Département de mathématiques et de statistique
Université de Montréal
Théorie de Galois. Mat 3661. Examen Final
Le 26 avril 2017. 9h30-12h20
Professeure: Matilde N. Lalín

1. Aucun document ni autres instruments ne sont autorisés.
2. Une calculatrice simple est permise.
3. Les téléphones cellulaires doivent être éteints.
4. Lisez attentivement les questions avant de commencer à travailler.
5. **Justifiez tous vos raisonnements.**
6. Continuez sur le verso de la feuille si vous avez besoin de plus d'espace.
7. Répondez à toutes les questions dans les cahiers d'examen.
8. Évitez de déchirer les cahiers d'examen.
9. Le total des points de cet examen vaut 30. (Il y a 6 points additionnels.)

Quelques formules:

$$\begin{aligned}
D(x^3+px+q) &= -4p^3-27q^2\\
D(x^4+px^2+qx+r) &= 16p^4r-4p^3q^2-128p^2r^2+144pq^2r-27q^4+256r^3\\
\text{résolvente pour le degré 4 : } h(x) &= x^3-2px^2+(p^2-4r)x+q^2\\
D(x^n+px+q) &= (-1)^{n(n-1)/2}((1-n)^{n-1}p^n+n^nq^{n-1})
\end{aligned}$$

Dans cet examen, $\ll$ caractériser un groupe G $\gg$ veut dire $\ll$ donner le groupe abstrait auquel G est isomorphe $\gg$.

1. (6 points) Caractérisez le groupe de Galois de $x^3 - 2$
   (a) sur $\mathbb{Q}$,
   (b) sur $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$,
   (c) sur $\mathbb{F}_3$.

2. (6 points) Soit $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ un polynôme irréductible de degré 4. Soit $h(x)$ la résolvente cubique de $f(x)$. Caractérisez $\mathrm{Gal}(f(x))$ si
   (a) $h(x) = x^3 - 3x + 1$,
   (b) $h(x) = x^3 + 3x + 1$,
   (c) $h(x) = x^3 + 2x + 3$.

3. (6 points) Soit $\zeta_{37} = e^{2\pi i/37}$ et soit $\alpha = \zeta_{37} + \zeta_{37}^{10} + \zeta_{37}^{26}$. Soit $H \leq \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{37})/\mathbb{Q})$ tel que $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\zeta_{37})^H$. Trouvez H et donnez $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$.

4. (6 points) (a) Décrivez explicitement les automorphismes et caractérisez le groupe de Galois de $f(x) = (x^2 - 2)(x^3 - 3) \in \mathbb{Q}[x]$.
   (b) Faites une liste de tous les sous-corps du corps de décomposition K qui contiennent $\mathbb{Q}(\zeta_3)$ et écrivez-les comme K^H avec $H \leq \mathrm{Gal}(f(x))$. (La liste suffit, il ne faut pas justifier plus.)
   (c) Donnez (avec justification) une tour d'extensions
   $$K_0 = \mathbb{Q} \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n = K$$
   où K est le corps de décomposition de $f(x)$ sur $\mathbb{Q}$ et K_i/K_{i-1} est une extension cyclique pour $i = 1, \ldots, n$.

5. (6 points) Soit $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ irréductible. Montrez que si $f(x)$ a des racines réelles et complexes, son groupe de Galois n'est pas abélien. (Pistes: Considérez la conjugaison complexe.)

6. (6 points) Caractérisez le groupe de Galois de $f(x) = x^5 + 6x^3 + 15x^2 + 3x + 30 \in \mathbb{Q}[x]$. Vous pouvez vous servir sans preuve du fait que $\mathrm{Disc}(f) = 3^4 \cdot 457 \cdot 73421$ (factorisation en des nombres premiers).