Les matrices aléatoires de Wishart associées à un graphe triangulé.

Gérard Letac*, Université de Montréal 3.02.09

Un graphe triangulé est un graphe $G = (V, \mathcal{E})$ non dirigé (c'est- à dire que l'ensemble $\mathcal{E}$ des arêtes est un sous ensemble des parties de l'ensemble fini V des sommets à deux éléments) tel que G soit connexe et que V ne contienne aucune partie C telle que le graphe induit sur C soit un cycle d'ordre > 3. On dit aussi graphe chordal ou graphe décomposable. Un objet important associé au graphe G est le cône $\mathcal{P}(G)$ des matrices symétriques définies positives $(y_{ij})i, j \in V$ telles que $y_{ij} = 0$ si $\{i, j\}$ n'est pas une arête. Les graphes triangulés ont de nombreuses utilisations, et celle qui intéresse le statisticien est le fait suivant: si $(X_v)_{v \in V}$ est un vecteur gaussien centré de covariance inconnue Σ telle que $\Sigma^{-1} \in \mathcal{P}(G)$ alors la méthode du maximum de vraisemblance permet d'estimer Σ explicitement si et seulement si G est triangulé. Cet estimateur est donc aléatoire et par généralisation du cas où G est complet, sa loi est dite Wishart standard par rapport à G. Toutefois, si le graphe n'est pas complet, on étend la définition des Wishart standard à une classe plus vaste de matrices aléatoires dont les transformées de Laplace sont très explicites. Pour manipuler celles ci il faut maîtriser un certain nombre d'objets naturels attachés à un graphe triangulé: cliques, séparateurs minimaux, multiplicité de ceux ci, ordre parfait des cliques et arbres de jonction. Avec tout ce matériel, on paramètre enfin les Wishart par 1) le choix d'un séparateur; 2) $k + 1$ puissances si $k > 1$ est le nombre de cliques; 3) un élément de $\mathcal{P}(G)$.

*Université Paul Sabatier, Toulouse, France