Feuille d'Exercices II
Calcul Stochastique

Exercice 1. Utiliser la fonction caractéristique ou la forme explicite de la densité pour répondre aux questions suivantes.

1. Soit $V = (v_1, \ldots, v_n)$ un vecteur gaussien d'espérance $\mu \in \mathbb{R}^n$ et de covariance $\Sigma \in S_n(\mathbb{R})$. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que AV est un vecteur gaussien d'espérance $A\mu$ et de covariance $A\Sigma A^\top$.

2. Montrer que si X et Y sont deux variables gaussiennes indépendantes d'espérance zéro et de variance 1 alors $X - Y$ et $X + Y$ sont deux variables gaussiennes indépendantes d'espérance zéro et de variance 2.

3. Montrer que si (X, Y) est un vecteur gaussien, alors la distribution conditionnelle de Y sachant que $X = x$ est normale d'espérance

$$\mu_{Y|X=x} = \mu_Y + \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{Var}(X)}(x - \mu_X)$$

et de variance

$$\sigma^2_{Y|X=x} = \sigma^2_Y - \frac{\mathrm{Cov}^2(X,Y)}{\mathrm{Var}(x)}.$$

Exercice 2. Soit $(B_t)_{t\geqslant 0}$ un mouvement brownien standard et $s < t$.

1. Calculer $\mathbb{E}[B_s B_t^2]$.

2. Calculer $\mathbb{E}[B_s^2 B_t^2]$. On pourra recalculer $\mathbb{E}[X^4]$ avec $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ si on l'a oublié.

3. Montrer que $\mathbb{E}[B_s \mathrm{e}^{B_s}] = s\mathrm{e}^{s/2}$. On pourra tout d'abord calculer $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{tX}]$ où $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

4. Calculer $\mathbb{E}[B_s \mathrm{e}^{B_t}]$.

Exercice 3. Soit $(B_t)_{t\geqslant 0}$ un mouvement brownien standard et $a \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{B_t \leqslant a}]$.

2. Calculer $\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[B_t \mathbb{1}_{B_t \leqslant a}]$.

Exercice 4. Soit $(B_t)_{t\geqslant 0}$ un mouvement brownien standard.

1. Montrer que si $0 \leqslant s \leqslant t$ alors la loi jointe de (B_s, B_t) est donnée $f_{s,t}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{s(t-s)}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2s}x^2 - \frac{1}{2(t-s)}(y-x)^2}$.

2. Montrer que pour tout $s > 0$, $\mathbb{P}(B_s < 0, B_{2s} > 0) = \frac{1}{8}$.

Exercice 5. La construction de notre mouvement brownien standard s'écrit $B_t = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_n(t) Z_n$. On remarque que $\Delta_0(1) = 1$ et $\Delta_n(1) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$ ainsi que $\Delta_n(0) = 0$ pour tout $n \geqslant 0$. On peut donc définir un nouveau processus

$$U_t = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n(t) Z_n.$$

Ce processus est un processus continu sur $[0,1]$ tel que $U(0) = U(1) = 0$, il est appelé un *pont brownien.*

1. Montrer que l'on peut écrire $U_t = B_t - tB_1$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1$.

2. Montrer que l'on a $\mathrm{Cov}(U_s, U_t) = s(1-t)$ pour $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$.

3. Soit $X_t = g(t) B_{h(t)}$, trouver les fonctions g et h telles que X_t a la même structure de covariance que le pont Brownien.

4. Montrer que le prcessus défini par $Y_t = (1+t) U_{t/(1+t)}$ est un mouvement brownien sur $[0, \infty)$.
Remarque: Cela nous donne une autre définition du mouvement brownien sur $\mathbb{R}_+$.

Louis Bachelier
(1870–1946)

Paul Lévy
(1886–1971)