Théorie de Galois. Mat 3661

Non-Devoir 6. À ne pas remettre. Il est permis de s'en servir d'une calculatrice ou logiciel pour factoriser des polynômes. Les réponses seront données dans le site web du cours au plus tard le 10 avril 2019. Si vous désirez avoir les réponses avant, envoyez-moi un courriel.

Liste de formules qui seront données à l'examen final.

$$\begin{aligned}
D(x^3+px+q) &= -4p^3-27q^2\\
D(x^4+px^2+qx+r) &= 16p^4r-4p^3q^2-128p^2r^2+144pq^2r-27q^4+256r^3\\
\text{résolvente pour le degré 4 : } h(x) &= x^3-2px^2+(p^2-4r)x+q^2\\
D(x^n+px+q) &= (-1)^{n(n-1)/2}((1-n)^{n-1}p^n+n^nq^{n-1})
\end{aligned}$$

---

1. Montrez que si $x^3+ax+b \in \mathbb{F}_{p^n}[x]$ est irréductible, alors $-4a^3-27b^2$ est un carré sur $\mathbb{F}_{p^n}$.

2. Soit $f(x)$ un polynôme irréductible de degré 4 sur $\mathbb{Q}[x]$ avec discriminant D. Soit K son corps de décomposition (auquel on pense comme $K \subset \mathbb{C}$). Montrez que si $D < 0$, K ne peut pas être cyclique d'ordre 4 sur $\mathbb{Q}$. (Piste: Considérez la restriction de la conjugaison complexe sur K).

3. Déterminez le groupe de Galois des polynômes (irréductibles sur $\mathbb{Q}$) suivants. (Vous pouvez vous servir d'une calculatrice).
   (a) x^4+2x^2+x+3
   (b) $x^4+8x+12$
   (c) x^4+4x-1 (Voyez la question précedente.)

4. Déterminez le groupe de Galois de $(x^3-2)(x^3-3)$ sur $\mathbb{Q}$. Trouvez tous les sous-corps qui contiennent $\mathbb{Q}(\zeta_3)$.

5. Montrez que le polynôme $x^4+px+p \in \mathbb{Q}[x]$ avec p premier a $\mathbb{S}_4$ comme groupe de Galois si $p \neq 3, 5$, alors que le groupe de Galois est D_8 ou $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ pour $p = 3, 5$.

6. Montrez que le discriminant D d'un polynôme x^n+px+q est donné par la formule
$$(-1)^{n(n-1)/2}((1-n)^{n-1}p^n+n^nq^{n-1})$$

7. Montrez que le groupe de Galois de $x^5+x^4-4x^3-3x^2+3x+1$ sur $\mathbb{Q}$ est cyclique d'ordre 5. (Piste: Montrez que c'est le polynôme minimal de $\rho_5 = \zeta_{11}+\zeta_{11}^{-1}$.)

8. Montrez que le groupe de Galois de $x^5+20x+16$ sur $\mathbb{Q}$ est $\mathbb{A}_5$.

9. Montrez que le groupe de Galois de $x^6+24x-20$ sur $\mathbb{Q}$ est $\mathbb{A}_6$. (Attention: je n'ai pas une réponse pour laquelle je n'utilise pas l'ordinateur.)