Algèbre. Mat 2600

Devoir 3. Ne pas remettre. Discuté le 25 octobre.

1. (a) Soit D_8 le groupe de symétries du carré. Soit r la rotation d'angle $\pi/2$, et soit s la réflexion par rapport à la droite passant pour l'origine et le sommet 1. Alors, $r, s \in D_8$. Montrer que
$$1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3$$
sont éléments différents de D_8.

   (b) Écrire la table de multiplication de D_8.

2. Trouver l'ordre de chaque élément de D_{12}.

3. Montrer que le groupe
$$\langle x, y \mid x^2 = y^2 = (xy)^2 = 1\rangle$$
est le groupe diédral D_4 avec $x = r$ et $y = s$.

   Piste: montrer que la dernière rélation est $xy = yx^{-1}$.

4. Trouver les entiers n tels que S_7 a un élément d'ordre n.

5. Un magicien est capable de battre 52 cartes parfaitement. Combien des battages parfaits successifs sont-ils nécéssaires pour que les cartes arrivent à la position originale?

   Piste: Il est conseillable de numerer les cartes comme $1, 2, 3, \ldots, 51, 52$. Écrire la permutation de S_{52} correspondant au battage parfait: les cartes sont séparées en deux ensemblres $1, 2, \ldots, 26$ et $27, 28, \ldots, 52$ qui sont placées alternativement d'abord 1, après 27, après 2, après 28 etc., finissant par 26 et 52. Écrire la décomposition en cycles et trouver l'ordre de la permutation.

6. Soit σ un m-cycle. Montrer que σ^i est un m-cycle si et seulement si $(i, m) = 1$.

   Piste: On peut utiliser le résultat suivant: Soit G un groupe, et soit $g \in G$ tel que $\mathrm{ord}(g) = m$. Alors, $\mathrm{ord}(g^i) = m/(m, i)$.