Algèbre. Mat 2600

Devoir 2. Ne pas remettre. Discuté le 18 octobre.

1. (a) Trouver l'ordre de chaque élément du groupe additif $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

   (b) Décrire la table de multiplication du groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^*$, et trouver l'ordre de chaque élément.

2. Soit $G = \left\{a + b\sqrt{2} \in \mathbb{R} \ : \ a, b \in \mathbb{Q}\right\}$.

   (a) Montrer que G est un groupe avec l'addition.

   (b) Montrer que $G^* = G \setminus \{0\}$ est un groupe avec la multiplication.

3. Soit $G = \{z \in \mathbb{C} \ : \ z^n = 1 \quad \text{avec } n \geq 1 \text{ quelconque}\}$.

   (a) Montrer que G est un groupe avec la multiplication (il s'appelle le groupe des unités de $\mathbb{C}$).

   (b) Montrer que G n'est pas de groupe avec l'addition.

4. Soient $x, g \in G$ avec G groupe. Montrer que $|x| = |g^{-1}xg|$. Déduire que $|ab| = |ba|$ pour tous $a, b \in G$. (Notation: $|x|$ est l'ordre de x en G.)

5. Soient A, B deux groupes. Montrer que le produit directe $A \times B$ est abélien si et seulement si A et B sont abéliens.

6. Soit x un élément d'ordre n du groupe G, montrer que les éléments $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ sont tous différents. En déduire que $|x| \leq |G|$.