Algèbre. Mat 2600

Devoir 1. Ne pas remettre. Discuté le 11 octobre.

1. (a) Soit $f : A \to B$ une fonction entre ensembles. Montrer que la relation

$$a \sim b \text{ ssi } f(a) = f(b)$$

est d'équivalence sur A.

   (b) Décrire les classes d'équivalence sur A données par les fonctions suivantes:

$$\begin{array}{rl} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} & \quad \text{tel que } f(x) = x^2 \\ f : \mathbb{N} \to \{\pm 1\} & \quad \text{tel que } f(n) = (-1)^n. \end{array}$$

2. Soit A ensemble non vide. Montrer que si $\sim$ est une relation d'équivalence sur A, alors, les classes d'équivalence de $\sim$ forment une partition de A.

3. Trouver $(792, 275)$ et l'écrire comme $792x + 275y$ avec $x, y \in \mathbb{Z}$.

4. (a) Soit $a = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_1 10 + a_0$ un nombre naturel. Montrer que $a \equiv a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 \pmod 9$.

   (b) Trouver le reste de la division de 37^{100} par 29.

5. (a) Montrer que les carrés de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ sont $\overline{0}$ et $\overline{1}$.

   (b) Montrer que si a et b sont entiers, $a^2 + b^2$ n'est jamais congru à 3 modulo 4.

6. Montrer que 1891 et 3797 sont relativement premiers et trouver l'inverse de $\overline{1891}$ dans $\mathbb{Z}/3797\mathbb{Z}$.