Algèbre. Mat 2600

Devoir 4. Ne pas remettre. Discuté le 8 novembre.

1. Soit $n \geq 3$. Montrer que pour $\sigma \neq 1$ in S_n, il y a $\tau \in S_n$ tel que $\tau\sigma \neq \sigma\tau$.
2. Lesquels de ces groupes sont isomorphes? D_8, Q_8, $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
3. Soient A et B groupes, et soit G le produit direct $A\times B$. Montrer que les applications $\pi_1 : G \to A$ et $\pi_2 : G \to B$ données par $\pi_1((a,b)) = a$ et $\pi_2((a,b)) = b$ sont homomorphismes, et trouver leur noyaux.
4. Soit G un groupe. Montrer que l'application $f : G \mapsto G$ donnée par $f(g) = g^{-1}$ est un homomorphisme si et seulement si G est abélien.
5. Soit A, B groupes, prouver que $A \times B \simeq B \times A$.
6. Soit $n \in \mathbb{N}$, $\theta = \frac{2\pi}{n}$, et soit r et s les générateurs de D_{2n}.
   (a) Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ donne la rotation du plan réel par θ radians.
   (b) Montrer qu'il est possible de construire une homomorphisme $f : D_{2n} \to GL_2(\mathbb{R})$ tel que
   $$f(r) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ et } f(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
   Ici, $GL_2(\mathbb{R})$ est l'ensemble de matrices inversibles de 2×2 à coefficients réels.
   (c) Montrer que f est une monomorphisme (c'est-à-dire, injective).

Problèmes additionels suggérés: **1.5**: 1, 2 **1.6**: 6, 8, 9, 18, 20, 26