

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE STATISTIQUE  
UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL  
MATHÉMATIQUES DISCRÈTES. MAT 1500. EXAMEN INTRA 2  
LE 4 AVRIL 2013. 13H30-15H20  
PROFESSEURE: MATILDE N. LALÍN

1. Aucun document ni calculatrice ni autres instruments ne sont autorisés.
  2. Les téléphones cellulaires doivent être éteints.
  3. Lire attentivement les questions avant de commencer à travailler.
  4. Répondre à toutes les questions en **justifiant** vos réponses.
  5. Répondre à toutes les questions dans les cahiers d'examen.
  6. Éviter de déchirer les cahiers d'examen.
  7. Le total des points de cet examen vaut 25 (il y a 1 point additionnel).
-

1. (a) (2 points) Trouver un inverse de 7 modulo 20 en utilisant l'algorithme d'Euclide.  
(b) (1 point) Résoudre l'équation

$$7x \equiv 5 \pmod{20}.$$

**Solution:** (a) 7 a un inverse modulo 20 parce que  $\text{pgcd}(7, 20) = 1$ . Pour le trouver, on utilise l'algorithme d'Euclide

$$20 = 7 \cdot 2 + 6$$

$$7 = 6 \cdot 1 + 1$$

$$6 = 1 \cdot 6.$$

Alors, on trouve

$$\begin{aligned} 1 &= 7 - 6 \\ &= 7 - (20 - 7 \cdot 2) = 3 \cdot 7 - 20 \end{aligned}$$

Par conséquent, un inverse de 7 modulo 20 est 3. C'est-à-dire,

$$3 \cdot 7 \equiv 1 \pmod{20}.$$

(b) En multipliant par 3, on trouve,

$$3 \cdot 7x \equiv 3 \cdot 5 \pmod{20}.$$

Alors,

$$x \equiv 15 \pmod{20}.$$

2. (4 points) Trouver (avec preuve) un entier  $0 \leq k < 17$  tel que

$$4^{162} \equiv k \pmod{17}.$$

**Solution:** On trouve les congruences des premières puissances de 4 modulo 17:

$$4 \equiv 4 \pmod{17}$$

$$4^2 \equiv 16 \pmod{17}$$

$$4^3 \equiv 64 \equiv 13 \pmod{17}$$

$$4^4 \equiv 52 \equiv 1 \pmod{17}$$

$$4^5 \equiv 4 \pmod{17}.$$

On voit donc que le cycle se répète avec longueur 4. On trouve de plus que  $162 = 4 \cdot 40 + 2$ . Alors,

$$4^{162} = 4^{4 \cdot 40 + 2} = (4^4)^{40} \cdot 4^2 \equiv 1 \cdot 16 \pmod{17}.$$

Par conséquent,  $k = 16$ .

**Solution:** Comme  $\text{pgcd}(4, 17) = 1$ , et 17 est premier, on a, par le petit théorème de Fermat,

$$4^{16} \equiv 1 \pmod{17}.$$

On trouve que  $162 = 16 \cdot 10 + 2$ . Alors,

$$4^{162} = 4^{16 \cdot 10 + 2} = (4^{16})^{10} \cdot 4^2 \equiv 1 \cdot 16 \pmod{17}.$$

Par conséquent,  $k = 16$ .

**Solution:** Comme 17 est premier, on a, par le petit théorème de Fermat,

$$4^{17} \equiv 4 \pmod{17}.$$

On trouve que  $162 = 17 \cdot 9 + 9$ . Alors,

$$4^{162} = 4^{17 \cdot 9 + 9} = (4^{17})^9 4^9 \equiv 4^{9+9} \equiv 4^{17+1} \equiv 4^2 \equiv 16 \pmod{17}.$$

Par conséquent,  $k = 16$ .

**Solution:** On trouve les congruences des premières puissances de 4 modulo 17:

$$4 \equiv 4 \pmod{17}$$

$$4^2 \equiv 16 \equiv -1 \pmod{17}$$

Alors,

$$4^{162} = (4^2)^{81} \equiv (-1)^{81} \equiv -1 \equiv 16 \pmod{17}.$$

Par conséquent,  $k = 16$ .

3. Rappelons que l'alphabet français contient 20 consonnes et 6 voyelles pour un total de 26 lettres. Combien de chaînes de lettres de longueur 5 est-il possible de former avec l'alphabet français si

- (a) (1 point) chaque chaîne doit contenir exactement 1 voyelle?
- (b) (1 point) chaque chaîne doit contenir au moins 2 voyelles?
- (c) (1 point) chaque chaîne doit contenir exactement deux lettres identiques?

Pour cette question, les produits et les coefficients binomiaux peuvent être laissés tels quels. Il n'est pas nécessaire de les simplifier.

**Solution:** (a) On choisit les places pour la voyelle de 5 façons. On choisit la voyelle de 6 façons et les consonnes de  $20^4$  façons. Alors, la réponse est donné par

$$5 \cdot 6 \cdot 20^4.$$

(b) Il y a un total de  $26^5$  chaînes dont  $20^5$  avec aucune voyelle et  $5 \cdot 6 \cdot 20^4$  avec exactement une voyelle. Par conséquent, il y a

$$26^5 - 20^5 - 5 \cdot 6 \cdot 20^4$$

chaînes avec au moins deux voyelles.

Autre possibilité est de compter les chaînes avec deux voyelles, trois voyelles, quatre voyelles, et cinq voyelles.

$$\binom{5}{2} 6^2 \cdot 20^3 + \binom{5}{3} 6^3 \cdot 20^2 + \binom{5}{4} 6^4 \cdot 20 + 6^5.$$

(c) On choisit la lettre qui va se répéter de 26 façons et les places pour cette lettre de  $\binom{5}{2}$  façons. Après, on choisit les lettres pour les autres places de  $25 \cdot 24 \cdot 23$  façons, car elles ne peuvent se répéter et elles doivent être différentes de la lettre répétée. Le total est

$$\binom{5}{2} \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 = \binom{5}{2} P(26, 4).$$

4. Soit  $n$  un entier plus grand ou égal à 1.

- (a) (1 point) Combien y a-t-il de fonctions  $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ ?
- (b) (1 point) Combien y a-t-il de fonctions injectives  $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ ?
- (c) (1 point) Combien y a-t-il de fonctions surjectives  $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2\}$ ?

**Solution:** (a) Comme à chaque entier entre 1 et  $n$  il faut lui correspondre un nombre entre 1 et 3, il y a  $3^n$  fonctions.

(b) Si  $n > 3$ , il n'y a pas de fonctions injectives. Si  $n = 3$ , il y a  $3! = 6$  fonctions injectives. Si  $n = 2$  il y a  $3 \cdot 2 = 6$  fonctions injectives Si  $n = 1$  il y a 3 fonctions injectives.

(c) Supposons d'abord que  $n \geq 2$ . Il y a une fonction  $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1\}$  et une fonction  $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{2\}$ . Les autres fonctions sont surjectives. Le total de fonctions  $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2\}$  est  $2^n$ . Alors, on trouve  $2^n - 2$  fonctions surjectives. Si  $n = 1$ , il n'y a pas de fonctions surjectives.

5. (4 points) Prouver que si  $n$  est un entier plus grand ou égal à 1, alors,

$$\sum_{k=0}^n C(n, k)2^k = 3^n$$

**Solution:** On peut écrire

$$\sum_{k=0}^n C(n, k)2^k = \sum_{k=0}^n C(n, k)2^k 1^{n-k} = (2 + 1)^n = 3^n$$

par le théorème du binôme.

**Solution:** Soit  $P(n) : \sum_{k=0}^n C(n, k)2^k = 3^n$ .

1) On a  $\sum_{k=0}^1 C(1, k)2^k = C(1, 0)2^0 + C(1, 1)2^1 = 1 + 2 = 3 = 3^1$ , donc  $P(1)$  est V.

2) Supposons que  $P(n)$  est V. Alors,

$$\sum_{k=0}^{n+1} C(n+1, k)2^k = C(n+1, 0)2^0 + \sum_{k=1}^n C(n+1, k)2^k + C(n+1, n+1)2^{n+1}.$$

Par l'identité de Pascal,

$$= 1 + \sum_{k=1}^n (C(n, k) + C(n, k-1))2^k + 2^{n+1}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \sum_{k=1}^n C(n, k)2^k + \sum_{k=1}^n C(n, k-1)2^k + 2^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^n C(n, k)2^k + \sum_{k=0}^{n-1} C(n, k)2^{k+1} + 2^{n+1} \\
&= 3^n + 2 \left( \sum_{k=0}^{n-1} C(n, k)2^k + 2^n \right) \\
&= 3^n + 2 \cdot 3^n \\
&= 3^{n+1}.
\end{aligned}$$

Donc,  $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ . Par le principe de l'induction,  $P(n)$  est V pour  $n \geq 1$ .  
(On fait, c'est V pour  $n \in \mathbb{N}$ .)

6. Démontrer que

- (a) (1 point)  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$  pour tout  $n$  entier plus grand ou égal à 1.  
(b) (3 points)  $2^n < n!$  pour tout  $n$  entier plus grand ou égal à 4.

**Solution:** (a) Soit  $P(n) : 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

1) On a:  $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ , donc  $P(1)$  est V.

2) Supposons que  $P(n)$  est V. Alors,

$$1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

donc,  $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ . Pas conséquent,  $P(n)$  est V pour  $n \geq 1$  par le principe de l'induction.

(b) Soit  $P(n) : 2^n < n!$ .

1) On a  $2^4 = 16 < 24 = 4!$ , donc  $P(4)$  est V.

2) Supposons que  $P(n)$  est V. Notons que  $2 < n+1$  si  $n \geq 4$ . Alors,

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n < 2 \cdot n! \leq (n+1)n! = (n+1)!$$

donc,  $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ . Pas conséquent,  $P(n)$  est V pour  $n \geq 4$  par le principe de l'induction.

**Solution:** (a) Soit  $n$  pair, alors  $n = 2k$  avec  $k \geq 1$ . On met les nombres en des couples  $\{1, 2k\}, \{2, 2k - 1\}, \dots, \{k - 1, k + 2\}, \{k, k + 1\}$ . Observe que  $1 + 2k = 2 + (2k - 1) = \dots = (k - 1) + (k + 2) = k + (k + 1) = 2k + 1$ . Alors, la somme  $1 + 2 + \dots + n$  est égale à

$$k(2k + 1) = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Maintenant supposons que  $n$  impair et on écrit  $n = 2k - 1$  avec  $k \geq 1$ . On met les nombres en des couples  $\{1, 2k - 1\}, \{2, 2k - 2\}, \dots, \{k - 1, k + 1\}$ , et  $\{k\}$  qui reste seul. On a que  $1 + (2k - 1) = 2 + (2k - 2) = \dots = (k - 1) + (k + 1) = 2k$ . Alors, la somme  $1 + 2 + \dots + n$  est égale à

$$(k - 1)2k + k = (2(k - 1) + 1)k = (2k - 1)k = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Comment on a considéré les deux cas, on a prouvé l'identité pour  $n \geq 1$ .

Autre forme es de trouver la somme de  $2(1 + \dots + n) = (1 + n) + (2 + n - 1) + \dots + (n - 1 + 2) + (n + 1)$ . Il y a  $n$  termes et chacun est égale à  $n + 1$ . Par conséquent le total est  $n(n + 1)$ . On divise par 2 dans les deux côtés pour obtenir l'égalité.

(b) On a que  $2^4 = 16 < 24 = 4!$ . Si  $n > 4$ , on écrit

$$2^n = 2^4 \cdot 2^{n-4} = 16 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}_{n-4} < 24 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (5 + n - 5) = n!$$

On a prouvé l'inégalité pour  $n \geq 4$ .

7. On suppose que l'ensemble de tous les étudiants en mathématiques de l'UdeM proviennent de 20 pays différents. On suppose également qu'un étudiant ne peut provenir que d'un seul pays.

- (a) (3 points) Quel est le nombre minimal d'étudiants qui doivent s'inscrire au cours de mathématiques discrètes pour être certain qu'il y ait au moins 8 étudiants qui proviennent du même pays?
- (b) (2 points) On suppose qu'il y a 209 étudiants inscrits au cours et qu'au moins un étudiant de chacun des 20 pays est inscrit au cours. Montrer qu'il y a au moins deux pays avec le même nombre d'étudiants inscrits au cours.

**Solution:** (a) S'il y a  $k$  étudiants dans le cours, par le théorème généralisé des nids de pigeons, on peut être certain qu'il y a au moins  $\lceil \frac{k}{20} \rceil$  étudiants d'un même pays. On veut  $k$  minimal tel que  $\lceil \frac{k}{20} \rceil = 8$ . Alors, il faut avoir  $k = 7 \cdot 20 + 1 = 141$  étudiants.

(b) Supposons qu'il y a un nombre différent d'étudiants pour chaque pays. Donc, il y a au moins  $1 + 2 + \dots + 20$  étudiants. Par le problème 6 (a), cela donne  $\frac{20 \cdot 21}{2} = 210$

étudiants au minimum. Comme il y a 209 étudiants, il faut que deux pays aient le même nombre d'étudiants.