Département de mathématiques et de statistique
Université de Montréal
Algèbre 1. Mat 2600. Examen intra 1
Le 1 novembre 2012. 13h30-15h20
Professeure: Matilde N. Lalín

NOM:

CPER:

1. Aucune documentation permise.
2. Les téléphones cellulaires doivent être éteints. Les portables ne sont pas permis.
3. Ne pas oublier d'écrire vos nom et CPER sur cette feuille.
4. Lire attentivement les questions avant de commencer à travailler.
5. **Justifier tous vos raisonnements.**
6. Continuer sur le verso de la feuille si vous avez besoin de plus d'espace.
7. Répondre à toutes les questions.
8. Le total des points de cet examen vaut 16.

Question:	1	2	3	4	Total
Points:	4	4	4	4	16
Score:					

1. (4 points) Pour deux entiers a, b poser $a \diamond b = a + b - 3$. Montrer que $(\mathbb{Z}, \diamond)$ est un groupe abélien.

Solution: Il est clair que $a \diamond b = a + b - 3 \in \mathbb{Z}$, alors l'opération est bien définie sur $\mathbb{Z}$.

Maitenant,

$$(a \diamond b) \diamond c = (a + b - 3) \diamond c = a + b - 3 + c - 3 = a + b + c - 6 = a \diamond (b + c - 3) = a \diamond (b \diamond c)$$

alors, l'opération est associative.

Le neutre est donné par 3:

$$a \diamond 3 = a + 3 - 3 = a = 3 + a - 3 = 3 \diamond a.$$

L'inverse de a est donné par $6 - a$:

$$a \diamond (6 - a) = a + 6 - a - 3 = 3 = 6 - a + a - 3 = (6 - a) \diamond a.$$

Finalement, on a que

$$a \diamond b = a + b - 3 = b + a - 3 = b \diamond a,$$

et le groupe est abélien.

2. (a) (2 points) Soit

$$D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$$

le groupe des 6 symétries du triangle. Écrire la table de multiplication de D_6.

(b) (2 points) Donner l'ordre de chaque élément de D_6.

Solution:

(a) Utiliser la relation $r^i s = sr^{3-i}$ avec $1 \leq i \leq 3$ pour trouver la table de multiplication. Par exemple, dans la position $(2, 4)$ on a $rs = sr^2$.

.	1	r	r^2	s	sr	sr^2
1	1	r	r^2	s	sr	sr^2
r	r	r^2	1	sr^2	s	sr
r^2	r^2	1	r	sr	sr^2	s
s	s	sr	sr^2	1	r	r^2
sr	sr	sr^2	s	r^2	1	r
sr^2	sr^2	s	sr	r	r^2	1

(b) $|1| = 1$, $|r| = |r^2| = 3$, car $r^2 \neq 1$ et $r^3 = 1$, $(r^2)^2 = r \neq 1$ et $(r^2)^3 = 1$.
$|s| = |sr| = |sr^2| = 2$, car $s^2 = (sr)^2 = (sr^2)^2 = 1$.

3. (a) (1 point) Écrire la permutation σ comme une composition finie de cycles à supports disjoints dans S_{14}

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\sigma(i)$	14	9	10	2	12	6	5	11	13	3	8	7	4	1

(b) (1 point) Quel est l'ordre de σ dans S_{14}? Justifier.

(c) (1 point) Écrire σ^2 comme une composition finie de cycles à supports disjoints dans S_{14}.

(d) (1 point) Donner un élément τ de S_{14} d'ordre 42. (Exprimer τ comme une composition finie de cycles à supports disjoints).

Solution:

(a) On a
$$\sigma = (1\ 14)(2\ 9\ 13\ 4)(3\ 10)(5\ 12\ 7)(8\ 11).$$

(b) L'ordre de σ est le plus petit commun multiple des longeurs des cycles, c'est-à-dire, $[2, 4, 2, 3, 2] = 12$.

(c)
$$\sigma^2 = (1\ 14)^2(2\ 9\ 13\ 4)^2(3\ 10)^2(5\ 12\ 7)^2(8\ 11)^2 = (2\ 13)(9\ 4)(5\ 7\ 12).$$

(d) Comme $42 = 6 \cdot 7$, on peut prendre un 6-cycle et un 7-cycle (parce que $42 = [6, 7]$). Par exemple,
$$\tau = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)(8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13).$$

On peut aussi prendre un 2-cycle, un 3-cycle, et un 7 cycle (parce que $42 = [2, 3, 7]$). Par exemple,
$$\tau = (1\ 2)(3\ 4\ 5)(6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12).$$

4. Soit $G = (\mathbb{Z}/20\mathbb{Z})^*$ le groupe des classes inversibles avec la multiplication.

   (a) (1 point) Donner une liste de tous les éléments de G. Quel est l'ordre de G?

   (b) (1 point) Déterminer l'inverse de $\overline{3}$ dans G.

   (c) (1 point) Quel est $|\overline{3}|$ dans G?

   (d) (1 point) Trouver $\overline{c} \in G$ tel que $\overline{c} \cdot \overline{3} = \overline{7}$.

Solution:

(a) On a

$$G = \{n \mid (n, 20) = 1\} = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{7}, \bar{9}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{17}, \overline{19}\},$$

alors, $|G| = 8$. En fait, $|G| = \varphi(20) = \varphi(4)\varphi(5) = 2 \cdot 4 = 8$.

(b)

$$\begin{aligned} 20 &= 6 \cdot 3 + 2 \\ 3 &= 1 \cdot 2 + 1 \\ 2 &= 2 \cdot 1 \end{aligned}$$

$$1 = 3 - 2 = 3 - (20 - 6 \cdot 3) = 7 \cdot 3 - 20$$

Alors, $\bar{3}^{-1} = \bar{7}$.

(c) $3^2 \equiv 9 \pmod{20}$, $3^3 \equiv 7 \pmod{20}$, $3^4 \equiv 1 \pmod{20}$. Alors, $|\bar{3}| = 4$.

(d) Comme $3^3 \equiv 7 \pmod{20}$, on a que $\bar{9} \cdot \bar{3} = \bar{7}$ et $\bar{c} = \bar{9}$.