Feuille d'Exercices IV
Calcul Stochastique

Exercice 1. Soit $(B_t)_{t\geqslant 0}$ un mouvement brownien standard.

1. Montrer que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leqslant s\leqslant t} B_s\right] = \sqrt{t}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leqslant s\leqslant 1} B_s\right]$$

2. Soient X une variable aléatoire positive et $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et telle que $f(X)$ soit intégrable. Montrer que

$$\mathbb{E}[f(X)] = f(0) + \int_0^\infty f'(t)\mathbb{P}(X \geqslant t)\mathrm{d}t.$$

3. Donner la valeur de

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leqslant s\leqslant t} B_s\right].$$

Exercice 2. Soit $(B_t)_{t\geqslant 0}$ un mouvement brownien standard.

1. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que

$$\log \|\mathrm{e}^f\|_\infty = \sup_{0\leqslant s\leqslant 1} f(s).$$

2. Montrer que pour tout $t > 0$,

$$\int_0^t \mathrm{e}^{B_s}\mathrm{d}s \overset{(d)}{=} t\int_0^1 \mathrm{e}^{\sqrt{t}B_s}\mathrm{d}s.$$

3. Montrer que

$$\frac{1}{\sqrt{t}}\log\int_0^t \mathrm{e}^{B_s} \xrightarrow[t\to\infty]{(d)} \sup_{0\leqslant s\leqslant 1} B_s.$$

4. Soit γ défini tel que $\int_{-\infty}^{\gamma} \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}x = \frac{3}{4}$. Donner une approximation pour t grand de

$$\mathbb{P}\left(\int_0^t \mathrm{e}^{B_s}\mathrm{d}s \leqslant 1\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(\int_0^t \mathrm{e}^{B_s}\mathrm{d}s \leqslant \mathrm{e}^{\gamma\sqrt{t}}\right)$$

Exercice 3. Soit $(B_t)_{t\geqslant 0}$ un mouvement brownien standard et $\{\mathcal{F}_t\}$ sa filtration. On définit

$$\tau = \inf\{t \geqslant 1,\, B_t = 0\} \quad \text{et} \quad \nu = \sup\{0 \leqslant t \leqslant 1,\, B_t = 0\}.$$

1. Montrer que τ est un temps d'arrêt et que ν n'en est pas un.

2. Montrer que pour tout $t \geqslant 1$, $\mathbb{P}[\tau \leqslant t] = \mathbb{E}[g(B_1)]$ où g est donnée par

$$g(x) = \mathbb{P}\left(\sup_{0\leqslant s\leqslant t-1} \widetilde{B}_s \geqslant |x|\right)$$

avec $\widetilde{B}_s$ un mouvement brownien standard indépendant de $\mathcal{F}_1$.

3. Montrer que

$$\tau \overset{(d)}{=} \frac{Z_1^2 + Z_2^2}{Z_2^2}$$

où Z_1 et Z_2 sont deux gaussiennes centrées réduites indépendantes.

4. Calculer la densité de τ.

5. Montrer que $\nu \overset{(d)}{=} \frac{1}{\tau}$ et en déduire la densité de ν. La loi de ν s'appelle la loi de l'arcsinus.

Exercice 4. Soit $(B_t)_{t\geqslant 0}$ un mouvement brownien standard et $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leqslant t)$. On définit

$$\mathcal{F}_{0^+} = \bigcap_{s>0} \mathcal{F}_s.$$

1. Montrer que la tribu $\mathcal{F}_{0^+}$ est grossière dans le sens où pour tout $A \in \mathcal{F}_{0^+}$, $\mathbb{P}(A) = 0$ ou 1.

2. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a presque sûrement, $\sup_{0\leqslant s\leqslant\varepsilon} B_s > 0$ et $\inf_{0\leqslant s\leqslant\varepsilon} B_s < 0$

3. Montrer que $\limsup_{t\to\infty} B_t = +\infty$ et $\liminf_{t\to\infty} B_t = -\infty$.

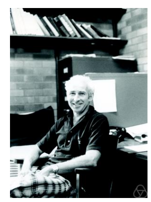
Exercice 5. Soit $(B_t)_{t\geqslant 0}$ un mouvement brownien standard. Soient $a < b < c < d$ quatre nombres réels. On pose $S_1 = \max_{a\leqslant t\leqslant b} B_t$ et $S_2 = \max_{c\leqslant t\leqslant d} B_t$.

1. Montrer que $S_1 - B_b$, $B_c - B_b$ et $S_2 - B_c$ sont indépendants.

2. Montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et si X est une variable sans atomes alors $P(X = Y) = 0$.

3. En déduire que presque sûrement $S_1 \neq S_2$ et que les maxima locaux de B sont distincts deux à deux.

Norbert Wiener
(1894–1964)



Robert McCallum Blumenthal
(1931–2012)