MAT2050 : analyse 2, hiver 2016

Travaux pratiques, 24 mars

Exercice 1. Montrez que :

(a) la série $\sum_{n\geq 1} \sin(x/n^2)$ converge pour chaque $x \in \mathbb{R}$.

(b) la série $\sum_{n\geq 1} \sin(x/n^2)$ converge uniformément sur $[-M, M]$, pour chaque $M > 0$ fixé.

(c) la série $\sum_{n\geq 1} \sin(x/n^2)$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

(d) la fonction $x \to \sum_{n\geq 1} \sin(x/n^2)$ est differentiable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Considérons la série de fonctions

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2 x} \quad (x \geq 0).$$

(a) Montrez que la série converge ponctuellement sur $(0, +\infty)$.

(b) Est-ce qu'elle converge uniformément sur $(0, +\infty)$? Sur $[1, +\infty)$?

(c) Montrez que la fonction-somme est dans $\mathcal{R}^*([0, 1])$ mais pas dans $\mathcal{R}([0, 1])$, et calculez son intégrale impropre sur $[0, 1]$.

Exercice 3.

(a) Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions continues appartenant à $\mathcal{R}^*(-\infty, \infty)$. Supposons que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur chaque intervalle compacte $[a, b]$. Supposons aussi qu'il existe une fonction $g \in \mathcal{R}^*(-\infty, \infty)$ telle que $|f_n(x)| \leq g(x)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors, montrez que $f \in \mathcal{R}^*(-\infty, \infty)$ et que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx = \int_{\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

[*Indication* : Observez que $| \int_{M\leq |x| \leq M'} f_n(x)dx| \leq \int_{M\leq|x|\leq M'} g(x)dx$.]

(b) Calculez la limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\sin x}{n}}}{1+x^2} dx.$$

Exercice 4. Développez les fonctions suivantes en séries de puissances autour du point x_0 indiqué et trouvez leur rayons de convergence :

(a) $f(x) = \arcsin(x)$, $x = 0$;

(b) $g(x) = \int_0^1 \frac{dt}{1-tx}$, $x = 0$.

(Il faut justifier pourquoi les séries des puissances que vous allez trouver sont égales aux fonctions f et g.)

Exercice 5. Déterminez les valeurs de x pour lesquelles la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n$$

converge et calculez sa somme. [*Indice* : On a que $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.]