Chapitre 1

Les mouvements d'un robot

Christiane Rousseau

1.1 Introduction

Commençons par observer le robot tri-dimensionnel de la Figure 1.1 : de combien de nombres avons-nous besoin pour décrire sa position ? Pour un travailleur qui veut utiliser le robot pour saisir un objet ce qui est important pour lui est :

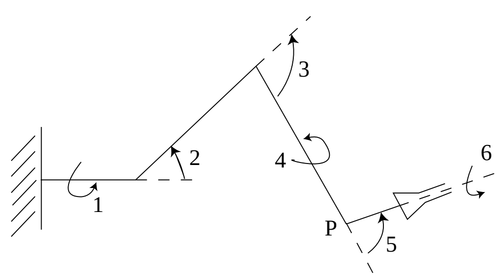

FIG. 1.1 – Exemple d'un robot 3-dimensionnel avec 6 degrés de liberté

- la position de P : elle est définie par les 3 coordonnées (x, y, z) de P dans l'espace.
- la direction de l'axe de la pince : on peut se donner une direction en se donnant un vecteur : a priori on semble avoir besoin de 3 nombres. Cependant il existe une infinité de vecteurs qui spécifient une même direction, à savoir tous les multiples d'un même vecteur. Une manière plus économique de se donner une direction est d'imaginer une sphère de rayon 1 centrée à l'origine et de se donner un point Q de la sphère : la direction est alors donnée par le vecteur joignant l'origine à Q : on remarque qu'on a une bijection entre les points de la sphère et les direc-

tions. Pour se donner une direction il suffit donc de préciser un point de la sphère. Ceci se fait de manière économique en utilisant les coordonnées sphériques : les points de la sphère de rayon 1 sont les points :

$$(x, y, z) = (\cos\theta\cos\phi, \sin\theta\cos\phi, \sin\phi),$$

avec $\theta \in [0, 2\pi)$ et $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Donc les deux nombres θ et ϕ suffisent pour décrire la position de l'axe de la pince.
- La pince peut pivoter autour de son axe par un mouvement de rotation lequel est uniquement déterminé par l'angle de rotation.
- Au total on a eu besoin de six nombres pour spécifier la position de la pince du robot pour le travailleur.
- Dans notre exemple on réalise ces six nombres qui correspondent à six mouvements indépendants par les six rotations dessinées sur la figure : les mouvements 1, 2, et 3 amènent P à sa position, les mouvements 4 et 5 placent l'axe de la pince dans la bonne direction ; le mouvement 6 amène la pince à sa position finale via une rotation autour de son axe. Ces six mouvements correspondent aux "six degrés de liberté du robot".

Réflexion sur le nombre de degrés de liberté :
- La construction du robot n'est pas unique mais **6 degrés de liberté** (donc au moins 6 mouvements indépendants) sont nécessaires pour atteindre tout point d'une région donnée avec la pince bien orientée. Donc 6 degrés de liberté sont nécessaires pour les manettes qui permettent de manier le robot.
- Vous pourriez essayer d'ajouter des bras supplémentaires au robot et l'installer sur un rail mobile. Vous augmenteriez peut-être la taille de la région atteignable mais vous n'augmenteriez pas le nombre de positions finales de la pince. Par contre votre robot pourrait avoir d'autres avantages dont nous discuterons plus loin.
- Par contre construisez un robot qui n'a que 5 degrés de liberté. Quelle que soit la manière dont vous choisissez 5 mouvements indépendants décrits chacun par un seul nombre il y aura des positions de la pince qui seront interdites. En fait seul un petit ensemble de positions seront permises contre une majorité de positions défendues.
- Essayez d'imaginer des modèles de robot qui ne bougeraient que dans un plan. Combien de degrés de liberté sont nécessaires pour un robot ne se mouvant que dans un plan ? (La réponse dépend du problème, c'est-à-dire de l'ensemble des positions que doit pouvoir prendre la pince pour accomplir le travail.)
- Essayez d'imaginer d'autres modèles de robots avec 6 degrés de liberté.

Les mathématiques sous-jacentes : Lorsqu'on s'intéresse à décrire les mouvements du robot on va devoir se pencher sur les mouvements d'un solide dans l'espace. En effet chaque mouvement du robot sera une translation ou une rotation autour d'un axe. Les rotations seront centrées en différents points.

- On commencera par décrire chaque rotation comme une transformation linéaire dans un système de coordonnées dont l'axe de rotation est un des axes de coordonnées.
- On étudiera ensuite les changements d'un système de coordonnées à un autre par une translation suivie d'une rotation. Si on connaît les coordonnées d'un point Q donné dans un système de coordonnées cela permettra de calculer ses coordonnées dans un nouveau système de coordonnées.
- Pour notre exemple de la Figure 1.1 on apprendra à calculer la position d'un point Q dans le système de coordonnées original après qu'on ait appliqué des rotations $R_i(\theta_i)$ d'angles θ_i, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, avec les six mouvements décrits.

1.2 Les mouvements d'un solide dans le plan

Découpons une forme en carton, par exemple un triangle sans aucune symétrie. Le carton est indéformable et la forme doit rester constamment sur le plan. Nous voulons décrire toutes les positions que peut prendre le triangle. Pour cela nous choisissons un des sommets du triangle, soit A (mais ce pourrait être n'importe quel autre point du triangle).

- Nous devons commencer par spécifier la position de A. Ceci se fait à l'aide des deux coordonnées (a_1, a_2) de A.
- Nous devons ensuite préciser la position du triangle par rapport à son point A. Si A est fixé, les seuls mouvements que peut faire le triangle sont des rotations autour de A. Si B est un deuxième sommet la position du triangle est alors déterminée par l'angle que fait le vecteur $\overrightarrow{AB}$ avec une direction fixe.

Nous avons donc besoin de 3 nombres pour déterminer uniquement la position d'un solide dans le plan.

THÉORÈME 1 *Les mouvements d'un solide dans le plan sont les compositions de translations et de rotations. Ce sont des mouvements qui préservent les longueurs et les angles.*

1.3 Mouvements qui préservent les distances et les angles dans le plan ou dans l'espace

Nous allons commencer par considérer les transformations linéaires qui préservent les distances et les angles : ce sont précisément les transformations linéaires dont la matrice est orthogonale. Pour cela nous faisons quelques rappels sur les transformations linéaires. Nous allons donner les définitions pour les transformations linéaires dans $\mathbb{R}^n$ mais nous serons en pratique intéressés aux cas $n = 2$ ou $n = 3$.

THÉORÈME 2 *Soit* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *une transformation linéaire, i.e. une transformation qui a les propriétés suivantes :*

$$\begin{array}{lcll} T(v+w) & = & T(v)+T(w), & \forall v, w \in \mathbb{R}^n \\ T(\alpha v) & = & \alpha T(v), & \forall v \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{R}. \end{array} \tag{1.1}$$

Soit

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

la matrice verticale formée des coordonnées de v*. On note* $X = [v]$*.*

1. *Il existe une unique matrice* A*,* $n \times n$*, telle que la matrice verticale* $[T(v)]$ *des coordonnées de* $T(v)$ *est donnée par* AX *:*

$$[T(v)] = A[v] = AX. \tag{1.2}$$

2. *La matrice* A *de la transformation linéaire est construite ainsi : les colonnes de* A *sont les images des vecteurs de la base standard de* $\mathbb{R}^n$ *:*

$$\begin{array}{lcl} e_1 & = & (1, 0, \dots, 0) \\ e_2 & = & (0, 1, 0, \dots, 0) \\ \vdots & & \\ e_n & = & (0, \dots, 0, 1). \end{array}$$

PREUVE : On commencera par prouver la deuxième partie. Calculons $[T(e_1)]$:

$$[T(e_1)] = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

et de même pour les autres vecteurs de la base standard.

Pour la première partie, la matrice A cherchée est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs $T(e_i)$ dans la base standard. Elle a bien la propriété (1.2) $\square$

DÉFINITION 1 1. *Soit* $A = (a_{ij})$ *une matrice* $n \times n$*. La matrice transposée de* A *est la matrice* $A^t = (b_{ij})$ *où*

$$b_{ij} = a_{ji}.$$

2. *Une matrice est orthogonale si*

$$AA^t = A^tA = I,$$

où I *est la matrice identité* $n \times n$.

3. *Une transformation linéaire est orthogonale si sa matrice dans la base standard est une matrice orthogonale.*

THÉORÈME 3 1. *Une matrice est orthogonale si et seulement si ses colonnes forment une base orthonormale de* $\mathbb{R}^n$.

2. *Une transformation linéaire préserve les distances et les angles si et seulement si sa matrice est orthogonale.*

PREUVE :

1. Étant donné deux vecteurs $v = (x_1, \ldots, x_n)$ et $w = (y_1, \ldots, y_n)$ le produit scalaire de v et w est :

$$\langle v, w \rangle = x_1 y_1 + \ldots x_n y_n.$$

Si

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

alors on peut remarquer que $v = X^t$ et $w = Y^t$. Remarquons alors que le produit scalaire de v et w peut s'écrire comme le produit matriciel

$$\langle v, w \rangle = X^tY = Y^tX.$$

Appelons $X_1, \ldots, X_n$ les vecteurs (verticaux) formés des colonnes de A. On écrira

$$A = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \ldots & X_n \end{pmatrix}.$$

Alors les transposés $X_1^t, \ldots X_n^t$ sont des vecteurs lignes. On peut représenter la matrice A^t par ses lignes : c'est la matrice

$$A^t = \begin{pmatrix} X_1^t \\ \vdots \\ X_n^t \end{pmatrix}$$

Calculons le produit matriciel A^tA en utilisant cette forme :

$$A^tA = \begin{pmatrix} X_1^tX_1 & X_1^tX_2 & \ldots & X_1^tX_n \\ X_2^tX_1 & X_2^tX_2 & \ldots & X_2^tX_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_n^tX_1 & X_n^tX_2 & \ldots & X_n^tX_n \end{pmatrix}.$$

Alors la matrice A est orthogonale si et seulement si ce produit est égal a la matrice identité. Dire que les entrées sur la diagonale sont égales à 1 revient à dire que le produit scalaire de chaque colonne X_i de A avec elle-même est égal à 1. Ce produit scalaire est égal au carré de la longueur du vecteur X_i. Donc chaque vecteur X_i est de longueur 1. Les entrées de A^tA qui ne sont pas sur la diagonale doivent être nulles : ceci signifie que le produit scalaire du vecteur X_i avec le vecteur X_j, $j \neq i$ doit être nul. Donc les vecteurs $X_1, \dots, X_n$ sont orthogonaux et de longueur 1 : ils forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

2. Commençons par la réciproque à savoir que si T est une transformation linéaire dont la matrice A est orthogonale, alors T préserve les distances et les angles. D'après la première partie les images des vecteurs de la base canonique forment une base orthonormale. Leurs images par T sont les vecteurs colonnes de A. Donc leur longueur est préservée et leurs angles respectifs sont préservés. On peut se convaincre aisément qu'une transformation linéaire préserve les distances et les angles si et seulement si elle préserve le produit scalaire. Soit v et w tels que $X = [v]$ et $Y = [w]$. Voyons que leur produit scalaire est préservé si A est orthogonale :

$$\begin{aligned}\langle T(v), T(w)\rangle &= (AX)^t(AY)\\ &= (X^tA^t)(AY)\\ &= X^t(A^tA)Y\\ &= X^tIY\\ &= X^tY\\ &= \langle v, w\rangle.\end{aligned}$$

Pour la partie directe, si T préserve les distances et les angles, T préserve le produit scalaire. Alors soit v et w quelconques et $X = [v]$ et $Y = [w]$.

$$\langle T(v), T(w)\rangle = (AX)^t(AY) = (X^tA^t)(AY) = X^t(A^tA)Y = \langle v, w\rangle = X^tY.$$

Supposons que $A^tA = (b_{ij})$. Prenons $v = e_i$ et $w = e_j$. Alors

$$(X^t(A^tA))Y = (b_{i1} \dots b_{in})Y = b_{ij}.$$

D'autre part $X^tY = \delta_{ij}$ où

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

Donc $\forall i, j, b_{ij} = \delta_{ij}$, ce qui revient à $A^tA = I$, i.e. A est orthogonale. □

THÉORÈME 4 *Les mouvements qui préservent les distances et les angles dans le plan et dans l'espace sont les compositions de translations et de transformations orthogonales.*

PREUVE : Considérons un mouvement F du plan ou de l'espace qui préserve les distances et les angles. Considérons $F(0) = Q$. Soit $v_0 = \overrightarrow{OQ}$ et prenons la translation $T(v) = v - v_0$. Alors $T(Q) = 0$. Donc $T \circ F(0) = 0$. Soit $G = T \circ F$. C'est une transformation qui préserve les distances et les angles et qui a un point fixe à l'origine. Nous admettrons qu'elle est linéaire. Par le théorème précédent c'est une transformation linéaire orthogonale. Donc $F = T^{-1} \circ G$. Comme T^{-1} est encore une translation on a bien écrit F comme composition d'une transformation linéaire orthogonale avec une translation. $\square$

1.4 Propriétés des matrices orthogonales

Nous nous donnons une transformation linéaire orthogonale $T(X) = AX$. Prenons par exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est compliquée. Nous savons seulement qu'elle est orthogonale, donc que la transformation linéaire T préserve les distances et les angles. Comment peut-on comprendre la géométrie de T ? L'outil très puissant qui nous permet de comprendre la géométrie de T est la diagonalisation. En pratique quand on diagonalise une matrice on change de système d'axes de coordonnées. On se place dans un système d'axes de coordonnées dans lequel la matrice est simple, c'est-à dire dans lequel on comprend la structure de la transformation linéaire.

Étude détaillée de l'exemple précédent : Pour diagonaliser la matrice on doit commencer par calculer les valeurs propres. Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique

$$P(\lambda) = |\lambda I - A| = \det(\lambda I - A).$$

Dans notre cas

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & \lambda + 2/3 & -1/3 \\ -2/3 & -1/3 & \lambda + 2/3 \end{vmatrix} = \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = (\lambda + 1)^2(\lambda - 1).$$

La matrice a donc les deux valeurs propres 1 et -1. Calculons leurs vecteurs propres. Un vecteur propre X d'une valeur propre λ satisfait : $AX = \lambda X$. Donc $AX - \lambda X = (A - \lambda I)X = 0$. Le vecteur X est donc solution du système linéaire homogène de matrice $A - \lambda I$.

Vecteurs propres de $+1$: Pour trouver les solutions on échelonne la matrice

$$A - I = \begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -5/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -5/3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Toutes les solutions sont donc des multiples du vecteur propre $v_1 = (2,1,1)$.

Vecteurs propres de -1 : Ce sont les solutions du système homogène $(A+I)X = 0$. Pour trouver les solutions on échelonne la matrice

$$A+I = \begin{pmatrix} 4/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ici l'ensemble des solutions est un plan. Il est engendré par les deux vecteurs $v_2 = (1,-2,0)$ et $v_3 = (1,0,-2)$.

On veut travailler avec des bases orthonormales. On préfère donc remplacer v_3 par un vecteur $v_3' = (x,y,z)$ qui soit perpendiculaire à v_2. Il doit donc satisfaire $2x+y+z=0$, soit être un vecteur propre de -1, et $x-2y=0$, soit être perpendiculaire à v_2. On peut prendre $v_3' = (-2,-1,5)$ qui est solution du système

$$\begin{aligned} 2x+y+z &= 0 \\ x-2y &= 0. \end{aligned}$$

Pour passer à une base orthonormale on divise chacun des vecteurs par sa longueur. On obtient la base orthonormale

$$\mathcal{B} = \left\{ w_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), w_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right), w_3 = \left(-\frac{2}{\sqrt{30}}, -\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}\right) \right\}.$$

Dans cette base la matrice de la transformation est donnée par :

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Géométriquement on a $T(w_1) = w_1$, $T(w_2) = -w_2$ et $T(w_3) = -w_3$. On voit que cette transformation est la symétrie par rapport à la droite de vecteur directeur w_1 : cette transformation peut aussi être vue comme la rotation d'angle π autour de l'axe w_1. On voit donc comment la diagonalisation nous a permis de "comprendre" la transformation.

Quelques caractéristiques de l'exemple précédent : Dans notre exemple nos deux valeurs propres 1 et -1 avaient toutes deux valeur absolue égale à 1. Ce n'est pas un hasard puisqu'une transformation orthogonale préserve les distances. On ne peut donc avoir $T(v) = \lambda v$ avec $|\lambda| \neq 1$. De plus tous les vecteurs propres de la valeur propre -1 étaient orthogonaux aux vecteurs propres de la valeur propre 1. Ici non plus ce n'est pas un hasard. Nous allons donc énoncer les propriétés particulières des transformations orthogonales en ce qui concerne la diagonalisation.

THÉORÈME 5 *Une matrice orthogonale a déterminant $+1$ ou -1.*

PREUVE : On utilise la propriété que $\det AB = \det A \det B$ et que $\det A^t = \det A$. Alors

$$\det AA^t = \det A \det A^t = (\det A)^2.$$

D'autre part $AA^t = I$, d'où $\det AA^t = 1$. Donc $(\det A)^2 = 1$, i.e. $\det A = \pm 1$. □

On voit qu'on a deux cas pour une matrice orthogonale :
- $\det A = 1$. Dans ce cas-ci la transformation orthogonale correspond au mouvement d'un solide ayant un point fixe. Nous allons voir que les seuls mouvements de ce type sont les rotations.
- $\det A = -1$. Dans ce cas-ci la transformation "renverse l'orientation". Un tel exemple de transformation est la symétrie par rapport à un plan. Prenez par exemple un objet dissymétrique et son image dans un miroir : vous ne pourrez jamais transporter l'objet dans l'espace pour aller le superposer à l'image initiale que vous avez observée. Les transformations orthogonales de déterminant -1 ne sont pas des mouvements du solide. Par contre on peut montrer que toute transformation orthogonale de déterminant -1 peut s'écrire comme composition d'une rotation et d'une symétrie par rapport à un plan.

Les propriétés suivantes seront énoncées sans preuve :

Propriétés d'une matrice orthogonale A, 3×3, avec $\det A = 1$.

1. Toutes les valeurs propres ont module égal à 1. Rappel : le module d'un nombre complexe $\lambda = a + ib$ est $|\lambda| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
2. La matrice A est toujours diagonalisable et admet une base orthonormale de vecteurs propres. Mais si les valeurs propres sont complexes alors les vecteurs propres correspondants sont aussi complexes.
3. Si on a 3 valeurs propres réelles, alors ces valeurs propres sont, soit $1, 1, 1$, auquel cas la matrice A est la matrice identité, soit $1, -1, -1$. On vérifie facilement dans ce cas (identique à l'exemple traité ci-dessus) que la transformation est une symétrie par rapport à la droite qui a la direction du vecteur propre de $+1$. (On peut aussi visualiser la transformation comme une rotation d'angle π autour de l'axe porté par cette droite.)
4. Le polynôme caractéristique, $\det(\lambda I - A)$, est de degré 3. Il admet donc toujours au moins une racine réelle λ_1 et on sait que $\lambda_1 = \pm 1$. S'il admet exactement une racine réelle, alors cette racine doit être égale à 1. En effet les deux autres racines complexes doivent être deux nombres complexes conjugués : $\lambda = a + ib$ et $\overline{\lambda} = a - ib$. Alors $\lambda\overline{\lambda} = a^2 + b^2 > 0$. Comme $\det A = 1$ et que le déterminant de A est égal au produit des valeurs propres $\det A = \lambda_1 \lambda \overline{\lambda} = \lambda_1 (a^2 + b^2) = 1$. On en déduit $\lambda_1 = 1$ et $a^2 + b^2 = 1$. On peut alors poser
$$\begin{cases} a = \cos\theta \\ b = \sin\theta \end{cases}$$

pour $\theta \in [0, 2\pi)$. Soit v un vecteur propre (complexe) de λ. Alors $\bar{v}$, le vecteur conjugué de v est un vecteur propre complexe de $\bar{\lambda}$. On va remplacer les deux vecteurs complexes v et $\bar{v}$ par deux vecteurs réels v_2 et v_3 qui engendrent le même sous-espace de $\mathbb{C}^3$. Posons $v_2 = \mathrm{Re}(v)$ le vecteur dont les composantes sont les parties réelles des composantes de v. De même on pose $v_3 = -\mathrm{Im}(v) = \mathrm{Im}(\bar{v})$ le vecteur dont les composantes sont les parties imaginaires des composantes de $\bar{v}$. On a

$$v = v_2 - iv_3, \qquad \bar{v} = v_2 + iv_3.$$

Donc

$$v_2 = \frac{1}{2}(v + \bar{v}), \qquad v_3 = \frac{1}{2i}(\bar{v} - v).$$

Comme

$$T(v) = \lambda v = (a + ib)(v_2 - iv_3)$$

et

$$T(v) = T(v_2) - iT(v_3),$$

en égalant partie réelle et partie imaginaire, on a

$$T(v_2) = av_2 + bv_3, \qquad T(v_3) = -bv_2 + av_3.$$

On reconnaît ici une rotation d'angle θ dans le plan engendré par v_2 et v_3. Soit v_1 un vecteur propre de la valeur propre 1. On affirme sans preuve que v_1, v_2 et v_3 sont orthogonaux et que v_2 et v_3 sont de même longueur (ceci venait du fait que v et $\bar{v}$ sont orthogonaux car vecteurs propres de valeurs propres distinctes). On divise v_1, v_2 et v_3 par leur longueur pour obtenir une base othonormale

$$\mathcal{B} = \{w_1 = \frac{v_1}{|v_1|}, w_2 = \frac{v_2}{|v_2|}, w_3 = \frac{v_3}{|v_3|}\}.$$

La matrice de T dans cette base est

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

C'est la matrice d'une rotation d'angle θ autour de l'axe porté par le vecteur w_1.

Le cas (3) est devenu un cas particulier du cas (4) : c'est le cas où $b = \sin\theta = 0$. C'est donc soit l'identité si $\theta = 0$, soit la rotation d'angle π. On a montré que

THÉORÈME 6 *Une transformation orthogonale dont la matrice* A *a déterminant 1 est la matrice d'une rotation dans l'espace dont l'axe de rotation est porté par un vecteur propre de la valeur propre 1.*

Calcul pratique des valeurs propres : ce calcul devient vite fastidieux pour une matrice orthogonale. En effet, comme les colonnes d'une matrice orthogonale forment une base orthonormale de l'espace, ce sont souvent des matrices dont les coefficients sont compliqués. On peut être astucieux pour se simplifier les calculs.

– On commence par calculer $\det A$. Si $\det A = 1$ on est sûrs que 1 est une des valeurs propres. Si $\det A = -1$ on est sûrs que -1 est une valeur propre.
– Il reste à trouver les deux autres valeurs propres. Elles sont nécessairement de la forme $\lambda = a + ib$ et $\overline{\lambda} = a - ib$ avec $a^2 + b^2 = 1$. Le cas $b = 0$ correspond au cas de 3 valeurs propres réelles. Pour trouver a et b on utilise que la trace de la matrice est égale à la somme des 3 valeurs propres. Rappelons que la trace d'une matrice $A = (a_{ij})$ est égale à la somme des éléments sur sa diagonale
$$\mathrm{tr}A = a_{11} + a_{22} + a_{33}.$$
De plus la trace est invariante si on change de base : $\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}(P^{-1}AP)$. On peut supposer que $P^{-1}AP$ est la matrice diagonale associée à A. Ses entrées sur la diagonale sont les valeurs propres. Prenons le cas $\det A = 1$. Alors
$$\mathrm{tr}A = 1 + (a + ib) + (a - ib) = 1 + 2a.$$
Donc l'angle de rotation θ a la propriété que $\cos\theta = a = \frac{\mathrm{tr}A-1}{2}$. Remarquons qu'on a deux solutions pour b :
$$b = \pm\sqrt{1 - a^2},$$
qui viennent du fait que $\cos\theta = \cos(-\theta)$. A ce stade on ne peut lever l'ambiguité sans faire une vérification ad hoc. En effet, étant donné une droite, on peut lui donner deux orientations. La rotation d'angle θ autour de l'axe s'effectue géométriquement avec la règle de la main droite : lorsque le pouce droit est pointé dans la direction de la droite on tourne les doigts de la main droite d'un angle θ. Si on change l'orientation de la droite la même transformation géométrique correspond à une rotation d'angle $-\theta$. On doit donc faire des essais avec par exemple le vecteur w_2 pour vérifier si $T(w_2) = aw_2 + \sqrt{1 - a^2}w_3$, auquel cas on prend $b = \sqrt{1 - a^2}$ ou bien $T(w_2) = aw_2 - \sqrt{1 - a^2}w_3$, auquel cas on prend $b = -\sqrt{1 - a^2}$.

1.5 Les mouvements d'un solide dans l'espace

On a maintenant tous les éléments pour les décrire. Considérons un point fixe P du solide. On peut considérer tout mouvement du solide comme la composition d'une translation amenant le point P à la position (x_0, y_0, z_0) dans l'espace avec un mouvement du solide dont P est un point fixe.

Un tel mouvement doit conserver la forme du solide. Il doit donc préserver les distances et les angles et également préserver l'orientation. C'est une transformation linéaire de la forme :

$$T(v) = Av$$

où A est une matrice 3×3 orthogonale. La transformation préserve l'orientation, i.e. $\det A = 1$.

1.6 Les changements de base

Rappel sur la matrice d'une transformation linéaire dans une base $\mathcal{B}$. On considère une transformation linéaire $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. On ne s'intéressera qu'aux cas $n = 2$ ou $n = 3$. Soit $\mathcal{B}$ une base de l'espace. On représente un vecteur v à l'aide de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ par une matrice colonne $[v]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ si $n = 2$ et $[v]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ si $n = 3$. Limitons nous maintenant au cas $n = 3$. Si $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$, alors l'écriture $[v]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ signifie $v = xv_1 + yv_2 + zv_3$. Soit A la matrice de la transformation T dans la base $\mathcal{B}$. On écrira $A = [T]_\mathcal{B}$. Les coordonnées de $T(v)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont obtenues comme le produit matriciel

$$[T(v)]_\mathcal{B} = A[v]_\mathcal{B} = [T]_\mathcal{B}[v]_\mathcal{B}.$$

Comme dans le cas de la base standard on a que les colonnes de A sont données par les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ des images par T des vecteurs de $\mathcal{B}$.

Rappel sur les changements de base et les matrices de changement de base.

1. Si on a deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ de l'espace alors

   $$[v]_{\mathcal{B}_2} = P[v]_{\mathcal{B}_1}$$

   où P est la matrice de changement de base de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$.

2. Les colonnes de la matrice P sont les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}_1$ écrits dans la base $\mathcal{B}_2$. Dans le cas particulier où les deux bases sont orthonormales (i.e. les vecteurs sont perpendiculaires et de longueur 1), alors la matrice P est orthogonale.

3. Si Q est la matrice de changement de base de $\mathcal{B}_2$ à $\mathcal{B}_1$, alors $Q = P^{-1}$. Les colonnes de la matrice Q sont les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}_2$ écrits dans la base $\mathcal{B}_1$. Dans le cas particulier où les deux bases sont orthonormales alors $Q = P^t$, donc les colonnes de Q sont les rangées de P.

THÉORÈME 7 *Soit* T *une transformation linéaire et soient* $\mathcal{B}_1$ *et* $\mathcal{B}_2$ *deux bases de l'espace. Soit* P *la matrice de changement de base de* $\mathcal{B}_1$ *à* $\mathcal{B}_2$*. Alors*

$$[T]_{\mathcal{B}_2} = P[T]_{\mathcal{B}_1}P^{-1}.$$

PREUVE : Soit v un vecteur. Alors on a d'une part :

$$[T(v)]_{\mathcal{B}_2} = [T]_{\mathcal{B}_2}[v]_{\mathcal{B}_2}.$$

D'autre part

$$\begin{aligned} [T(v)]_{\mathcal{B}_2} &= P[T(v)]_{\mathcal{B}_1} \\ &= P([T]_{\mathcal{B}_1}[v]_{\mathcal{B}_1}) \\ &= P[T]_{\mathcal{B}_1}(P^{-1}[v]_{\mathcal{B}_2}) \\ &= (P[T]_{\mathcal{B}_1}P^{-1})[v]_{\mathcal{B}_2}, \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Jouer avec plusieurs bases permet de résoudre des problèmes difficiles. Nous avons vu comment la diagonalisation nous permettait de comprendre la structure d'une transformation linéaire. Nous pouvons aussi résoudre le problème inverse et reconstruire la matrice d'une transformation dont on connaît les propriétés. Illustrons-le sur un exemple :

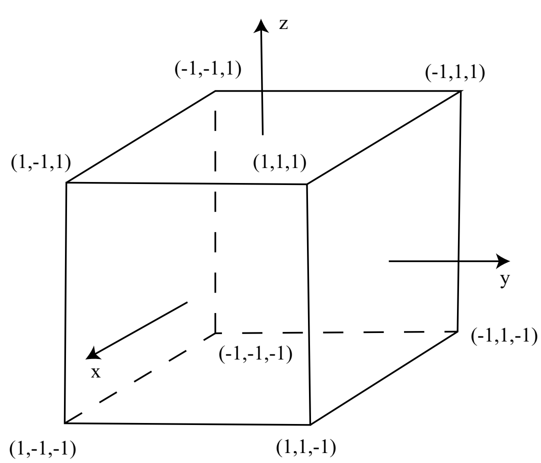

FIG. 1.2 – Le cube de l'exemple

Exemple : On se donne le cube dont les 8 sommets sont situés aux points $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ (Figure 1.2). On cherche les matrices des deux rotations d'angle $\pm\frac{2\pi}{3}$ dont l'axe est la droite joignant les sommets $(-1,-1,-1)$ et $(1,1,1)$: remarquons que ces deux rotations envoient le cube sur le cube.

Pour cela on commence par choisir une base $\mathcal{B}$ bien adaptée au problème. La direction du premier vecteur sera donnée par la direction de la droite, soit la direction du vecteur $w_1 = (2,2,2)$. Pour les deux autres vecteurs de la base w_2 et w_3 nous prendrons deux vecteurs orthogonaux à w_1. Leurs coordonnées (x,y,z) satisferont donc $x+y+z=0$. Un premier vecteur est donné par exemple par $w_2 = (-1,0,1)$. On voudrait bien que le troisième vecteur w_3 soit aussi perpendiculaire à w_2. Ses coordonnées doivent satisfaire

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-z=0, \end{cases}$$

et une solution est donc donnée par $w_3 = (1,-2,1)$. Maintenant on travaille avec des bases orthonormales. Donc on divise chacun des vecteurs par sa longueur : $v_i = \frac{w_i}{||w_i||}$. La base cherchée est :

$$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_2\} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \right\}.$$

Dans cette base les deux transformations sont des rotations d'axe de rotation donné par le premier vecteur de la base et d'angle $\pm\frac{2\pi}{3}$. Remarquons que $\cos(-\frac{2\pi}{3}) = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ et $\sin(-\frac{2\pi}{3}) = -\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Les deux rotations qui sont des transformations linéaires $T_\pm$ ont donc comme matrice

$$[T_\pm]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{2\pi}{3} & \mp\sin\frac{2\pi}{3} \\ 0 & \pm\sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \mp\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \pm\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Cherchons maintenant la matrice de $T_\pm$ dans la base canonique $\mathcal{C}$. En appliquant le théorème précédent on voit que cette matrice doit être donnée par

$$[T_\pm]_\mathcal{C} = P^{-1}[T_\pm]_\mathcal{B}P,$$

où P est la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$. Alors P^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$. Donc les colonnes de P^{-1} sont les vecteurs de $\mathcal{B}$ écrits dans la base $\mathcal{C}$. Ce sont précisément les vecteurs colonnes donnant les coordonnées de v_1, v_2, v_3. Comme $P^{-1} = P^t$ on a

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

D'où

$$[T_+]_\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad [T_-]_\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On voit bien que la première transformation est la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ autour de l'axe de vecteur directeur v_1 (Figure 1.2). Elle fait la permutation des trois sommets du cube $(1,1,-1) \mapsto (-1,1,1) \mapsto (1,-1,1)$. De même on a aussi la permutation des trois autres sommets $(-1,-1,1) \mapsto (1,-1,-1) \mapsto (-1,1,-1)$, alors que les deux sommets $(1,1,1)$ et $(-1,-1,-1)$ restent fixes dans la rotation.

Remarque : $[T_+]_{\mathcal{C}}$ est orthogonale et $T_- = T_+^{-1}$. Donc $[T_-]_{\mathcal{C}} = [T_-]_{\mathcal{C}} = [T_+]^t_{\mathcal{C}}$.

1.7 Les différents repères associés à un robot

Regardons le robot de la Figure 1.1. On se donne 7 repères $R_0, \dots, R_6$. Pour chaque repère on se donne les directions des axes x_i, y_i, z_i, $i = 0, \dots, 6$, par des bases $\mathcal{B}_0, \dots, \mathcal{B}_6$. Le repère $\mathcal{B}_0$ est le repère de base. Il est centré en $P_0 = (0,0,0)$. Le repère R_i est centré en P_i (Figure 1.3).

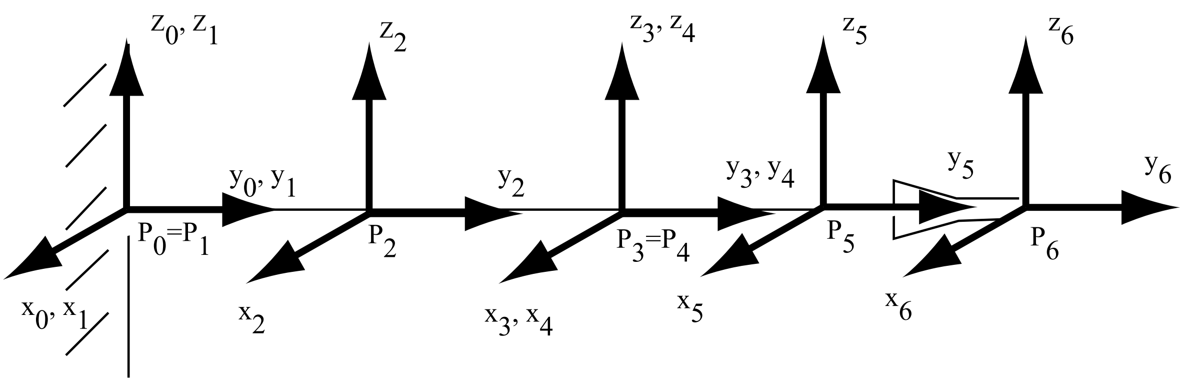

FIG. 1.3 – Les différents repères du robot

Voici les mouvements du robot

i) Le premier mouvement est une rotation T_1 d'angle θ_1 autour de l'axe y_0. Dans le repère $\mathcal{B}_0$ elle a donc pour matrice

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & 0 & -\sin\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta_1 & 0 & \cos\theta_1 \end{pmatrix}.$$

Le deuxième repère est un repère mobile $\mathcal{B}_1$, donné par l'image de $\mathcal{B}_0$ par T_1.

ii) Le deuxième mouvement est une rotation T_2 d'angle θ_2 autour de l'axe x_2, de matrice

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_1 & -\sin\theta_2 \\ 0 & \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix}.$$

iii) Le troisième mouvement est, par exemple, une rotation T_3 d'angle θ_3 autour de l'axe z_3 de matrice

$$A_3 = \begin{pmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En fait il est difficile de trancher simplement au vu de la Figure 1.1 s'il s'agit d'une rotation autour de l'axe x_3 ou autour de l'axe z_3. Ce qui à l'œil peut paraître comme une rotation autour de l'axe x_3 ou plutôt comme une rotation autour de l'axe z_3 dépend de la rotation T_1 que l'on a effectuée.

iv) Le quatrième mouvement est une rotation T_4 d'angle θ_4 autour de l'axe y_4 de matrice

$$A_4 = \begin{pmatrix} \cos\theta_4 & 0 & -\sin\theta_4 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta_4 & 0 & \cos\theta_4 \end{pmatrix}.$$

v) Le cinquième mouvement est une rotation T_5 d'angle θ_5 autour de l'axe x_5 de matrice

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_5 & -\sin\theta_5 \\ 0 & \sin\theta_5 & \cos\theta_5 \end{pmatrix}.$$

vi) Le sixième mouvement est une rotation T_6 d'angle θ_6 autour de l'axe y_6 de matrice

$$A_6 = \begin{pmatrix} \cos\theta_6 & 0 & -\sin\theta_6 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta_6 & 0 & \cos\theta_6 \end{pmatrix}.$$

On veut calculer la position d'un point du robot par rapport aux différents repères. Pour cela on commence dans un premier temps par calculer comment sont modifiées les directions quand on passe d'un repère à un autre. Ceci permet de trouver l'"orientation" de la base $\mathcal{B}_{i+k}$ dans la base $\mathcal{B}_i$. Les colonnes de la matrice A_i donnent les coordonnées des vecteurs de la base $\mathcal{B}_{i+1}$ dans la base $\mathcal{B}_i$. C'est donc la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_{i+1}$ à la base $\mathcal{B}_i$. Pour cette raison on la notera M_i^{i+1}.

Matrice de changement de base de la base $\mathcal{B}_{i+k}$ à la base $\mathcal{B}_i$. On en déduit qu'elle est donnée par

$$M_i^{i+k} = M_i^{i+1} M_{i+1}^{i+2} \dots M_{i+k-1}^{i+k}.$$

Soit Q un point de l'espace. Préciser sa position dans le repère R_i c'est se donner le vecteur $\overrightarrow{P_iQ}$ dans la base $\mathcal{B}_i$, i.e $[\overrightarrow{P_iQ}]_{\mathcal{B}_i}$. Alors sa position dans le repère R_{i-1} est donnée par

$$\begin{aligned} [\overrightarrow{P_{i-1}Q}]_{\mathcal{B}_{i-1}} &= [\overrightarrow{P_{i-1}P_i}]_{\mathcal{B}_{i-1}} + [\overrightarrow{P_iQ}]_{\mathcal{B}_{i-1}} \\ &= [\overrightarrow{P_{i-1}P_i}]_{\mathcal{B}_{i-1}} + M_{i-1}^i [\overrightarrow{P_iQ}]_{\mathcal{B}_i}. \end{aligned}$$

On va utiliser ceci et écrire chacun des changements pour $i = 1, \dots, 6$. On en déduira la position de l'extrémité du robot dans l'espace et son orientation dans la base $\mathcal{B}_0$ sachant qu'on a effectué dans l'ordre 6 rotations d'angles respectifs $\theta_1, \dots, \theta_6$. Supposons que l'on connaisse la position de Q dans le repère R_6 à savoir $[\overrightarrow{P_6Q}]_{\mathcal{B}_6}$:

– Soit l_4 la longueur de la pince. Alors

$$\begin{aligned}[\overrightarrow{P_5Q}]_{\mathcal{B}_5} &= [\overrightarrow{P_5P_6}]_{\mathcal{B}_5} + [\overrightarrow{P_6Q}]_{\mathcal{B}_5} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ l_4 \\ 0 \end{pmatrix} + M_5^6[\overrightarrow{P_6Q}]_{\mathcal{B}_6}.\end{aligned}$$

– Soit l_3 la longueur du 3e bras de robot. Alors

$$\begin{aligned}[\overrightarrow{P_4Q}]_{\mathcal{B}_4} &= [\overrightarrow{P_4P_5}]_{\mathcal{B}_4} + [\overrightarrow{P_5Q}]_{\mathcal{B}_4} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ l_3 \\ 0 \end{pmatrix} + M_4^5\left(\begin{pmatrix} 0 \\ l_4 \\ 0 \end{pmatrix} + M_5^6[\overrightarrow{P_6Q}]_{\mathcal{B}_6}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ l_3 \\ 0 \end{pmatrix} + M_4^5\begin{pmatrix} 0 \\ l_4 \\ 0 \end{pmatrix} + M_4^6[\overrightarrow{P_6Q}]_{\mathcal{B}_6}.\end{aligned}$$

– Dans le repère R_3 : On a $P_3 = P_4$. Donc.

$$\begin{aligned}[\overrightarrow{P_3Q}]_{\mathcal{B}_3} &= [\overrightarrow{P_4Q}]_{\mathcal{B}_3} = M_3^4\left(\begin{pmatrix} 0 \\ l_3 \\ 0 \end{pmatrix} + M_4^5\begin{pmatrix} 0 \\ l_4 \\ 0 \end{pmatrix} + M_4^6[\overrightarrow{P_6Q}]_{\mathcal{B}_6}\right) \\ &= M_3^4\begin{pmatrix} 0 \\ l_3 \\ 0 \end{pmatrix} + M_3^5\begin{pmatrix} 0 \\ l_4 \\ 0 \end{pmatrix} + M_3^6[\overrightarrow{P_6Q}]_{\mathcal{B}_6}.\end{aligned}$$

– Soit l_2 la longueur du 2e bras de robot. Alors

$$\begin{aligned}[\overrightarrow{P_2Q}]_{\mathcal{B}_2} &= [\overrightarrow{P_2P_3}]_{\mathcal{B}_2} + [\overrightarrow{P_3Q}]_{\mathcal{B}_2} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ l_2 \\ 0 \end{pmatrix} + M_2^4\begin{pmatrix} 0 \\ l_3 \\ 0 \end{pmatrix} + M_2^5\begin{pmatrix} 0 \\ l_4 \\ 0 \end{pmatrix} + M_2^6[\overrightarrow{P_6Q}]_{\mathcal{B}_6}.\end{aligned}$$

– Soit l_1 la longueur du premier bras de robot. Alors

$$\begin{aligned}[\overrightarrow{P_1Q}]_{\mathcal{B}_1} &= [\overrightarrow{P_1P_2}]_{\mathcal{B}_1} + [\overrightarrow{P_2Q}]_{\mathcal{B}_1} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ l_1 \\ 0 \end{pmatrix} + M_1^2\begin{pmatrix} 0 \\ l_2 \\ 0 \end{pmatrix} + M_1^4\begin{pmatrix} 0 \\ l_3 \\ 0 \end{pmatrix} + M_1^5\begin{pmatrix} 0 \\ l_4 \\ 0 \end{pmatrix} + M_1^6[\overrightarrow{P_6Q}]_{\mathcal{B}_6}.\end{aligned}$$

– Finalement dans le repère fixe sur le mur on a :

$$\begin{aligned}[\overrightarrow{P_0Q}]_{\mathcal{B}_0} &= [\overrightarrow{P_0P_1}]_{\mathcal{B}_0} + [\overrightarrow{P_1Q}]_{\mathcal{B}_0} \\ &= M_0^1\begin{pmatrix} 0 \\ l_1 \\ 0 \end{pmatrix} + M_0^2\begin{pmatrix} 0 \\ l_2 \\ 0 \end{pmatrix} + M_0^4\begin{pmatrix} 0 \\ l_3 \\ 0 \end{pmatrix} + M_0^5\begin{pmatrix} 0 \\ l_4 \\ 0 \end{pmatrix} + M_0^6[\overrightarrow{P_6Q}]_{\mathcal{B}_6}.\end{aligned}$$

Applications :

1. Le bras canadien pour la station spatiale internationale. Au départ il était fixé sur la station. On est maintenant en train d'ajouter des rails pour qu'il puisse se promener le long de la station. Ceci facilite le travail des astronautes lors de l'assemblage de nouveaux modules ou lors de réparations.
2. Les robots utilisés en chirurgie. Ils permettent des chirugies non invasives car on peut les insérer par une fente minuscule et les manipuler de l'extérieur du corps. Ils ont beaucoup de très petits bras près de l'extrémité du robot pour permettre beaucoup de petits mouvements dans une région très petite.

1.8 Exercices

1. Calculer la matrice de la rotation d'angle θ dans le plan pour la base standard $\{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$:

(a) utiliser que les colonnes de A sont les coordonnées des images des vecteurs e_1 et e_2 ;

(b) Soit $z = x + iy$. Faire tourner le vecteur (x,y) d'un angle θ revient à faire l'opération $z \mapsto e^{i\theta}z$.

2. Si on compose deux transformations linéaires de matrices respectives A_1 et A_2 alors la matrice de $T_1 \circ T_2$ est A_1A_2. On travaille avec $n = 2$.

(a) Vérifier que la composition d'une rotation d'angle θ_1 avec une rotation d'angle θ_2 est une rotation d'angle $\theta_1 + \theta_2$.

(b) Vérifier que le déterminant de la matrice d'une rotation est égal à 1.

(c) Vérifier que la matrice inverse de la matrice A d'une rotation est la matrice A^t où A^t est la matrice transposée de la matrice A (i.e. $A^t_{ij} = A_{ji}$).

3. On donne les matrices orthogonales suivantes avec $\det A = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Pour chacune donner la direction de l'axe de rotation et calculer l'angle de rotation (au signe près).

4. Montrer que le produit de deux matrices orthogonales A_1 et A_2 telle que $\det A_1 = \det A_2 = 1$ est encore une matrice orthogonale telle que $\det A_1A_2 = 1$. En conclure que la composition de deux rotations dans l'espace est encore une rotation dans l'espace (même si les deux axes de rotation ne sont pas les mêmes !).

5. On se donne une rotation d'angle $+\pi/4$ autour de l'axe v_1 dans la base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ où $v_1 = (1/3, 2/3, 2/3)$, $v_2 = (2/3, -2/3, 1/3)$ et $v_3 = (2/3, 1/3, -2/3)$. Donner la matrice de cette rotation dans la base standard.

6. Montrer que la composition de deux symétries par rapport à deux plans passant par l'origine est une rotation autour d'un axe passant par l'origine. Vérifier que cet axe est la droite d'intersection des deux plans.

7. On se donne le robot suivant (Figure 1.4) dans un plan vertical : au bout du 2e bras se trouve une pince perpendiculaire au plan de mouvement du robot et actionnée par une 3e rotation (nous ignorerons cette 3e rotation). On suppose que les deux bras de robot ont la même longueur l.

(a) Soit Q l'extrémité du 2e bras de robot. Calculer la position de Q si le premier bras a effectué une rotation d'angle θ_1 et le deuxième bras une rotation d'angle θ_2.

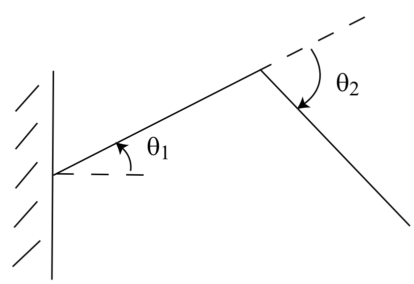

FIG. 1.4 – Le robot de l'exercice 7 i).

(b) On suppose maintenant que le robot est monté sur un rail vertical (Figure 1.5). Calculer la position de Q si on a translaté le robot d'une hauteur h, si le premier bras a effectué une rotation d'angle θ_1 et le deuxième bras une rotation d'angle θ_2.

8. On se donne un robot dans un plan attaché à un point fixe et muni de deux bras de longueur l_1 et l_2. Le premier bras est attaché au point fixe et peut effecteur des rotations autour de ce point. Le deuxième bras est attaché à l'extrémité du premier et peut pivoter autour du point d'attache. Déterminer l'ensemble des positions atteignables par l'extrémité du deuxième bras de robot suivant les valeurs de l_1 et l_2.

9. On se donne un robot attaché à un mur et muni de deux bras de longueur l_1 et l_2 avec $l_2 < l_1$. Le premier bras est attaché au mur par un joint universel et les deux bras sont reliés entre eux par un joint universel. Déterminer l'ensemble des positions atteignables par l'extrémité du deuxième bras de robot.

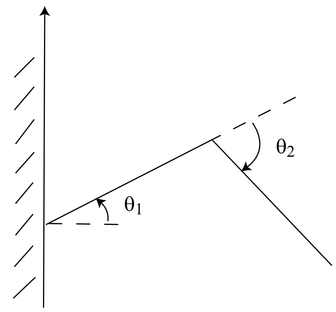

FIG. 1.5 – Le robot de l'exercice 7 ii) bougeant le long du mur sur un rail vertical.

10. Essayer d'imaginer un système de manettes permettant de contrôler les 6 mouvements d'un robot.

11. Lorsqu'ils veulent faire des observations les astronomes doivent orienter leur télescope. La base du télescope est fixe.

(a) Montrer que deux rotations indépendantes sont suffisantes pour pointer le télescope dans n'importe quelle direction.

(b) Les astronomes ont une autre contrainte quand ils veulent observer des objets célestes très éloignés et peu lumineux : ils doivent pouvoir faire une observation prolongée ou encore prendre une photo étalée sur plusieurs heures. Or la Terre tourne pendant ce temps. Donc le télescope doit pouvoir bouger pendant ce temps pour rester aligné avec l'objet céleste. Voici comment le système fonctionne : on installe un axe parfaitement aligné dans l'axe de la Terre autour duquel on a un premier mouvement de rotation : on appelle cet axe le premier axe (Figure 1.6). Le télescope lui même est aligné sur un axe transverse au premier : à l'aide d'une deuxième rotation on peut changer l'angle entre l'axe du télescope et le premier axe. On peut ainsi à l'aide des deux mouvements de rotation aligner le télescope sur l'objet désiré. Montrer qu'on peut garder le télescope aligné sur l'objet céleste en utilisant une rotation uniforme autour du premier axe seulement.

12. Imaginer des problèmes pour un ingénieur. Par exemple :

- Il existe plusieurs suites de mouvements qui amènent le robot à sa position finale. Laquelle est la meilleure ? Certains "petits" mouvements conduisent à de "grands" déplacements de la pince, alors que d'autres "grands" mouvements conduisent à de "petits" déplacements de la pince. Ces derniers sont préférables lorsqu'on veut faire effectuer au robot du travail de précision, ce qui est le cas par exemple pour un robot en chirurgie.
- On peut ajouter des bras de robot supplémentaires et augmenter le nombre de mouvements possibles pour permettre au robot de contourner des

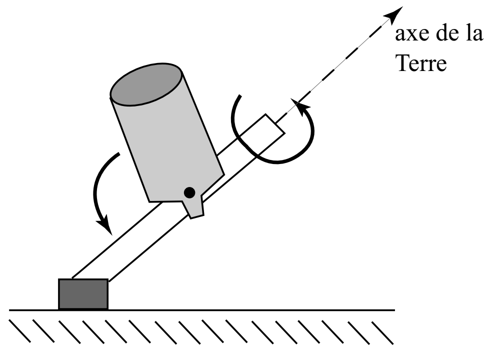

FIG. 1.6 – Les deux rotations permettant d'aligner un télescope

obstacles. Quel est l'effet d'ajouter des morceaux et d'augmenter le nombre de mouvements possibles ?
- Quel est l'effet de changer la longueur des différents bras ?
- Le problème inverse (difficile !) : étant donné la position finale de la pince du robot, donner une suite de mouvements amenant la pince à cette position. Pour répondre à la question on doit résoudre un système d'équations non linéaires.

Bibliographie

[1] P. Coiffet, *Les robots, Tome 1, Modélisation et commande*, Hermès Publishing, 1986.