Département de mathématiques et de statistique
Université de Montréal
Théorie de Galois. Mat 3661. Examen Intra
Le 22 février 2017. 9h30-11h20
Professeure: Matilde N. Lalín

1. Aucun document ni calculatrice ni autres instruments ne sont autorisés.
2. Les téléphones cellulaires doivent être éteints.
3. Lisez attentivement les questions avant de commencer à travailler.
4. **Justifiez tous vos raisonnements.**
5. Continuez sur le verso de la feuille si vous avez besoin de plus d'espace.
6. Répondez à toutes les questions dans les cahiers d'examen.
7. Évitez de déchirer les cahiers d'examen.

1. (6 points) Trouvez les corps de décomposition de $x^6 - 8$ sur $\mathbb{Q}$ et donnez son degré. Justifiez bien votre réponse.

2. (6 points) (a) Trouvez le polynôme minimal de $\alpha = 2\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ sur $\mathbb{Q}$. Vous pouvez vous servir du fait que
$$\cos(5\theta) = 16\cos(\theta)^5 - 20\cos(\theta)^3 + 5\cos(\theta).$$
(b) Trouvez $\mathbb{Q} \subseteq K \subset \mathbb{Q}(\alpha)$ tel que $[\mathbb{Q}(\alpha) : K] = 2$.
(c) Est-il possible de construire α avec un règle non-graduée et un compas ?

3. (6 points) (a) Faites une liste des polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_2[x]$ de degré ≤ 2.
(b) Soit $p(x) = x^4 + 17x + 3$. Est-ce que $p(x)$ est irréductible
(1) sur $\mathbb{F}_2$? (2) sur $\mathbb{Q}$?

4. (6 points) Pour chacun des polynômes suivants, déterminez le nombre de racines sur $\mathbb{F}_{81}$.
(a) $x^{80} - 1$
(b) $x^{81} - 1$
(c) $x^9 - x^3 + 1$

5. (6 points) Factorisez $\Phi_7(x^4) \in \mathbb{Q}[x]$ en des polynômes irréductibles. Piste: Quelles sont les racines ?