Théorie de Galois. Mat 3661

Devoir 2. Date limite: le 6 février 2019

Pour obtenir le maximum de points, faites **5** problèmes parmi 1-8.

1. Montrez que $x^3 + x + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$ est irréductible. Soit θ une racine. Trouvez une base pour $\mathbb{F}_2[x]/(x^3 + x + 1)$ sur $\mathbb{F}_2$ et calculez les puissances de θ^n avec $n \geq 0$ en fonction de cette base.

2. Trouvez le polynôme minimal de $1 + i$ sur $\mathbb{Q}$.

3. Déterminez le degré sur $\mathbb{Q}$ de $2 + \sqrt{3}$ et de $1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$.

4. Démontrez que $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Trouver le polynôme minimal de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ sur a) $\mathbb{Q}$, b) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, c) $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$.

5. Soit F un corps de caractéristique different de 2. Soient $d_1, d_2 \in F$ tels qu'ils ne sont pas de carrés sur F. Démontrez que $[F(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}) : F] = 2$ si $d_1 d_2 = (bd_1)^2$ est un carré sur F et $= 4$ sinon.

6. Soit $F = \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ avec $\alpha_i^2 \in \mathbb{Q}$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Démontrez que $\sqrt[3]{2} \notin F$.

7. Soit $\omega_3 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$. Montrez que $\omega_3^2 \sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}(\omega_3 \sqrt[3]{2})$.

8. Donnez un exemple (avec preuve) d'une extension quadratique K/F qui n'est pas donnée par $K = F(\sqrt{\alpha})$ avec $\alpha \in F$, α non-carré.

Problèmes sugérés (à ne pas remettre) du Dummit et Foote :
13.1.5, 13.2.9, 13.2.14, 13.2.17, 13.2.18, 13.2.19, 13.2.20