Théorie des nombres. Mat 3632

Devoir 1. Ne pas remettre. Les solutions seront données le 15 octobre.

1. À l'aide de l'induction mathématique, démontrer que:

   a) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

   b) $\sum_{k=1}^{n} k(k!) = (n+1)! - 1$

Solution: On vérifie facilement que chaque identité est vrai pour $n = 1$. Supposons qu'elles sont vrais pour $n \geq 1$. Alors,

a) $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2}{4}\left(n^2 + 4(n+1)\right) = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$

b) $\sum_{k=1}^{n+1} k(k!) = (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! = (n+1)!(1+n+1) - 1 = (n+2)! - 1.$

2. Démontrer le théorème du binôme: Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Solution: Par induction en n. Si $n = 1$,

$$a + b = \binom{1}{0} a + \binom{1}{1} b.$$

Supposons que le résultat est vrai pour n. Alors,

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} (a+b)\binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^k + b^{n+1} \\
&= = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n-k} b^k
\end{aligned}$$

3. Montrer que si $n \in \mathbb{N}$ alors

$$\sum_{k=0}^{n} 3^k \binom{n}{k} = 4^n$$

Solution:

$$\sum_{k=0}^{n} 3^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} 3^k 1^{n-k} \binom{n}{k} = (3+1)^n = 4^n.$$

Une autre faiçon, par induction. Le résultat est vrai si $n = 0$. Alors, supposons qu'il est vrai pour $n \geq 1$.

$$\sum_{k=0}^{n+1} 3^k \binom{n+1}{k} = 1 + \sum_{k=1}^{n} 3^k \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) + 3^{n+1}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} 3^k \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n-1} 3^{k+1} \binom{n}{k} + 3^{n+1} = 4 \sum_{k=0}^{n} 3^k \binom{n}{k} = 4^{n+1}.$$

4. Soit m et n des entiers positifs.

   a) Montrer que le produit de quatre nombres consécutifs est divisible par 24.

   b) Si $(n, 4) = 2$ et $(m, 4) = 2$, montrer que $(n + m, 4) = 4$.

   c) Montrer que $6 \mid n^3 - n$ pour chaque entier positif n.

   d) Montrer que si n est impair, alors $n^2 - 1$ est divisible par 8.

   e) Montrer que si m et n sont impairs, alors $m^2 + n^2$ est pair, mais non divisible par 4.

Solution:

a) Le produit est $m = n(n+1)(n+2)(n+3)$ avec un $n \in \mathbb{N}$. Un des facteurs est divisible par 4, et un autre facteur a reste 2 dans la division par 4, c'est-à-dire que $8 \mid m$. Un des facteurs doit être divisible by 3. Par conséquent, m est divisible par $8 \cdot 3 = 24$.

   Il est possible de résoudre le problème par induction aussi.

b) $n = 4k + 2$ et $m = 4\ell + 2$ avec quelques $k, \ell \in \mathbb{Z}$. Alors, $m + n = 4(k + \ell) + 4$, donc $4 \mid (m + n)$ et $(m + n, 4) = 4$.

c) On écrit
$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n-1)(n+1).$$
3 doit diviser un de $n-1, n, n+1$, et un (ou deux) de ces nombres est divisible par 2. Alors, $n^3 - n$ est divisible par $2 \cdot 3 = 6$.

Une autre façon d'arriver au résultat est d'écrire $(n+1)^3 - (n+1) = n^3 - n + 3(n^2 + n)$ et le prouver par induction.

d) Comme n est impair, on peut écrire $n = 4k + r$ où $r = 1$ ou 3. Alors,
$$n^2 = 16k^2 + 8rk + r^2 = 8m + 1,$$
avec $m = 2k^2 + rk$ si $r = 1$, et $m = 2k^2 + rk + 1$ si $r = 3$.

e) Comme m, n sont impairs, on trouve k, ℓ tels que $m^2 = 8k + 1$ et $n^2 = 8\ell + 1$. On a
$$m^2 + n^2 = (8k+1) + (8\ell+1) = 4(2k + 2\ell) + 2.$$

5. Si $a > 0$, $b > 0$ des entiers et $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ est un entier, prouver que $a = b$. De plus, montrer que a est alors nécessairement égal à 1 ou 2.

Solution: On a
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = c \in \mathbb{Z}.$$
Alors
$$a = abc - b = b(ac - 1) \text{ et } b = abc - a = a(bc - 1),$$
ça veut dire, $b \mid a$ and $a \mid b$. Donc $a = \pm b$, et $a = b$ puisque $a, b > 0$. Si $a = b \geq 3$ on a $0 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \frac{2}{3}$ alors $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \notin \mathbb{Z}$. Par conséquent, $a = b = 1$ ou 2.

6. Trouver le plus grand commun diviseur d des nombres 767 et 295; par suite, trouver des entiers x et y tels que $767x + 295y = d$.

Solution: Par l'algorithme d'Euclide,
$$\begin{aligned} 767 &= 295 \cdot 2 + 177 \\ 295 &= 177 \cdot 1 + 118 \\ 177 &= 118 \cdot 1 + 59 \\ 118 &= 59 \cdot 2 \end{aligned}$$
Alors, $d = 59$. On a que $59 = 177 - 118 = 177 - (295 - 177) = 177 \cdot 2 - 295 = (767 - 295 \cdot 2) \cdot 2 - 295 = 767 \cdot 2 - 295 \cdot 5$.

7. Montrer que si $(a, b) = c$, alors $(a^2, b^2) = c^2$.

Solution: On a que $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right) = 1$. Alors, $1 = \left(\frac{a^2}{c^2}, \frac{b}{c}\right) = \left(\frac{a^2}{c^2}, \frac{b^2}{c^2}\right)$, et $(a^2, b^2) = c^2$.

Une autre façon de le faire: comme $c^2 \mid a^2$ et $c^2 \mid b^2$, alors $c^2 \mid (a^2, b^2)$. Il suffit montrer que $(a^2, b^2) \mid c^2$. Soit $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $ax + by = c$. Noter que

$$ab = \frac{ab}{c} \cdot c = a^2 x \frac{b}{c} + b^2 y \frac{a}{c},$$

où $\frac{a}{c}, \frac{b}{c} \in \mathbb{Z}$. Alors,

$$c^2 = a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 = a^2x^2 + 2a^2x^2y\frac{b}{c} + 2b^2xy^2\frac{a}{c} + b^2y^2 = a^2X + b^2Y,$$

avec $X, Y \in \mathbb{Z}$. Alors, $(a^2, b^2) \mid c^2$.

8. Démontrer que si $(a, b) = 1$ et $c \mid a$, alors $(c, b) = 1$.

Solution: Si $d \mid (c, b)$ alors $d \mid c$, et $c \mid a$, alors $d \mid a$. Comme $d \mid b$, on a que $d \mid (b, a) = 1$. Alors $d = \pm 1$ et $(c, b) = 1$.

9. Trouver tous les entiers positifs n tels que $(n + 1) \mid (n^2 + 1)$.

Solution: Si $(n + 1) \mid (n^2 + 1)$ alors, $(n + 1) \mid [(n^2 + 1) - (n + 1)(n - 1)] = 2$. En conséquence, $n = 1$ si $n > 0$.

10. Démontrer qu'il n'existe pas d'entiers m et n tels que $m + n = 101$ et $(m, n) = 3$.

Solution: Si $(m, n) = 3$ alors $3 \mid (mx + ny)$ pour chaque $x, y \in \mathbb{Z}$. Puisque $3 \mid 101 = m + n$, on obtient une contradiction.

Problèmes additionels suggérés: pages 14-16: 2, 12, 14, 28.