Université de Montréal **MAT6240**
Département de Math. et Stat. **Evaluation des produits dérivés**

DEVOIR II

Le devoir doit être remis le 12 mars.

Question 1

Marché fini

Soit $S = (S_t^0, S_t^d)$ un marché fini avec $t = 0, 1, 2, \ldots, T$ défini dans l'espace $(\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_M\}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Soient θ_t, V_t^θ, G_t^θ, $\overline{V}_t^\theta$, $\overline{G}_t^\theta$ tels que définis dans le cours. Soient $C \subset \mathbb{R}^M$ définis par

$$C := \{(x_1, \ldots, x_M) \in \mathbb{R}^M \,|\, x_j \geq 0 \,, \quad et \qquad x_j > 0 \quad for \qquad some \qquad j\} \,,$$

et

$$L := \{\overline{G}_t^\theta \in \mathbb{R}^M \,|\, \theta \qquad previsible\} \,.$$

1. Expliquez comment une variable aléatoire dans $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un vecteur dans $\mathbb{R}^M$ et démontrez que si le marché est viable alors $\overline{G}_t^\theta \notin C$ pour tout processus θ prévisible.

2. Argumentez pourquoi dans un marché viable, le sous-espace linéaire L et tel que $L \cap C = \emptyset$.

3. Utilisez le théorème de séparation pour démontrer que dans un marché viable il existe une mesure de probabilité $\mathbb{Q} \equiv \mathbb{P}$ tel que $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\overline{G}_t^\theta] = 0$ pour tout processus θ prévisible (i.e. construisez cette mesure de probabilité).

4. Comment pourriez vous montrer que cette mesure $\mathbb{Q}$ est une mesure équivalente martingale?

Question 2

Lois infinimment divisibles

1. Soit une variable aléatoire infinimment divisible avec triplet (a, b, ν). Pour un $\epsilon > 1$, on définit une nouvelle mesure par

$$\nu_\epsilon(dx) := \mathbb{I}_{\{x>\epsilon\}}\nu(dx) \ .$$

   Montrez que (a, b, ν_ϵ) définit une nouvelle loi infinimment divisible et identifiez-la.

2. Soit X une variable aléatoire Poisson composé compensé, i.e.

$$X = \sum_{j=0}^{N} \xi_j - \lambda\mu \ ,$$

   où N est suit une loi Poisson de paramètre λ et ξ_i ce sont i.i.d. avec loi de répartition F tel que $\mathbb{E}[\xi_i] = \mu < \infty$. Montrez que son exposant characteristique est donné par

$$\mathbb{E}\left[\exp(iuX)\right] = \exp\{-\lambda \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{iux} + iux)\, dF(x)\} \ ,$$

   et identifiez son triplet de Lévy (a, b, ν).

Question 3

Processus de Lévy

1. Soit X_t un processus de Poisson composé, i.e.

$$X = \sum_{j=0}^{N_t} \xi_j \ ,$$

où N_t est processus de Poisson de paramètre λ et ξ_i ce sont i.i.d. avec loi de répartition F. Identifiez son triplet de Lévy (a, b, ν).

2. Soit X_t un processus de Lévy avec triplet (a, b, ν). Pour un $\epsilon > 1$, on définit une nouvelle mesure par

$$\nu_\epsilon(dx) := \mathbb{I}_{\{x>\epsilon\}} \nu(dx) \ .$$

Montrez que a, b, ν_ϵ est un processus de Poisson composé.

3. Soit X_t un processus gamma, i.e. un processus stochastique tel que pour $t > 0$, la variable aléatoire X_t suit une loi gamma avec fonction de densité

$$f(x) = \frac{\beta^{\alpha t}}{\Gamma(\alpha t)} x^{\alpha t - 1} e^{-\beta x} \ , \quad \alpha, \beta > 0 \ , \quad x > 0 \ .$$

. Montrez que c'est un processus de Lévy et identifiez son triplet charactéristique (a, b, ν). HINT: Utilisez l'intégrale de Frullani.

4. Soit X_t un processus de Lévy avec triplet de Lévy $(a = 0, b = 0, \nu)$ où

$$\nu(dx) = \frac{c}{x^{\alpha+1}} \mathbb{I}_{\{x>0\}} \, dx \ .$$

Montrez que le processus de sauts plus grands que $\epsilon > 1$ est un processus de Poisson composé et identifiez son triplet charactéristique.