**Algèbre. Mat 2600**

Devoir 6. Ne pas remettre. Discuté le 22 novembre.

1. Montrer que tous les sous-groupes de $Q_8$ sont normaux. Pour chaque sous-groupe, détérminer le type d'isomorphisme du quotient. *Piste*: Vous pouvez utiliser le treillis de sous-groupes de $Q_8$ à la page 69 du livre de Dummit et Foote, section 2.5.

2. Soit $D_{2n} = \langle r_n, s \mid r_n^n = s^2 = 1, r_n s = s r_n^{-1} \rangle$ et soit $k$ un nombre positif divisant $n$.

   (a) Montrer que $\left\langle r_n^k \right\rangle$ est un sous-groupe normal de $D_{2n}$.

   (b) Montrer que $D_{2n}/\left\langle r_n^k \right\rangle \simeq D_{2k}$.

3. Soient $G$ et $H$ des groupes, et soit
$$G_0 = \{(g, 1) \ : \ g \in G\}.$$

   (a) Montrer que $G_0 \simeq G$.

   (b) Montrer que $G_0$ est un sous-groupe normal de $G \times H$.

   (c) Montrer que $(G \times H)/G_0 \simeq H$.

4. Soit
$$G = D_{16} = \left\langle r, s \mid r^8 = s^2 = 1, \quad rs = sr^{-1} \right\rangle$$
(le treillis de sous-groupes est dans la page 70 de la section 2.5 du livre), et soit $\overline{G} = G/\langle r^4 \rangle$ le groupe quotient de $G$ par le sous-groupe normal engendré par $r^4$ (ce sous-groupe est le centre de $G$, alors il est normal). Rappeler que pour $g \in G$, on écrit $\overline{g}$ pour la classe d'équivalence de $g$ en $\overline{G} = G/N$, c'est-à-dire $\overline{g} = gN$.

   (a) Montrer que l'ordre de $\overline{G}$ est 8.

   (b) Écrire chaque élément de $\overline{G}$ de la forme $\overline{s}^a \overline{r}^b$ pour quelques entiers $a$ et $b$.

   (c) Trouver l'ordre de chaque élément de $\overline{G}$ écrit en (b).

   (d) Montrer que $\overline{H} = \left\langle \overline{s}, \overline{r^2} \right\rangle$ est un sous-groupe normal de $\overline{G}$ et que $\overline{H} \simeq C_2 \times C_2$. Soit $H$ le sous-groupe de $G$ correspondant à $\overline{H}$ avec le théorème de correspondance. Quelle est le type d'isomorphisme de $H$?

   (e) Trouver le centre de $\overline{G}$ est décrire le type d'isomorphisme de $\overline{G}/Z(\overline{G})$.

5. Soit $C$ un sous-groupe normal de $A$ et $D$ un sous-groupe normal de $B$. Montrer que $C \times D$ est un sous-groupe normal de $A \times B$ et que $(A \times B)/(C \times D) \simeq A/C \times B/D$.

Problèmes additionels suggérés: **3.1**: 3, 4, 5, 16, 18, 20, 27, 31, 33, 36, 39, 41 **3.2**: 1, 4, 6, 8, 11, 12, 13, 18, 19 **3.3**: 7, 8