MAT1500–Mathématiques discrètes

Matilde N. Lalín

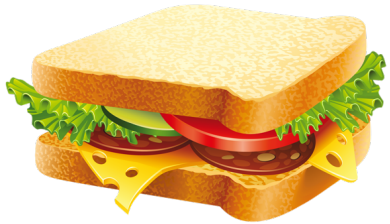
Université de Montréal
http://www.dms.umontreal.ca/~mlalin/mat1500

Le 23 novembre 2016

Université de Montréal

Le menu d'aujourd'hui

- Annonces
- Rappel de 5.4 Principe d'inclusion-exclusion et de 5.5 Applications du principe d'inclusion-exclusion
- 5.5 Applications du principe d'inclusion-exclusion
- A.3 Fonctions génératrices



Université de Montréal

Annonce - disponibilités de Crystel

Les disponibilités de Crystel ont changé à

mardi de 13h30 à 14h30

Université de Montréal

Annonce- Les évaluations de l'enseignement

- Les évaluations de l'enseignement seront disponibles dans le système Omnivox du 25 novembre au 8 décembre inclusivement.
- Vous êtes appelés à évaluer vos professeurs, chargés de cours et auxiliaires d'enseignement.
- Ces évaluations sont indispensables à l'amélioration de l'enseignement et sont strictement confidentielles.

Université de Montréal

Annonce- Les sujets de l'examen final

- L'examen final portera sur les sujets discutés en classe en relation aux sections 1.5, 1.6, 2.3, 2.4, 2.5, 3.1, 3.2, 3.3, 4.1, 4.2, 4.3, 4.6, 5.1, 5.2, 5.4, 5.5, A3 du manuel.
- Aucune documentation ne sera permise à l'examen.
- Nous allons finir la matière de l'examen final le 29 novembre.
- Il y a une liste de problèmes de révision dans la partie d'avis importants du site web. On va discuter une partie de ces problèmes dans les cours qui restent.
- S'il y a un sujet ou problème que vous voulez que je discute pendant les cours qui restent, dites-le-moi à l'avance (personnellement ou par courriel).

Université de Montréal

Rappel de 5.4 Principe d'inclusion-exclusion

Théorème : *Soient* $n \in \mathbb{Z}_0$, $A_1, \ldots, A_n$ *ensembles finis. Alors,*

$$\begin{aligned}|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = &\sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| \\ &+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ &- \cdots \\ &+ (-1)^{n+1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n|.\end{aligned}$$

Université de Montréal

Rappel de 5.5 Applications du principe d'inclusion-exclusion

Soient U un ensemble fini, $P_1, \dots P_n$ quelques propriétés et soient

$$A_i = \{x \in U \,|\, x \text{ a la propriété } P_i\}.$$

On défini

$$|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = N(P_{i_1} \dots P_{i_k}),$$
$$|U| = N,$$

et $N(P_1' \dots P_n')$ le nombre d'éléments de U ne satisfant aucune des propriétés $P_1, \dots, P_n$, égal à $N - |A_1 \cup \cdots \cup A_n|$.
Par le principe de l'inclusion-exclusion,

$$\begin{aligned} N(P_1' \dots P_n') = & N - \sum_{i=1}^{n} N(P_i) + \sum_{1 \le i < j \le n} N(P_i P_j) \\ & - \sum_{1 \le i < j < k \le n} N(P_i P_j P_k) + \cdots \\ & + (-1)^n N(P_1 \cdots P_n). \end{aligned}$$

Université de Montréal

Applications du principe d'inclusion-exclusion

- Nombre d'entiers positifs $\leq N$ qui sont divisibles par $a_1, \ldots, a_n$.
- Nombre d'entiers positifs $\leq N$ qui ne sont pas divisibles par $a_1, \ldots, a_n$ (Crible d'Eratosthène).
- Solutions entières de

$$x_1 + \cdots + x_m = s$$

avec conditions du type $x_i \leq b_i$.

Université de Montréal

Dénombrement de fonctions surjectives

Définition : Une fonction $f : A \to B$ est surjective si et seulement si pour chaque $b \in B$, il y a $a \in A$ tel que $f(a) = b$.

$$\forall b \in B \, \exists a \in A (f(a) = b).$$

Théorème : Soient m et k des nombres entiers positifs avec $m \geq k$. Alors, il y a

$$k^m - C(k,1)(k-1)^m + C(k,2)(k-2)^m - \cdots + (-1)^{k-1} C(k,k-1) 1^m$$

fonctions surjectives d'un ensemble à m éléments dans un ensemble à k éléments.

Université de Montréal

Dénombrement de fonctions surjectives

Démonstration : On prouvera qu'il y a

$$k^m - C(k,1)(k-1)^m + C(k,2)(k-2)^m - \cdots + (-1)^{k-1} C(k,k-1) 1^m$$

fonctions surjectives d'un ensemble à m éléments dans un ensemble à k éléments.
Soit

$$P_i = \{f : \{a_1, \ldots, a_m\} \to \{b_1, \ldots, b_k\} \mid b_i \notin \mathrm{Im}(f)\}.$$

On a donc que f est surjective si et seulement si $f \in P_1' \ldots P_k'$.
Observons que $N = k^m$, $N(P_i) = (k-1)^m$ et il y a $C(k,1)$ termes de ce type, $N(P_i P_j) = (k-2)^m$ et il y a $C(k,2)$ termes de ce type, ...
$N(P_1 P_2 \cdots \widehat{P}_j \cdots P_k) = 1^m$ (la notation $\widehat{P}_j$ indique qu'il faut enlever le terme) et il y a $C(k,k-1)$ termes de ce type et $N(P_1 P_2 \cdots P_k) = 0$.
En applicant la formule d'inclusion-exclusion, nous obtenons le résultat.

Université de Montréal

Dénombrement de fonctions surjectives - Exemple

Problème : De combien de façons peut-on attribuer six tâches différentes à quatre employées différents si tous ces employées doivent recevoir au moins une tâche?

Résolution : On considère les fonctions $f : \{\text{tâches}\} \to \{\text{employées}\}$. Les conditions du problème indiquent que f doit être surjective. On a donc

$$\begin{aligned} 4^6 - C(4,1)3^6 + C(4,2)2^6 - C(4,3)1^6 &= 4096 - 2916 + 384 - 6 \\ &= 1558 \end{aligned}$$

□

Université de Montréal

Dérangements - Problème du vestiaire

Problème : Un nouvel employé d'un vestiaire place les manteaux de n clients d'un restaurant en oubliant de mettre un ticket sur les manteaux. Lorsque les clients viennent réclamer leurs manteaux, l'employé du vestiaire remet aléatoirement à chacun un manteau à partir des manteaux restants. De combien de façons est-il possible qu'aucun des clients ne reçoive son propre manteau?

Définition : Un dérangement est une permutation d'objets qui ne laisse aucun objet dans sa position originale.

Université de Montréal

Dérangements

Théorème : Soit D_n le nombre de dérangements de n objets. On a

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right).$$

Observation : La formule ci dessus est reliée au e de la fonction exponentielle

$$e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots \approx 0,368\ldots$$

Université de Montréal

Dérangements

Démonstration : Soit

$$P_i = \{\text{permutations dont le } i\text{-ème objet reste à sa position originale}\}.$$

On a donc que $D_n = N(P_1' \dots P_n')$.
Observons que $N = n!$, $N(P_i) = (n-1)!$ et il y a $C(n,1)$ termes de ce type, $N(P_iP_j) = (n-2)!$ et il y a $C(n,2)$ termes de ce type, ...
$N(P_1P_2 \cdots P_n) = (n-n)! = 0!$ et il y a $C(n,n) = 1$ termes de ce type.
En applicant la formule d'inclusion-exclusion, nous obtenons

$$\begin{aligned} D_n =& n! - C(n,1)(n-1)! + C(n,2)(n-2)! - \cdots + (-1)^n C(n,n)0! \\ =& n! - \frac{n!}{1!\cancel{(n-1)!}}\cancel{(n-1)!} + \frac{n!}{2!\cancel{(n-2)!}}\cancel{(n-2)!} - \cdots + (-1)^n \frac{n!}{n!\cancel{0!}}\cancel{0!} \\ =& n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right). \end{aligned}$$

Université de Montréal

A.3 Fonctions génératrices

Définition : La série de la fonction génératrice de la suite de nombres réels $a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots$ est la série infinie

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Exemples : La série de la fonction génératrice de la suite

- $1, 1, 1$ est $1 + x + x^2 = \frac{x^3-1}{x-1}$, (la série est finie si la suite est finie)
- $1, 1, 1, \ldots$ est $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$.

Université de Montréal

Un peu d'analyse

Dans le cours de calcul ou d'analyse on étudie la convergence de la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Supposons que la série converge pour $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, disons que

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

sur $(-\varepsilon, \varepsilon)$ et que $G(x)$ est une fonction analytique (toutes les dérivés de G existent sur $(-\varepsilon, \varepsilon)$). On dit que $G(x)$ est aussi la fonction génératrice de $a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots$.

La formule de Taylor/Maclaurin donne

$$a_k = \frac{G^{(k)}(0)}{k!}$$

où $G^{(k)}(0)$ est la k-ième dérivée évaluée en $x = 0$.

Université de Montréal

Fonction génératrice - Exemples

Exemple : La fonction $G(x) = \frac{1}{1-x}$ est la fonction génératrice de la suite $1, 1, 1, 1, \ldots$ pour $|x| < 1$, parce que dans ce cas,

$$G(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots .$$

Cette série est appelée série géométrique.

Démonstration :

$$G'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, G''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}, G'''(x) = \frac{3!}{(1-x)^4}, \cdots$$

$$G^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

(Il faut le prouver par induction.) Donc

$$a_k = \frac{G^{(k)}(0)}{k!} = \frac{k!}{k!} = 1.$$

Université de Montréal

Fonction génératrice - Exemples

Exemple : Quelle est la fonction génératrice de la suite $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots$?

Réponse : La série de la fonction génératrice est donnée par

$$1 + \alpha x + \alpha^2 x^2 + \alpha^3 x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha x)^k = \frac{1}{1 - \alpha x} = G(x),$$

convergente pour $|\alpha x| < 1$.

Université de Montréal

Fonction génératrice - Exemples

Exemple : Soit $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ et $a_k = C(m,k)$ pour $k = 0, 1, \ldots, m$. La fonction génératrice de $a_0, \ldots, a_m$ est

$$\begin{aligned} G(x) =& C(m,0) + C(m,1)x + \cdots + C(m,m-1)x^{m-1} + C(m,m)x^m \\ =& (1+x)^m, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le théorème du binôme.

Université de Montréal

Des propriétés utiles

Théorème : Soient $G(x) = \sum_{k=0} a_k x^k$ *et* $H(x) = \sum_{k=0} b_k x^k$. *Dans un domaine où les deux séries convergent absolument, on a,*

$$G(x) + H(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k, \qquad G(x)H(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} \right) x^k.$$

Exemple : Trouver les coefficients de $G(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ si $|x| < 1$.

Réponse : Comme $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$ si $|x| < 1$, alors,

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} 1 \cdot 1 \right) x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) x^k.$$

Université de Montréal

Des propriétés utiles

Théorème : Soit $G(x) = \sum_{k=0} a_k x^k$. *Dans un domaine où la série converge absolument, on a,*

$$G'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k$$

Exemple : Trouver les coefficients de $F(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ si $|x| < 1$.

Réponse : Comme $G(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$ si $|x| < 1$, alors,

$$F(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = G'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) x^k.$$

Université de Montréal

Fonction génératrice - Exemples

Exemple : Soit m entier positif. Prouver que

$$\frac{1}{(1-x)^m} = \sum_{k=0}^{\infty} C(m+k-1,k)x^k$$

si $|x| < 1$.

Démonstration : Par induction sur m. $P(1)$ est V, car

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} C(1+k-1,k)x^k.$$

Supposons que $P(m)$ est V.

$$\frac{1}{(1-x)^{m+1}} = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{(1-x)^m}\right)'$$

Université de Montréal

Fonction génératrice - Exemples

Démonstration (continuation) :

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \Longrightarrow G'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k \qquad a_k = C(m+k-1, k).$$

$$\frac{1}{(1-x)^{m+1}} = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{(1-x)^m}\right)' = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)C(m+(k+1)-1, k+1)x^k$$

Comme

$$\begin{aligned}(k+1)C(m+(k+1)-1, k+1) &= \frac{(k+1)(m+k)!}{(k+1)!(m-1)!} = \frac{(m+k)!}{k!(m-1)!} \\ &= \frac{m(m+k)!}{k!m!} = mC(m+k, k)\end{aligned}$$

Donc $P(m+1)$ est V est l'enonce est V par induction.

Université de Montréal

Application des fonctions génératrices à problèmes de dénombrement

Nous revenons sur le problème de compter les solutions naturelles d'une équation de la forme

$$y_1 + \cdots + y_m = s.$$

Exemple : Trouver le nombre de solutions naturelles de

$$y_1 + y_2 + y_3 = 15,$$

si $2 \leq y_1 \leq 5$, $3 \leq y_2 \leq 6$ et $8 \leq y_3 \leq 9$.

Résolution : Il faut trouver le coefficient de x^{15} dans

$$(x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(x^8 + x^9).$$

Université de Montréal

Application des fonctions génératrices à problèmes de dénombrement

Résolution (continuation) :

$$
\begin{aligned}
&(x^2+x^3+x^4+x^5)(x^3+x^4+x^5+x^6)(x^8+x^9)\\
=&x^2(1+x+x^2+x^3)x^3(1+x+x^2+x^3)x^8(1+x)\\
=&x^{13}(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2+x^3)(1+x)\\
=&x^{13}(\text{termes de moins haute degrée } + 5x^2 + \text{ termes de plus haute degrée})
\end{aligned}
$$

Pour trouver le coefficient on a calculé

$$x^2\cdot 1\cdot 1 + x\cdot x\cdot 1 + x\cdot 1\cdot x + 1\cdot x^2\cdot 1 + 1\cdot x\cdot x.$$

Par conséquent, il y a 5 solutions naturelles avec les conditions demandées.

Université de Montréal