s^2 ds\right] < \infty \Longleftrightarrow \mu_s \in \mathcal{H}^2([0,T]).$$

Ainsi, nous savons que $(Z_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ est une martingale bornée dans L^2. De plus,

$$\exp\left(\frac{1}{2}Z_T\right) = \exp\left(\frac{1}{2}Z_T - \frac{1}{4}\langle Z\rangle_T\right)\exp\left(\frac{1}{4}\langle Z\rangle_T\right) = \sqrt{M_T}\sqrt{\exp\left(\frac{1}{2}\langle Z\rangle_T\right)}$$

et par l'inégalité de Cauchy–Schwarz,

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}Z_T\right)\right] \leqslant \sqrt{\mathbb{E}\left[M_T\right]}\sqrt{\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\langle Z\rangle_T\right)\right]} \leqslant \sqrt{\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\langle Z\rangle_T\right)\right]} < \infty$$

où on a utilisé le fait que M était une martingale locale positive et donc une surmartingale et ainsi $\mathbb{E}\left[M_T\right] \leqslant \mathbb{E}\left[M_0\right] = 1$. Ainsi on obtient que la condition (ii) est vérifiée.

Montrons maintenant que $(ii) \Rightarrow (iii)$, par le théorème d'arrêt, nous savons que pour tout temps d'arrêt τ,

$$\mathbb{E}\left[Z_\tau\right] = \mathbb{E}\left[Z_T|\mathcal{F}_\tau\right]$$

et ainsi par l'inégalité de Jensen,

$$\exp\left(\frac{1}{2}Z_\tau\right) \leqslant \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}Z_T\right)\middle|\mathcal{F}_\tau\right].$$

Puisque $\exp\left(\frac{1}{2}Z_T\right) \in L^1$, par le Lemme 4.10 la famille

$$\left\{\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}Z_T\right)\middle|\mathcal{F}_\tau\right], \tau \text{ temps d'arrêt } \leqslant T\right\} \text{ est uniformément intégrable,}$$

et ainsi la famille

$$\left\{\exp\left(\frac{1}{2}Z_\tau\right), \tau \text{ temps d'arrêt } \leqslant T\right\} \text{ est uniformément intégrable.}$$

Soit $a \in (0,1)$ et

$$Y_t^{(a)} = \exp\left(\frac{a}{1+a}Z_t\right).$$

Nous avons

$$e^{aZ_t - \frac{a^2}{2}\langle Z\rangle_t} = \left(\exp\left(Z_t - \frac{1}{2}\langle Z\rangle_t\right)\right)^{a^2}\exp\left((a-a^2)Z_t\right) = M_t^{a^2}\exp\left(\frac{a(1+a)(1-a)}{1+a}Z_t\right) = M_t^{a^2}\left(Y_t^{(a)}\right)^{1-a^2}.$$

Soit $A \in \mathcal{F}_T$ et $\tau \leqslant T$ un temps d'arrêt alors

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A\exp\left(aZ_\tau - \frac{a^2}{2}\langle Z\rangle_\tau\right)\right] \leqslant \mathbb{E}\left[M_\tau\right]^{a^2}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A Y_\tau^{(a)}\right]^{1-a^2} \leqslant \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A Y_\tau^{(a)}\right]^{1-a^2} \leqslant \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A\left(Y_\tau^{(a)}\right)^{\frac{1+a}{2a}}\right]^{\frac{2a}{1+a}(1-a^2)}$$

où on a utilisé le fait que $\mathbb{E}\left[M_\tau\right] \leqslant 1$. Puisque par définition nous avons

$$\left(Y_\tau^{(a)}\right)^{\frac{1+a}{2a}} = \exp\left(\frac{1}{2}Z_\tau\right),$$

on obtient que pour tout temps d'arrêt $\tau \leqslant T$,

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A\exp\left(aZ_\tau - \frac{a^2}{2}\langle Z\rangle_\tau\right)\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A\exp\left(\frac{1}{2}Z_\tau\right)\right]^{2a(1-a)}$$

et comme la famille $\exp\left(\frac{1}{2}Z_\tau\right)$ pour tout temps d'arrêt $\tau \leqslant T$ est uniformément intégrable, on obtient que

$$\left\{\exp\left(aZ_\tau - \frac{a^2}{2}\langle Z\rangle_\tau,\ \tau \text{ temps d'arrêt } \leqslant T\right)\right\} \text{ est uniformément intégrable.}$$

Pour voir cela, on utilise le critère suivant : $\mathcal{H}$ est uniformément intégrable si et seulement si

$$\sup_{X\in\mathcal{H}} \mathbb{E}\left[|X|\right] < \infty \quad \text{et} \quad \forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta_\varepsilon > 0, \forall X \in \mathcal{H}, \forall A \in \mathcal{F} \text{ avec } \mathbb{P}(A) \leqslant \delta_\varepsilon,\ \mathbb{E}\left[|X|\mathbb{1}_A\right] \leqslant \varepsilon.$$

Les deux conditions sont immédiates car l'on sait que $\exp\left(\frac{1}{2}Z_\tau\right)$ est une famille uniformément intégrable.

Nous allons maintenant montrer que $\left(\exp\left(aZ_t - \frac{a^2}{2}\langle Z\rangle_t\right)\right)_{0\leqslant t\leqslant T}$ est une martingale uniformément intégrable. On sait que c'est une martingale locale, soit $(\tau_n)_n$ une suite localisante alors pour tout $s \leqslant t$ et $A \in \mathcal{F}_s$,

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A \exp\left(aZ_{t\wedge\tau_n} - \frac{a^2}{2}\langle Z\rangle_{t\wedge\tau_n}\right)\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A \exp\left(aZ_{s\wedge\tau_n} - \frac{a^2}{2}\langle Z\rangle_{s\wedge\tau_n}\right)\right].$$

Or, on sait que

$$\exp\left(aZ_{t\wedge\tau_n} - \frac{a^2}{2}\langle Z\rangle_{t\wedge\tau_n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} \exp\left(aZ_t - \frac{a^2}{2}\langle Z\rangle_t\right)$$

et comme la famille est uniformément intégrable, on sait que cette convergence presque sûre implique la convergence des espérances et nous avons donc

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A \exp\left(aZ_t - \frac{a^2}{2}\langle Z\rangle_t\right)\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A \exp\left(aZ_s - \frac{a^2}{2}\langle Z\rangle_s\right)\right]$$

et on a donc une martingale uniformément intégrable. On utilise les inégalités que l'on avait précédemment,

$$1 = \mathbb{E}\left[\exp\left(aZ_T - \frac{a^2}{2}\langle Z\rangle_T\right)\right] \leqslant \mathbb{E}\left[M_T\right]^{a^2} \mathbb{E}\left[Y_t^{(a)}\right]^{1-a^2} \leqslant \mathbb{E}\left[M_T\right]^{a^2} \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}Z_T\right)\right]^{a(1-a)}$$

et en faisant tendre $a \to 1$, on obtient que

$$\mathbb{E}\left[M_T\right] \geqslant 1$$

et ainsi M est une surmartingale avec $\mathbb{E}\left[M_T\right] = 1 = \mathbb{E}\left[M_0\right]$, c'est donc une martingale. □

Les conditions de Novikov et Kazamaki sont trš utiles pour utiliser le théorème de Girsanov. La condition de Novikov implique aussi une autre condition qui peut être trš utile.

COROLLAIRE 11.5. Si il existe $\lambda > 0$ et $C < \infty$ tel que

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda|\mu_t|^2\right)\right] < C$$

pour tout $t \in [0, T]$ alors $\left(\exp\left(\int_0^t \mu_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \mu_s^2 ds\right)\right)_{0\leqslant t\leqslant T}$ est une martingale.

Démonstration. On commence par écrire en utilisant l'inégalité de Jensen

$$\exp\left(\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \mu_s^2 ds\right) = \exp\left(\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} \frac{t_2-t_1}{2}\mu_s^2 ds\right) \leqslant \frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} \exp\left(\frac{t_2-t_1}{2}\mu_s^2\right) ds.$$

On choisit alors t_1, t_2 tels que $t_2 - t_1 \leqslant 2\lambda$, et ainsi

$$\exp\left(\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \mu_s^2 ds\right) \leqslant \frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} \mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda\mu_s^2\right)\right] ds \leqslant C < \infty.$$

On choisit maintenant $0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_{n+1} = T$ avec $t_{i+1} - t_i < 2\lambda$. Alors si $\mu_s^{(i)}(\omega) = \mu_s(\omega)\mathbb{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(s)$

alors la condition de Novikov est satisfaite pour $\mu^{(i)}$:

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{T}}(\mu_s^{(i)})^2\mathrm{d}s\right)\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\mu_s^2\mathrm{d}s\right)\right] \leqslant \mathrm{C}.$$

Donc on sait que

$$\mathrm{M}_t^{(i)} = \exp\left(\int_0^t \mu_s^{(i)}\mathrm{dB}_s - \frac{1}{2}\int_0^t(\mu_s^{(i)})^2\mathrm{d}s\right)$$

est une martingale. On peut écrire

$$\mathrm{M_T} = \exp\left(\int_0^{\mathrm{T}}\mu_s\mathrm{dB}_s - \frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{T}}\mu_s^2\mathrm{d}s\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\int_0^{\mathrm{T}}\mu_s^{(i)}\mathrm{dB}_s - \frac{1}{2}\int -0^{\mathrm{T}}(\mu_s^{(i)})^2\mathrm{d}s\right)\right) = \prod_{i=1}^{n}\mathrm{M}_{\mathrm{T}}^{(i)}.$$

On finit par calculer

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{M_T}\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n}\mathrm{M}_{\mathrm{T}}^{(i)}\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n-1}\mathrm{M}_{\mathrm{T}}^{(i)}\mathbb{E}\left[\mathrm{M}_{\mathrm{T}}^{(n)}\middle|\mathcal{F}_{t_n}\right]\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n-1}\mathrm{M}_{\mathrm{T}}^{(i)}\mathrm{M}_{t_n}^{(t_n)}\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n-1}\mathrm{M}_{\mathrm{T}}^{(i)}\right] = \cdots = 1$$

où on a utilisé le fait que $\mathrm{M}_{\mathrm{T}}^{(1)}, \dots, \mathrm{M}_{\mathrm{T}}^{(n-1)}$ sont mesurables par rapport à $\mathcal{F}^{t_n}$ et que $\mathrm{M}_{t_i}^{(t_i)} = 1$ par définition. Ainsi M est une martingale. □

Donnons un exemple où on peut appliquer ce corollaire facilement plutôt que la condition de Novikov ou Kazamaki. Si B est un mouvement brownien standard, considérons la martingale exponentielle

$$\mathrm{M}_t = \exp\left(\theta\int_0^t \mathrm{B}_s\mathrm{dB}_s - \frac{\theta^2}{2}\int_0^t \mathrm{B}_s^2\mathrm{d}s\right)$$

qui correspond à notre situation avec $\mu_s(\omega) = \theta\mathrm{B}_s(\omega)$. Pour vérifier la condition de Novikov, on devrait vérifier

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{\theta^2}{2}\int_0^{\mathrm{T}}\mathrm{B}_s^2\mathrm{d}s\right)\right] < \infty$$

ce qui n'est pas facile à vérifier. Avec le corollaire, on a juste besoin de l'existence d'un $\lambda > 0$, tel que

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda\theta^2\mathrm{B}_t^2\right)\right] < \infty$$

pour tout $t \in [0, \mathrm{T}]$. Mais on sait calculer

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda\theta^2\mathrm{B}_t^2\right)\right] = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1-2\lambda\theta^2 t}} & \text{si } 2\lambda\theta^2 t < 1, \\ +\infty & \text{sinon.}\end{cases}$$

Ainsi, si on choisit λ tel que $2\lambda\theta^2\mathrm{T} < 1$ alors pour tout $t \in [0, \mathrm{T}]$, nous avons

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda\theta^2\mathrm{B}_t^2\right)\right] \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-2\lambda\theta^2\mathrm{T}}}$$

et la condition est vérifiée et M est une martingale sur $[0, \mathrm{T}]$. On peut donc définir une nouvelle probabilité par

$$\mathbb{Q}(\mathrm{A}) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{1}_{\mathrm{A}}\mathrm{M_T}]$$

et sur cette probabilité, on obtient que $\mathrm{X}_t = \mathrm{B}_t - \int_0^t \theta\mathrm{B}_s\mathrm{d}s$ est un $\mathbb{Q}$-mouvement brownien. On peut se demander ce qu'est B sous $\mathbb{Q}$. On remarque que par ce qu'on vient de voir alors on a

$$\mathrm{dB}_t = \theta\mathrm{B}_t\mathrm{d}t + \mathrm{dX}_t$$

et puisque X est un $\mathbb{Q}$-mouvement brownien, on voit que B est un $\mathbb{Q}$-processus d'Ornstein–Uhlenbek.

On a vu que la condition de Novikov impliquait la condition de Kazamaki mais on peut se demander si l'implication inverse est vraie. En fait non, on peut construire un exemple qui suit la condition de Kazamaki mais pas celle de Novikov. Soit B un mouvement brownien standard et $T_1 = \inf\{t \in [0,T], B_t = 1\}$ et

$$\tau_t = \begin{cases} \frac{t}{1-t} \wedge T_1 & \text{si } t < 1, \\ T_1 & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$$

et on considère le processus $X_t = B_{\tau_t}$. La condition de Novikov serait que

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\langle X\rangle_T\right)\right] < \infty$$

et on remarque que si la condition était satisfaite alors

$$\exp\left(X_t - \frac{1}{2}\langle X\rangle_t\right) \text{ et } \exp\left(-X_t - \frac{1}{2}\langle X\rangle_t\right)$$

serait des martingales puisque la condition de Novikov est la même pour X ou $-X$. Ainsi on aurait,

$$1 = \mathbb{E}\left[\exp\left(-X_1 - \frac{1}{2}\langle X\rangle_1\right)\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left(-B_{\tau_1} - \frac{1}{2}\langle B_{\tau_t}\rangle_1\right)\right] = \frac{1}{e}\mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{\tau_1}{2}\right)\right] = \frac{1}{e}\mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{T_1}{2}\right)\right] = \frac{1}{e^2}$$

ce qui est absurde ! En revanche, on peut vérifier la condition de Kazamaki en admettant que X est une martingale bornée dans L^2 car pour $T > 1$,

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}X_T\right)\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}B_{T_1}\right)\right] = \sqrt{e} < \infty.$$

12. Application à la finance

Dans cette section nous allons appliquer les résultats de nos sections précédentes aux mathématiques financières et en particulier au prix de produits dérivés. Dans tout cette section, nous aurons deux quantités importantes

$$S_t : \text{cours d'une action au temps } t$$
$$\beta_t : \text{cours d'une obligation au temps } t$$

Nous avons alors un porte-feuille qui consiste en une certaine quantité d'action et d'obligation qui peuvent varier au cours du temps et nous noterons cela

$$V_t = a_t S_t + b_t \beta_t.$$

Enfin, nous supposerons qu'il n'y a pas de rentrée d'argent autre que les fluctuations du prix de S_t et de β_t, on dit que le porte-feuille est *auto-financé*, cela se traduit par

$$dV_t = a_t dS_t + b_t d\beta_t.$$

12.1 La formule de Black–Scholes

Pour notre premier modèle, nous choisissons

$$\begin{cases} dS_t &= \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t, \\ d\beta_t &= r\beta_t dt. \end{cases}$$

avec μ notre dérive ou tendance, σ notre volatilité, r notre taux d'intérêt constant. Le but est de calculer le prix d'une option d'achat européenne, c'est-à-dire le droit (mais non l'obligation) d'acheter une action au prix K au temps T. Ainsi, le gain d'une telle option est donné par

$$\mathrm{OE_A}(\mathrm{S_T}) = \begin{cases} \mathrm{S_T} - \mathrm{K} & \text{si } \mathrm{S_T} \geqslant \mathrm{K}, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} =: (\mathrm{S_T} - \mathrm{K})_+.$$

De manière similaire, on définit le gain d'une option européenne de vente par

$$\mathrm{OE_V}(\mathrm{S_T}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathrm{S_T} \geqslant \mathrm{K}, \\ \mathrm{K} - \mathrm{S_T} & \text{sinon} \end{cases} =: (\mathrm{S_T} - \mathrm{K})_-.$$

Le but est de répliquer le gain de $\mathrm{OE_A}$ par notre porte-feuille au temps T. Cherchons un porte-feuille de la forme $\mathrm{V}_t = f(t, \mathrm{S}_t)$. Par la formule d'Itô, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{dV}_t &= \partial_t f(t,\mathrm{S}_t)\mathrm{d}t + \partial_x f(t,\mathrm{S}_t)\mathrm{dS}_t + \frac{1}{2}\partial^2_{xx} f(t,\mathrm{S}_t)\mathrm{d}\langle \mathrm{S}\rangle_t \\ &= \partial_t f(t,\mathrm{S}_t)\mathrm{d}t + \partial_x f(t,\mathrm{S}_t)\left(\mu \mathrm{S}_t \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{S}_t \mathrm{dB}_t\right) + \frac{1}{2}\partial^2_{xx} f(t,\mathrm{S}_t)\sigma^2\mathrm{S}_t^2\mathrm{d}t \\ &= \left(\partial_t f(t,\mathrm{S}_t) + \partial_x f(t,\mathrm{S}_t)\mu\mathrm{S}_t + \frac{1}{2}\partial^2_{xx} f(t,\mathrm{S}_t)\sigma^2\mathrm{S}_t^2\right)\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{S}_t\partial_x f(t,\mathrm{S}_t)\mathrm{dB}_t. \end{aligned}$$

On utilise maintenant le fait que le porte-feuille est auto-financé pour calculer

$$\mathrm{dV}_t = a_t\mathrm{dS}_t + b_t\mathrm{d}\beta_t = \left(\mu a_t\mathrm{S}_t + r b_t\beta_t\right)\mathrm{d}t + \sigma a_t\mathrm{S}_t\mathrm{dB}_t.$$

On identifie les coefficients et on obtient

$$\begin{cases} a_t = \partial_x f(t,\mathrm{S}_t), \\ b_t = \dfrac{1}{r\beta_t}\left(\partial_t f(t,\mathrm{S}_t) + \dfrac{\sigma^2}{2}\mathrm{S}_t^2\partial^2_{xx} f(t,\mathrm{S}_t)\right). \end{cases}$$

Ainsi on obtient l'équation aux dérivées partielles

$$f(t,\mathrm{S}_t) = \mathrm{V}_t = a_t\mathrm{S}_t + b_t\beta_t = \partial_x f(t,\mathrm{S}_t)\mathrm{S}_t + \frac{1}{r}\left(\partial_t f(t,\mathrm{S}_t) + \frac{\sigma^2}{2}\mathrm{S}_t^2\partial^2_{xx} f(t,\mathrm{S}_t)\right).$$

Si on pose $\mathrm{S}_t =: x$, on obtient l'équation de Black–Scholes

$$\partial_t f(t,x) = -\frac{\sigma^2}{2}x^2\partial^2_{xx} f(t,x) - rx\partial_x f(t,x) + rf(t,x).$$

avec la condition

$$f(\mathrm{T},\mathrm{S_T}) = (\mathrm{S_T} - \mathrm{K})_+.$$

Cette équation a une solution explicite,

$$f(t,x) = x\Phi\left(\frac{\log\left(\frac{x}{\mathrm{K}}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(\mathrm{T}-t)}{\sigma\sqrt{\mathrm{T}-t}}\right) - \mathrm{K}e^{-r(\mathrm{T}-t)}\Phi\left(\frac{\log\left(\frac{x}{\mathrm{K}}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(\mathrm{T}-t)}{\sigma\sqrt{\mathrm{T}-t}}\right)$$

avec

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}t.$$

La première remarque importante est que cela de dépend pas de μ, la tendance du cours de l'action, mais seulement de sa volatilité. On peut aussi regarder séparément la quantité d'action et d'obligation, on voit tout d'abord que

$$a_t = \partial_x f(t, S_t) = \Phi\left(\frac{\log\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)$$

et on remarque que $a_t > 0$, ainsi le porte-feuille possède toujours de l'action et $a_t < 1$. le porte-feuille ne possède jamais plus d'une unité d'action. Pour l'obligation, on a

$$b_t\beta_t = -Ke^{-r(T-t)}\Phi\left(\frac{\log\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)$$

et on remarque que $b_t\beta_t < 0$, le porte-feuille emprunte des obligations et $|b_t\beta_t| < K$, on n'emprunte jamais plus que le prix du paiement.

Ainsi, à $t = 0$, on obtient le prix théorique d'une option d'achat européenne,

$$S_0\Phi\left(\frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - Ke^{-rT}\Phi\left(\frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

12.2 Probabilité risque-neutre

Nous allons considérer maintenant un modèle plus général de la forme

$$\begin{cases} dS_t &= \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dB_t, \\ d\beta_t &= r_t \beta_t dt. \end{cases}$$

avec μ_t et σ_t possiblement aléatoire et r_t déterministe qui représente le taux d'intérêt sans risque. Nous allons construire une mesure appelé la *probabilité risque-neutre* telle que le prix actualisé du cours de l'action est une martingale locale, et possiblement une martingale selon certaines hypothèses. L'idée est que sous cette probabilité, aucune prime n'est attribuée à la prise de risque puisque l'on a une martingale.

Définition 12.1

Une mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ est appelée une *probabilité risque-neutre* si

- $\mathbb{Q}$ est équivalente à $\mathbb{P}$: $\mathbb{Q}(A) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(A) = 0$.
- $\frac{S}{\beta}$ est une $\mathbb{Q}$-martingale sur $[0, T]$.

Le prix actualisé est donné par

$$D_t = \frac{S_t}{\beta_t}.$$

Par la formule d'Itô, on a

$$dD_t = (\mu_t - r_t)\, D_t dt + \sigma_t D_t dB_t.$$

Ainsi, par la théorie de Girsanov, nous savons que si on pose

$$m_t = \frac{\mu_t - r_t}{\sigma_t} \quad \text{et} \quad M_t = \exp\left(-\int_0^t m_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t m_s^2 ds\right)$$

alors en définissant

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{1}_A M_T],$$

si m_t suis la condition de Novikov par exemple,

$$d\tilde{B}_t = dB_t + m_t dt$$

est un $\mathbb{Q}$-mouvement brownien et on a

$$\mathrm{dD}_t = (\mu_t - r_t)\mathrm{D}_t \mathrm{d}t + \sigma_t \mathrm{D}_t \left(\mathrm{d}\tilde{\mathrm{B}}_t - m_t \mathrm{d}t\right) = \sigma_t \mathrm{D}_t \mathrm{d}\tilde{\mathrm{B}}_t$$

et D est une $\mathbb{Q}$-martingale locale et possiblement une martingale sous des conditions sur σ_t.

m_t mesure l'excés du taux de rendement du titre à risque S_t par rapport au taux de rendement du titre sans risque β_t. On l'appelle *prime de risque du marché*. En mettant ce raisonnement sous une proposition, on obtient le résultat suivant.

Proposition 12.2. Si la prime de risque du marché $m_t = \frac{\mu_t - r_t}{\sigma_t}$ satisfait

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{T}} m_t^2 \mathrm{d}t\right)\right] < \infty$$

alors il existe une mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ équivalent à $\mathbb{P}$ telle que $\frac{\mathrm{S}}{\beta}$ soit une $\mathbb{Q}$-martingale locale. De plus, si la volatilité satisfait

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{T}} \sigma_t^2 \mathrm{d}t\right)\right] < \infty$$

alors le prix actualisé est une $\mathbb{Q}$-martingale. Enfin, si on écrit

$$\frac{\mathrm{S}_t}{\beta_t} = \frac{\mathrm{S}_0}{\beta_0} + \int_0^t d_s \mathrm{d}\tilde{\mathrm{B}}_s$$

avec $d \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{Loc}}$ et si d ne s'annule pas sauf sur un ensemble de $\mathrm{d}\mathbb{Q} \times \mathrm{d}t$ mesure zéro alors $\mathbb{Q}$ est unique.

Pour trouver le prix d'une option européenne d'achat par exemple, on voudrait que le prix soit aussi risque-neutre, et ainsi que le prix actualisé de notre porte-feuille soit une $\mathbb{Q}$-martingale. Si l'option paye X au temps T, le prix actualisé au temps T vaut donc $\frac{\mathrm{X}}{\beta_{\mathrm{T}}}$ et ainsi on obtient

$$\frac{\mathrm{V}_t}{\beta_t} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\mathrm{V}_{\mathrm{T}}}{\beta_{\mathrm{T}}}\middle|\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\mathrm{X}}{\beta_{\mathrm{T}}}\middle|\mathcal{F}_t\right] \Longleftrightarrow \mathrm{V}_t = \beta_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\mathrm{X}}{\beta_{\mathrm{T}}}\middle|\mathcal{F}_t\right].$$

Par exemple pour modéliser OE_{A}, on obtient un prix théorique donné par

$$\mathrm{V}_0 = \frac{\beta_0}{\beta_{\mathrm{T}}}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[(\mathrm{S}_{\mathrm{T}} - \mathrm{K})_+\right].$$

Avec peu de conditions, nous pouvons déjà voir que la valeur actualisée du porte-feuille est toujours une martingale locale pour notre mesure risque-neutre.

Proposition 12.3. Si il existe une unique probabilité $\mathbb{Q}$ équivalente à $\mathbb{P}$ telle que $\frac{\mathrm{S}}{\beta}$ soit une $\mathbb{Q}$-martingale dans L^2 et si le porte-feuille $\mathrm{V}_t = a_t \mathrm{S}_t + b_t \beta_t$ est auto-financé alors $\frac{\mathrm{V}}{\beta}$ est une $\mathbb{Q}$-martingale locale.

Démonstration. Par la formule d'Itô, nous avons

$$\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{V}_t}{\beta_t}\right) = \frac{1}{\beta_t}\mathrm{dV}_t - \mathrm{V}_t \frac{r_t}{\beta_t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\beta_t}\left(a_t \mathrm{dS}_t + b_t \mathrm{d}\beta_t\right) - \frac{r_t}{\beta_t}\left(a_t \mathrm{S}_t + b_t \beta_t\right)\mathrm{d}t = a_t\left(\frac{\mathrm{dS}_t}{\beta_t} - \frac{\mathrm{S}_t r_t}{\beta_t}\mathrm{d}t\right) = a_t \mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{S}_t}{\beta_t}\right)$$

Comme $\frac{\mathrm{S}}{\beta}$ est une $\mathbb{Q}$-martingale dans L^2, on sait qu'il existe un $\mathbb{Q}$-mouvement brownien $\tilde{\mathrm{B}}$ et $\alpha_t \in \mathcal{H}^2([0, \mathrm{T}])$ tel que

$$\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{S}_t}{\beta_t}\right) = \alpha_t \mathrm{d}\tilde{\mathrm{B}}_t$$

et ainsi

$$d\left(\frac{V_t}{\beta_t}\right) = a_t \alpha_t d\tilde{B}_t$$

et $\frac{V}{\beta}$ est une $\mathbb{Q}$-martingale locale. □

12.3 Stratégie d'arbitrage sans risque et de suicide

Pour l'instant, nous n'avons donné que peu de conditions sur nos coefficients a_t et b_t. Par exemple, dans la formule de Black–Sholes, nous avons vu que $b_t < 0$, nous empruntions de l'obligation (mais heureusement $|b_t| < K$ et nous en n'empruntions pas trop). Considérons le modèle simplifié

$$\begin{cases} dS_t = \mu S_t dt + \sigma_t S_t dB_t, & S_0 = 1, \\ d\beta_t = 0, & \beta_0 = 1. \end{cases}$$

La propriété d'auto-financement de notre porte-feuille se traduit par

$$dV_t = a_t dS_t + b_t d\beta_t = a_t dS_t \Leftrightarrow V_t = V_0 + \int_0^t a_s dS_s$$

et de plus nous avons

$$V_t = a_t S_t + b_t \beta_t = a_t S_t + b_t$$

et donc

$$b_t = V_0 + \int_0^t a_s dS_s - a_t S_t.$$

Simplifions encore notre modèle en prenant $\mu = 0$, alors $dS_t = \sigma S_t dB_t$. Si on choisit

$$a_t = \frac{1}{\sigma S_t (T-t)} \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t < T$$

alors notre potre-feuille devient

$$dV_t = \frac{1}{T-t} dB_t \Leftrightarrow V_t = V_0 + \int_0^t \frac{dB_s}{T-s}.$$

Si on réalise le changement de temps $\tau_t = \int_0^t \frac{ds}{(T-s)^2} = \frac{1}{T-t} - \frac{1}{T}$ alors il existe un $\mathbb{P}$-mouvement brownien $\tilde{B}$ tel que

$$V_t = V_0 + \tilde{B}_{\tau_t}.$$

En prenant par exemple $V_0 = 1$, puisque que l'on a $\tau_t \xrightarrow[t \to T]{} \infty$, en définissant $\tau_M = \inf\{t \geqslant 0, V_t = M\}$, on sait que $\mathbb{P}(\tau_M < T) = 1$ et nous pouvons donc gagner autant d'argent que nous voulons en temps fini ! Le problème ici est bien sur que b_t par sa définition plus haut doit pouvoir être aussi négatif que possible et nous devons donc avoir la possibilié d'emprunter autant d'argent que possible, ce qui est bien sur impossible. Pour éviter ce problème, nous allons maintenant considérer des porte-feuilles positifs.

Définition 12.4

On définit l'ensemble AF^+ les paires auto-financées (a_t, b_t) tel que $V_t \geqslant 0$ pour tout $t \in [0, T]$.

Nous allons voir que les potre-feuille dans AF^+ nous empêchent d'avoir des stratégies qui nous garantissent de gagner de l'argent.

Définition 12.5

Une stratégie (a_t, b_t) est appelée un *arbitrage d'obligation sans risque* sur $[0, T]$ si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mathbb{P}\left(\frac{V_0}{\beta_0} \leqslant \lambda\right) = 1, \quad \mathbb{P}\left(\frac{V_T}{\beta_T} \geqslant \lambda\right) = 1, \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(\frac{V_T}{\beta_T} > \lambda\right) > 0,$$

PROPOSITION 12.6. Si $(a_t, b_t) \in \mathrm{AF}^+$ alors (a_t, b_t) n'est pas un arbitrage d'obligation sans risque

Démonstration. Comme $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ sont des mesures équivalentes,

$$\mathbb{Q}\left(\frac{V_0}{\beta_0} \leqslant \lambda\right) = 1, \quad \mathbb{Q}\left(\frac{V_T}{\beta_T} \geqslant \lambda\right) = 1, \quad \text{et} \quad \mathbb{Q}\left(\frac{V_T}{\beta_T} > \lambda\right) > 0,$$

Ainsi on a

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{V_0}{\beta_0}\right] \leqslant \lambda \quad \text{et} \quad \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{V_T}{\beta_T}\right] > \lambda$$

or $\frac{V}{\beta}$ est une $\mathbb{Q}$-martingale locale positive et est donc une $\mathbb{Q}$-surmartingale ce qui nous donne

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{V_T}{\beta_T}\right] \leqslant \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{V_0}{\beta_0}\right]$$

ce qui est absurde. □

Il y a encore un autre problème pour nos stratégies et la classe AF^+ est en fait toujours trop grande. En effet, si on suppose que l'on a un produit dérivé X et que l'on a construit un porte-feuille $V_t = a_t S_t + b_t \beta_t$ tel que $V_T = X$ alors le prix de ce produit devrait être donné par V_0. Mais si on construit un autre porte-feuille V' tel que $V'_T = 0$ alors nous avons toujours $(V + V')_T = X$ mais en revanche nous avons au départ $V_0 + V'_0 > V_0$. Ceci s'appelle une *stratégie de suicide* et pose problème pour donner un prix de produit dérivé.

En fait, si V est une stratégie de suicide alors nous avons

$$\mathbb{P}\left(\frac{V_0}{\beta_0} > 0\right) = 1, \quad \mathbb{P}\left(\frac{V_T}{\beta_T} = 0\right) = 1$$

et comme les mesures P et $\mathbb{Q}$ sont équivalentes, cela donne

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{V_0}{\beta_0}\right] > 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{V_T}{\beta_T}\right] = 0.$$

Ceci est impossible si on rajoute l'hypothèse que $\frac{V}{\beta}$ n'est pas juste une $\mathbb{Q}$-martingale locale mais une $\mathbb{Q}$-martingale.

12.4 Produits dérivés, stratégies admissibles et modèle complet

On continue avec notre modèle général avec $r_t, \sigma_t > 0$,

$$\begin{cases} dS_t &= \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dB_t, \\ d\beta_t &= r_t \beta_t dt. \end{cases}$$

On commence par définir les variables aléatoires que l'on veut répliquer et ainsi donner le prix. Par exemple, pour une option de vente européenne, notre produit était $(S_T - K)_-$. Nous appelerons ces variables aéatoires des produits dérivés.

DÉFINITION 12.7

Si il existe une unique probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$ alors une variable aléatoire $X \in \mathcal{F}_T$ telle que $X \geqslant 0$ est un *produit dérivé* si $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X^2] < \infty$

Nous allons maintenant définir notre classe de stratégies qui nous permettra de répliquer ces produits dérivés. Cette classe nous permettra d'éviter des srtatégies d'arbitrage sans risque et aussi des stratégies de suicide.

Définition 12.8

Soit $\mathbb{Q}$ l'unique mesure risque-neutre. $(a_t, b_t) \in \mathrm{AF}^+$ est appelée une *stratégie admissible* si $\frac{\mathrm{V}}{\beta}$ est une $\mathbb{Q}$-martingale.

On dénote $\mathcal{A}$ la classe de toutes les stratégies admissibles. Si $(a_t, b_t) \in \mathcal{A}$, X est un produit dérivé et $a_{\mathrm{T}}\mathrm{S}_{\mathrm{T}} + b_{\mathrm{T}}\beta_{\mathrm{T}} = \mathrm{X}$, on dit que (a_t, b_t) *réplique* X.

Enfin, nous définissons le cadre où nous voudrions travailler, c'est-à-dire un modèle où tous les produits dérivés peuvent être répliqués.

Définition 12.9

Le modèle $\{(\mathrm{S}_t, \beta_t),\ t \in [0, \mathrm{T}]\}$ est dit *complet* si

- Il existe une unique probabilité risque-neutre.
- Tout produit dérivé peut être répliqué par une stratégie admissible.

Tout d'abord, nous allons voir que l'on a rien perdu en ne gardant que les stratégies admissibles comparées à toutes les stratégies dans AF^+. Une stratégie admissible donnera toujours un meilleur prix qu'une stratégie dans AF^+.

Proposition 12.10. Pour toutes stratégies $(a_t, b_t) \in \mathrm{AF}^+$ et $(a'_t, b'_t) \in \mathcal{A}$ et X un produit dérivé alors si

$$a'_{\mathrm{T}}\mathrm{S}_{\mathrm{T}} + b'_{\mathrm{T}}\beta_{\mathrm{T}} = a_{\mathrm{T}}\mathrm{S}_{\mathrm{T}} + b_{\mathrm{T}}\beta_{\mathrm{T}} = \mathrm{X}$$

on a

$$a'_0\mathrm{S}_0 + b'_0\beta_0 \leqslant a_0\mathrm{S}_0 + b_0\beta_0.$$

Démonstration. On sait que $\mathrm{V}_t = a_{\mathrm{T}}\mathrm{S}_t + b_t\beta_t \geqslant 0$ pour tout $t \in [0, \mathrm{T}]$ donc $\frac{\mathrm{V}}{\beta}$ est une $\mathbb{Q}$-surmartingale et ainsi

$$a_0\mathrm{S}_0 + b_0\beta_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\mathrm{V}_0}{\beta_0}\right] \geqslant \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\mathrm{V}_{\mathrm{T}}}{\beta_{\mathrm{T}}}\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\mathrm{X}}{\beta_{\mathrm{T}}}\right]$$

Mais si $\mathrm{V}'_t = a'_t\mathrm{S}_t + b'_t\beta_t$ alors $\frac{\mathrm{V}'}{\beta}$ est une $\mathbb{Q}$-martingale par définition et ainsi

$$a'_0\mathrm{S}_0 + b'_0\beta_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\mathrm{V}'_0}{\beta_0}\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\mathrm{V}'_{\mathrm{T}}}{\beta_{\mathrm{T}}}\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\mathrm{X}}{\beta_{\mathrm{T}}}\right]$$

□

Aussi, les stratégies admissibles ont une bonne propriété d'unicité des stratégies de réplication.

Proposition 12.11. Si (a_t, b_t) et (a'_t, b'_t) sont deux stratégies admissibles quie répliquent le même produit dérivé X et si

$$\mathbb{P}\left(\sigma_t > 0 \text{ pour tout } t \in [0, \mathrm{T}]\right) = 1$$

alors

$$\mathbb{P}\left(a_t = a'_t, b_t = b'_t\right) = 1 \text{ pour presque tout } t \in [0, \mathrm{T}].$$

Démonstration. Nous savons que $\frac{\mathrm{V}}{\beta}$ et $\frac{\mathrm{V}'}{\beta}$ sont des $\mathbb{Q}$-martingales sur $[0, \mathrm{T}]$. Ainsi

$$\frac{\mathrm{V}_t}{\beta_t} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\mathrm{V}_{\mathrm{T}}}{\beta_{\mathrm{T}}}\middle|\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\mathrm{X}}{\beta_{\mathrm{T}}}\middle|\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\mathrm{V}'_{\mathrm{T}}}{\beta_{\mathrm{T}}}\middle|\mathcal{F}_t\right] = \frac{\mathrm{V}'_t}{\beta_t}$$

et nous avons donc, puisque $\beta_t > 0$,

$$\mathrm{V}_t = \mathrm{V}'_t \text{ pour tout } t \in [0, \mathrm{T}].$$

Comme les porte-feuilles sont auto-financés, nous avons

$$a_t \mathrm{d}S_t + b_t \mathrm{d}\beta_t = a'_t \mathrm{d}S_t + b'_t \mathrm{d}\beta_t$$

On a

$$0 = \mathrm{d}(V_t - V'_t)^2 = 2(V_t - V'_t)\mathrm{d}(V_t - V'_t) + \mathrm{d}\langle V - V' \rangle_t = (a_t - a'_t)^2 \sigma_t^2 S_t^2 \mathrm{d}t$$

Comme $\sigma_t^2 S_t^2 > 0$ par hypothése, nous avons que pour presque tout $t \in [0, T]$,

$$\mathbb{P}\left(a_t = a'_t\right) = 1$$

qui en retour nous donne que pour presque tout $t \in [0, T]$, puisque $\beta_t > 0$,

$$\mathbb{P}\left(b_t = b'_t\right) = 1$$

□

Enfin, nous sommes maintenant parés à prouver un théorème qui nous donnera des conditions suffisantes pour avoir un système complet.

THÉORÈME 12.12

Si nous avons les conditions

- $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T m_t^2 \mathrm{d}t\right)\right] < \infty$ avec m la prime au risque du marché,
- $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\exp\left(\int_0^T \sigma_t^2 \mathrm{d}t\right)\right)\right] < \infty$,
- $\sigma\left\{\frac{S_t}{\beta_t}, t \in [0, T]\right\} = \mathcal{F}_T$,
- $\mathbb{P}\left(\int_0^T \frac{\mu_t^2}{\sigma_t^2} \mathrm{d}t < \infty\right) = 1$,

alors le système $\{(S_t, \beta_t), t \in [0, T]\}$ est complet.

Démonstration. Les trois premières conditions nous donne l'existence et l'unicité de la mesure de probabilité risque-neutre. Soit X un produit dérivé, si on définit

$$V_t = \beta_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{X}{\beta_T}\middle| \mathcal{F}_t\right] \quad \text{pour tout } t \in [0, T]$$

alors on a clairement que

$$V_T = \beta_T \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{X}{\beta_T}\middle| \mathcal{F}_T\right] = X$$

et $\frac{V}{\beta}$ est une Q-martingale par définition de l'espérance conditionnelle. Ainsi, on a un porte-feuille qui réplique notre produit dérivé. De plus, comme $X \geqslant 0$ on a que $V_t \geqslant 0$ pour tout $t \in [0, T]$. Il ne nous reste donc plus qu'à prouver que V est auto-financé.

Définissons,

$$U_t := \frac{V_t}{\beta_t} \quad \text{et} \quad D_t := \frac{S_t}{\beta_t}.$$

On sait que U et D sont deux Q-martingales. De plus, nous avons que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[U_T^2\right] = \frac{1}{\beta_T^2}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[V_T^2\right] = \frac{1}{\beta_T^2}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[X^2\right] < \infty$$

et ainsi il existe $u_t \in \mathcal{H}^2([0, T])$ et un Q-mouvement brownien $\tilde{B}$ tel que

$$U_t = U_0 + \int_0^t u_s \mathrm{d}\tilde{B}_s = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{X}{\beta_T}\right] + \int_0^t u_s \mathrm{d}\tilde{B}_s.$$

et de même, il existe $d_t \in \mathcal{H}^2([0,\mathrm{T}])$ telle que

$$\mathrm{D}_t = \mathrm{D}_0 + \int_0^t d_s \mathrm{d}\tilde{\mathrm{B}}_s.$$

Pour prouver l'auto-financement, on veut avoir

$$\mathrm{dV}_t = a_t \mathrm{dS}_t + b_t \mathrm{d}\beta_t \quad \text{avec} \quad \mathrm{V}_t = a_t \mathrm{S}_t + b_t \beta_t.$$

On utilise la formule d'Itô pour écrire

$$\mathrm{dV}_t = \mathrm{d}(\beta_t \mathrm{U}_t) = \beta_t \mathrm{dU}_t + \mathrm{U}_t \mathrm{d}\beta_t = \beta_t u_t \mathrm{d}\tilde{\mathrm{B}}_t + \mathrm{U}_t \mathrm{d}\beta_t = \beta_t \frac{u_t}{d_t} \mathrm{dD}_t + \mathrm{U}_t \mathrm{d}\beta_t.$$

En utilisant la définition de D, nous avons

$$\mathrm{dV}_t = \beta_t \frac{u_t}{d_t} \left(\frac{1}{\beta_t} \mathrm{dS}_t - \mathrm{S}_t \frac{\mathrm{d}\beta_t}{\beta_t^2} \right) + \mathrm{U}_t \mathrm{d}\beta_t = \frac{u_t}{d_t} \mathrm{dS}_t + \left(\mathrm{U}_t - \frac{u_t}{d_t} \mathrm{D}_t \right) \mathrm{d}\beta_t.$$

Cela nous donne donc les candidats

$$a_t = \frac{u_t}{d_t} \quad \text{et} \quad b_t = \mathrm{U}_t - \frac{u_t}{d_t} \mathrm{D}_t.$$

Nous avons maintenant deux choses à voir. Tout d'abord qu'avec ces candidats, nous avons $\mathrm{V}_t = a_t \mathrm{S}_t + b_t \beta_t$ et ainsi nous avons bien un porte-feuille auto-financé. Ensuite, que ces coefficients sont tous bien définis et nous donne un processus d'Itô. Premièrement,

$$a_t \mathrm{S}_t + b_t \mathrm{d}\beta_t = \frac{u_t}{d_t} \mathrm{S}_t + \left(\mathrm{U}_t - \frac{u_t}{d_t} \mathrm{D}_t \right) \beta_t = \mathrm{U}_t \beta_t + \frac{u_t}{d_t} \mathrm{S}_t - \frac{u_t}{d_t} \mathrm{D}_t \beta_t = \mathrm{V}_t$$

où on a utilisé le fait que $\mathrm{U}_t \beta_t = \mathrm{V}_t$ et que $\mathrm{D}_t \beta_t = \mathrm{S}_t$ par définition. Ainsi, nous voulons avoir un processus d'Itô que l'on peut écrire

$$\mathrm{dV}_t = a_t \mathrm{dS}_t + b_t \mathrm{d}\beta_t = a_t \mu_t \mathrm{S}_t \mathrm{d}t + a_t \sigma_t \mathrm{S}_t \mathrm{dB}_t + b_t r_t \beta_t \mathrm{d}t.$$

On rappelle aussi que nous avions par définition de la mesure de probabilité risque-neutre,

$$\mathrm{dD}_t = \sigma_t \mathrm{D}_t \mathrm{d}\tilde{\mathrm{B}}_t$$

et ainsi nous avons

$$d_t = \sigma_t \mathrm{D}_t = \frac{\sigma_t \mathrm{S}_t}{\beta_t}.$$

Pour le premier terme, on veut que $a_t \mu_t \mathrm{S}_t$ soit intégrable, or

$$a_t \mu_t \mathrm{S}_t \mathrm{d}t = \frac{u_t}{d_t} \mu_t \mathrm{S}_t = \frac{\mu_t}{\sigma_t} u_t \beta_t$$

et finalement

$$\int_0^\mathrm{T} |a_t \mu_t \mathrm{S}_t| \, \mathrm{d}t \leqslant \sqrt{\int_0^\mathrm{T} \frac{\mu_t^2}{\sigma_t^2} \mathrm{d}t} \cdot \sqrt{\int_0^\mathrm{T} u_t^2 \beta_t^2 \mathrm{d}t} < \infty \text{ presque sûrement}$$

par la quatrième hypothèse, le fait que $u_t \in \mathcal{H}^2([0,\mathrm{T}])$ et que β_t^2 est bornée sur $[0,\mathrm{T}]$.

Pour le coefficient devant dB_t, nous avons

$$a_t \sigma_t \mathrm{S}_t = \frac{u_t}{d_t} \sigma_t \mathrm{S}_t = u_t \beta_t \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{Loc}}$$

car $u_t \in \mathcal{H}^2([0,\mathrm{T}])$ et β_t est bornée sur $[0,\mathrm{T}]$.

Enfin, le dernier terme est donné par

$$b_t\beta_t r_t = \left(\mathrm{U}_t - \frac{u_t}{d_t}\mathrm{D}_t\right)\beta_t r_t = \mathrm{U}_t\beta_t r_t - \beta_t\frac{r_t}{\sigma_t}u_t.$$

Comme $\mathrm{U}_t\beta_t$ est continue, c'est une fonction bornée sur $[0,\mathrm{T}]$ et de plus comme β_t est un processus d'Itô (avec $\sigma_t = 0$), on a que r_t est intégrable et le premier terme est intégrable. Pour le deuxième terme, nous voyons que nous pouvons écrire

$$\frac{r_t}{\sigma_t} = \frac{\mu_t}{\sigma_t} - \frac{\mu_t - r_t}{\sigma_t} = \frac{\mu_t}{\sigma_t} - m_t$$

avec m_t la prime de risque du marché. Mais par la quatrième hypothèse, on sait que $\frac{\mu_t}{\sigma_t} \in \mathrm{L}^2([0,\mathrm{T}])$ p.s et de plus par la première hypothèse, on sait que $m_t \in \mathrm{L}^2([0,\mathrm{T}])$ p.s et ainsi $\frac{r_t}{\sigma_t} \in \mathrm{L}^2([0,\mathrm{T}])$ p.s. Finalement, nous avons

$$\int_0^{\mathrm{T}} \left|\beta_t\frac{r_t}{\sigma_t}u_t\right| \mathrm{d}t \leqslant \sqrt{\int_0^{\mathrm{T}} \frac{r_t^2}{\sigma_t^2}\mathrm{d}t} \cdot \sqrt{\int_0^{\mathrm{T}} u_t^2\beta_t^2\mathrm{d}t} < \infty \text{ presque sûrement.}$$

Pour tout produit dérivé X, nous avons donc bien défini un porte-feuille auto-financé admissible qui le réplique, le système est complet. □

13. Formule de Feynman–Kac

13.1 Mouvement brownien et équation de la chaleur

On rappelle léquation de la chaleur

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) &= \frac{1}{2}\partial_{xx}^2 u(t,x), \\ u(0,x) &= f(x), \end{cases}$$

on rappelle que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se comporte bien alors il existe une unique solution bornée u. Si on passe en Fourier,

$$\hat{u}(t,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta x}u(t,x)\mathrm{d}x$$

alors on a

$$\begin{aligned} \widehat{\partial_t u}(t,\theta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta x}\partial_t u(t,x)\mathrm{d}x = \partial_t\hat{u}(t,\theta), \\ \widehat{\partial_{xx}^2 u}(t,\theta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta x}\partial_{xx}u(t,x)\mathrm{d}x = -\theta^2\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta x}u(t,x) = -\theta^2\hat{u}(t,\theta). \end{aligned}$$

Ainsi l'equation de la chaleur devient seulement

$$\partial_t\hat{u}(t,\theta) = -\frac{\theta^2}{2}\hat{u}(t,\theta).$$

et ainsi, avec la condition initiale $\hat{u}(0,\theta) = \hat{f}(\theta)$, on obtient

$$\hat{u}(t,\theta) = \hat{f}(\theta)\mathrm{e}^{-\frac{\theta^2}{2}t}.$$

Comme nous avons un produit de deux transformées de Fourier, la transformée inverse est donné par un produit de convolution et nous avons

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right)\mathrm{d}y = \mathbb{E}\left[f(x+\mathrm{B}_t)\right]$$

avec B un mouvement brownien standard. On peut donc ramener létude d'une solution de léquation de la chaleur à une espérance sur le mouvement brownien et vice-versa. Ce calcul peut se généraliser à des équations plus générales.

Théorème 13.1

Soit $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée et $\mathcal{C}^2$, on considère

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) & = & \frac{1}{2}\partial_{xx} u(t,x) + q(x)u(t,x), \\ u(0,x) & = & f(x). \end{cases}$$

Si $u(t,x)$ est l'unique solution bornée alors on a

$$u(t,x) = \mathbb{E}\left[f(x+\mathrm{B}_t)\exp\left(\int_0^t q(x+\mathrm{B}_s)\mathrm{d}s\right)\right]$$

Démonstration. On introduit le processus, pour t fixé,

$$\mathrm{M}_s = u(t-s, x+\mathrm{B}_s)\exp\left(\int_0^s q(x+\mathrm{B}_u)\mathrm{d}u\right).$$

Nous allons montrer que M est une martingale et puisque

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{M}_0\right] = u(t,x) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\left[\mathrm{M}_t\right] = \mathbb{E}\left[f(x+\mathrm{B}_t)\exp\left(\int_0^t q(x+\mathrm{B}_s)\mathrm{d}s\right)\right],$$

nous aurons prouver le résultat. Par la formule d'Itô nous avons

$$\mathrm{d}u(t-s,x+\mathrm{B}_s) = -\partial_t u(t-s,x+\mathrm{B}_s)\mathrm{d}s + \partial_x u(t-s,x+\mathrm{B}_s)\mathrm{dB}_s + \frac{1}{2}\partial^2_{xx}u(t-s,x+\mathrm{B}_s)\mathrm{d}s.$$

Maintenant, on utilise le fait que u est solution de léquation aux dérivées partielle pour écrire

$$\mathrm{d}u(t-s,x+\mathrm{B}_s) = \partial_x u(t-s,x+\mathrm{B}_s)\mathrm{dB}_s - q(x+\mathrm{B}_s)u(t-s,x+\mathrm{B}_s)\mathrm{d}s.$$

Ainsi, en faisant la rg̀le du produit avec la formule d'Itô,

$$\mathrm{dM}_s = \exp\left(\int_0^s q(x+\mathrm{B}_u)\mathrm{d}u\right) \times \\ \times \left(\partial_x u(t-s,x+\mathrm{B}_s)\mathrm{dB}_s - q(x+\mathrm{B}_s)u(t-s,x+\mathrm{B}_s)\mathrm{d}s + u(t-s,x+\mathrm{B}_s)q(x+\mathrm{B}_s)\mathrm{d}s\right)$$

ou encore

$$\mathrm{dM}_s = \partial_x u(t-s,x+\mathrm{B}_s)\exp\left(\int_0^s q(x+\mathrm{B}_u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{DB}_s$$

et M est une martingale locale. De plus, nous avons pour tout $s \in [0,t]$,

$$|\mathrm{M}_s| \leqslant \|u\|_\infty \exp\left(t\|q\|_\infty\right)$$

et $(\mathrm{M}_s)_{0\leqslant s\leqslant t}$ est donc une martingale locale bornée et donc une vraie martingale. □

Cette preuve s géneralise aussi à des équations plus générales en considérant des processus d'Itô plutôt que seulement le mouvement brownien et la preuve reste la même.

Théorème 13.2

Soit $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^2$ et bornée. Soit u l'unique solution bornée de

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) & = & \frac{1}{2}\sigma^2(x)\partial^2_{xx}u(t,x) + \mu(x)\partial_x u(t,x) + q(x)u(t,x), \\ u(0,x) & = & f(x). \end{cases}$$

Si $\mu, \sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions lipschitziennes avec $\mu^2(x) + \sigma^2(x) \leqslant A(1+x^2)$ alors

$$u(t,x) = \mathbb{E}\left[f(x+X_t)\exp\left(\int_0^t q(x+X_s)\mathrm{d}s\right)\right]$$

avec

$$\mathrm{d}X_t = \mu(X_t)\mathrm{d}t + \sigma(X_t)\mathrm{d}B_t, \quad X_0 = 0.$$

13.2 Loi de l'arcsinus

Nous allons utiliser la formule de Feynman–Kac pour calculer la distribution de

$$T_t = \int_0^t \mathbb{1}_{B_s \geqslant 0}(s)\mathrm{d}s$$

avec B un mouvement brownien.

Théorème 13.3

Pour tout $p \in [0,1]$ et pour tout $t \geqslant 0$, nous avons

$$\mathbb{P}\left(T_t \leqslant pt\right) = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{p} = \frac{1}{\pi}\int_0^p \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u(1-u)}}.$$

On dit que $\frac{T_t}{t}$ suit la loi de l'arcsinus.

Démonstration. L'idée de la preuve est de se ramener à un problème d'équations différentielles grâce à la formule de Feynman–Kac. En effet, si on considère la fonction bornée

$$q(x) = -\lambda \mathbb{1}_{x \geqslant 0}(x)$$

alors nous avons que

$$\int_0^t q(B_s)\mathrm{d}s = -\lambda T_t$$

et ainsi si u est l'unique solution bornée de

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) &= \frac{1}{2}\partial^2_{xx}u(t,x) - \lambda_{x \geqslant 0}u(t,x), \\ u(0,x) &= 1 \end{cases}$$

alors nous avons par la formule de Feynman–Kac que

$$u(t,x) = \mathbb{E}\left[\exp\left(\int_0^t q(x+B_s)\mathrm{d}s\right)\right] \quad \text{et} \quad u(t,0) = \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-\lambda T_t}\right]$$

la transformée de Laplace de la variable aléatoire T_t.

COnsidérons la transformée de Laplace de la solution u,

$$\hat{u}(\alpha,x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}u(t,x)\mathrm{d}t.$$

alors on a

$$\widehat{\partial_t u}(\alpha,x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\partial_t u(t,x)\mathrm{d}t = 1 + \alpha\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}u(t,x)\mathrm{d}t = 1 + \alpha\hat{u}(\alpha,x)$$
$$\widehat{\partial^2_{xx}u}(\alpha,x) = \partial^2_{xx}\hat{u}(\alpha,x).$$

Ainsi, l'équation devient

$$1 + \alpha\hat{u}(\alpha,x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\partial^2_{xx}\hat{u}(\alpha,x) & \text{si } x < 0, \\ \frac{1}{2}\partial^2_{xx}\hat{u}(\alpha,x) - \lambda\hat{u}(\alpha,x) & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

On peut ainsi facilement résoudre ces deux équations, sans oublier que la solution doit rester bornée nous obtenons

$$\hat{u}(\alpha, x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} + c_1 \mathrm{e}^{\sqrt{2\alpha}x} & \text{si } x < 0, \\ \frac{1}{\alpha+\lambda} + c_2 \mathrm{e}^{-\sqrt{2(\alpha+\lambda)}x} & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Pour obtenir les coefficients c_1 et c_2, on utilise la continuité de u et de $\partial_x u$, qui nous donne que

$$\hat{u}(\alpha, 0^+) = \hat{u}(t, 0^-),\ \partial_x \hat{u}(\alpha, 0^+) = \partial_x \hat{u}(\alpha, 0^-)$$

et ainsi les équations

$$\frac{1}{\alpha+\lambda} + c_2 = \frac{1}{\alpha} + c_1, \quad \sqrt{2\alpha}c_1 = -\sqrt{2(\alpha+\lambda)}c_2.$$

Finalement, on obtient les coefficients

$$c_2 = \frac{\sqrt{\alpha+\lambda} - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}(\alpha+\lambda)}, \quad c_1 = \frac{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\alpha+\lambda}}{\alpha\sqrt{\alpha+\lambda}}.$$

Ainsi, nous avons que

$$\hat{u}(t, 0^+) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t} \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{T}_t}\right] \mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha+\lambda} + c_2 = \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha+\lambda)}}.$$

Nous voulons que $\frac{\mathrm{T}_t}{t}$ suive une loi de l'arcsinus et ainsi

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{T}_t}\right] = \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-\lambda t \frac{\mathrm{T}_t}{t}}\right] = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-\lambda t s}}{\sqrt{s(1-s)}} \mathrm{d}s = \frac{1}{\pi}\int_0^t \frac{\mathrm{e}^{-\lambda u}}{\sqrt{u(t-s)}} \mathrm{d}u.$$

Il suffit maintenant de calculer la transformée de Laplace de cette transformée de Laplace et voir qu'elle est égale à $\frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha+\lambda)}}$ et la résultat est prouvé par unicité de la transformée de Laplace.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t} \int_0^t \frac{\mathrm{e}^{-\lambda s}}{\pi\sqrt{s(t-s)}} \mathrm{d}s\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\lambda s}}{\sqrt{s}} \int_s^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\alpha t}}{\sqrt{t-s}} \mathrm{d}t\mathrm{d}s &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda s}\sqrt{s} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha(t+s)}\sqrt{t}\mathrm{d}t\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-(\lambda+\alpha)s}}{\sqrt{s}} \mathrm{d}s \cdot \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t}\sqrt{t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha+\lambda}}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha+\lambda)}}. \end{aligned}$$

□