MAT2050 : analyse 2, hiver 2016
Travaux pratiques, 7 avril

Exercise 1. Soit une fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que
$$\int_0^1 f(x)x^n dx = 0,$$
pout tout entier $n \geq 0$. Montrez que f est identiquement égale à zéro.

Exercise 2. Rappelez que $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f, |f| \in \mathcal{R}^*((-\infty,\infty)),\ f \text{ bornée}\}$.

(a) Soient deux fonctions $f, g \in \mathcal{F}$ et considérons leur convolution $f * g$. Si g'' existe et est bornée, montrez que $f * g$ est différentiable et que $(f * g)' = f * g'$.

(b) Étant donnée une fonction $f \in \mathcal{F}$ continue, trouvez une suite des fonctions $(f_n)_{n\geq 1} \subset C^\infty(\mathbb{R})$ convergent vers f uniformément sur chaque intervalle fini $[a,b]$.

Exercise 3. Montrez que
$$x(1-x) = \frac{1}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n x)}{\pi^2 n^2} \qquad (0 \leq x \leq 1).$$
Déduisez que
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercise 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et 1-périodique et soient aussi $a_{-N}, a_{-N+1}, \ldots, a_N$ quelques nombres complexes. Posons
$$T(x) = \sum_{|n|\leq N} a_n e^{2\pi i n x}.$$

(a) Montrez que
$$\int_0^1 |T(x)|^2 dx = \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2.$$
[*Indice* : $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$.]

(b) Montrez que
$$\int_0^1 f(x)\overline{T(x)}dx = \sum_{|n|\leq N} \hat{f}(n)\overline{a_n}.$$

(c) Déduisez que
$$\int_0^1 |f(x) - T(x)|^2 dx \geq \int_0^1 |f(x) - S_N f(x)|^2 dx;$$
de plus, cette inégalité est une égalité si et seulement si $a_n = \hat{f}(n)$ pour tout $n \in \{-N, -N+1, \ldots, N\}$.

Exercise 5. Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$ pour la quelle il existe une constante $M \geq 0$ telle que
$$|f(x)| + |f'(x)| + |f''(x)| \leq \frac{M}{x^2+1} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

(a) Montrez que la série
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$$
converge uniformément sur $[0,1]$.

(b) Montrez que la fonction
$$F(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$$
est 1-périodique et appartient à $C^2(\mathbb{R})$. Déduisez que
$$F(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{F}(m)e^{2\pi imx}$$

(c) Montrez que
$$\hat{F}(m) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi imt}dt$$
et déduisez que
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi imt}dt.$$
Remarque : La dernière égalité est appelée la *formule sommatoire de Poisson*. Observez que si $m=0$, alors
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi imt}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt.$$
En général, on s'attend à ce que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) \approx \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$, donc on considère le terme avec $m=0$ comme le terme principal et tous les autres termes comme une erreur, qui devraient être petits à cause de l'oscillation de $e^{2\pi imt}$ pour $m \neq 0$.