Département de mathématiques et de statistique
Université de Montréal
Théorie de Galois. Mat 3661. Examen Intra
Le 23 février 2011
Professeure: Matilde N. Lalín

NOM:

CPER:

1. Aucune documentation permise.
2. Les téléphones cellulaires doivent être éteints. Les portables ne sont pas permis.
3. Ne pas oublier d'écrire vos nom et CPER sur cette feuille.
4. Lire attentivement les questions avant de commencer à travailler.
5. **Justifier tous vos raisonnements.**
6. Continuer sur le verso de la feuille si vous avez besoin de plus d'espace.
7. Répondre à toutes les questions.
8. Le total des points de cet examen vaut 30 (il y a 3 points aditionels).

Question:	1	2	3	4	5	6	Total
Points:	5	6	5	5	5	7	33
Score:							

1. (5 points) (a) Faire une liste des polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_2[x]$ de degré ≤ 2.

   (b) Soit $p(x) = x^4 + 15x^3 + 7$. Est-ce que $p(x)$ est irréductible

   (1) sur $\mathbb{F}_2$? (2) sur $\mathbb{Q}$?

2. (6 points) Trouver les corps de décomposition K des polynômes suivants sur $\mathbb{Q}$ et donner leurs degrés. Justifier vos réponses.

   (a) $p(x) = x^6 - 8$.

   (b) $p(x) = x^6 - 32$.

3. (5 points) Soit $p(x) = x^5 + x^4 + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$.

   (a) Trouver la factorisation de $p(x)$ en facteurs premiers.

   (b) Décrire le corps de décomposition de $p(x)$ sur $\mathbb{F}_2[x]$ comme $\mathbb{F}_{2^d}$ (trouver le d).

4. (5 points) Soit $K = F(\alpha)$ pour α algébrique sur F, de degré impair. Montrer que $K = F(\alpha^2)$.

5. (5 points) Soient F, K, L des corps de caractéristique p avec $F \subset K \subset L$. Soit $\alpha \in L$ algébrique sur F. Montrer que si α est inséparable sur K, alors, α est inséparable sur F.

6. (7 points) (a) Soit $K \subset L$ une extension algébrique de corps de caractéristique p. Soit $p(x) = x^p - a \in K[x]$. Montrer que si $p(x)$ n'est pas irréductible sur $L[x]$, il se factorise comme $(x - \beta)^p$ sur $L[x]$ pour β tel que $\beta^p = a$. Piste: le polynôme $(x - \beta)^k$ est-il séparable? est-il irréductible?

   (b) Soient F un corps de caractéristique p et β algébrique sur F. Montrer que β est séparable sur F si et seulement si $F(\beta) = F(\beta^p)$.