Algèbre. Mat 2600

Devoir 5. Ne pas remettre. Discuté le 15 novembre.

1. Soit G groupe. Montrer que si $H, K \leq G$, alors $H \cap K \leq G$.

2. Soit G un groupe abélien et n un entier positif fixé. Montrer que les ensembles suivants sont tous sous-groupes de G:

   (a) $P(G,n) = \{g^n \mid g \in G\}$;

   (b) $T(G,n) = \{g \in G \mid g^n = 1\}$;

   Trouver $P(G,2)$ et $T(G,2)$ si $G = C_8 \times C_2$.

   Montrer que $T(G,2)$ n'est pas sous-groupe de D_{2n} pour $n \geq 3$.

3. Soit $n \in \mathbb{Z}$ avec $n \geq 3$. Montrer que

   (a) $Z(D_{2n}) = \{1\}$ si n impair;

   (b) $Z(D_{2n}) = \left\{1, r^k\right\}$ si $n = 2k$ pair.

4. Soit H sous-groupe d'un groupe G.

   (a) Montrer que $H \leq N_G(H)$.

   (b) Montrer que $H \leq C_G(H)$ si et seulement si H est abélien.

5. Montrer que $C_n \times C_m$ est cyclique si et seulement si $(n,m) = 1$.

6. Trouver les entiers positifs a tels que l'application

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{Z}/48\mathbb{Z} & \rightarrow & C_{36} =< x > \\ 1 & \mapsto & x^a \\ n \cdot 1 & \mapsto & x^{an} \end{array}$$

   donne un homomorphisme bien défini entre les deux groupes.

Problèmes additionels suggérés: **2.1**: 1,2,3,5,9 **2.2**: 3,5, 10,11 **2.3**:1,12,17,26 **2.4**: 6, 8 **2.5**: 2, 9a