MAT2050 : analyse 2, hiver 2016
Travaux pratiques #4, 25 février

Exercice 1. Décidez si les intégrales suivants convergent ou pas :

$$\text{(a)} \int_1^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx \qquad\qquad \text{(b)} \int_1^\infty \left|\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right| dx$$

Exercice 2. Construisez une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

(a) $f \geq 0$;

(b) f est continue ;

(c) $\limsup_{x\to\infty} f(x) = +\infty$;

(d) $f \in \mathcal{R}^*(\mathbb{R})$;

Exercice 3. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions avec $g \geq 0$.

(a) Montrez que si

$$\int_{-M}^{M} g(x)dx = O(1) \quad (M \geq 1),$$

alors l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx$ converge. [*Indice* : convergence de Cauchy.]

(b) Montrez que si $f(x) = O(g(x))$ pour $x \in \mathbb{R}$, où g est une fonction appartenant à la classe $\mathcal{R}^*((-\infty,\infty))$, alors $f \in \mathcal{R}^*((-\infty,\infty))$.

(c) Montrez que si $g(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et les limites $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ existent et sont finies, alors $f(x) = O(g(x))$ pour $x \in \mathbb{R}$.

(d) Utilisez les parties au-dessus pour montrez que l'intégrale impropre

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\sin x)(x^{10} - x^5 + x^2 + 1)\log(|x| + 1)}{(x + \sin x)e^{\sqrt{|x|}}} dx$$

converge.

Exercice 4.

(a) Pour chaque $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, montrez qu'il existe un polynôme P_k de degré $k + 1$ et de coefficient de tête $\frac{1}{k+1}$ tel que

$$\sum_{n=1}^{N} n^k = P_k(N).$$

Déduisez que

$$\sum_{n\leq x} n^k = \frac{x^{k+1}}{k+1} + O_k(x^k)$$

pour tout $x \in [1, +\infty)$.

(b) Montrez que les polynômes P_k de la partie (a) satisfassent l'équation recursive

$$(k + 1)P_k(x) = x(x + 1)^k - \sum_{j=1}^{k-1} \binom{k}{j-1} P_j(x).$$

Exercice 5. Montrez que

$$\sum_{n=1}^{N} \cos(nx) \ll \frac{1}{|x|} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{N} \sin(nx) \ll \frac{1}{|x|} \quad (-\pi \leq x \leq \pi,\ x \neq 0).$$

[*Indice :* Observez que $\cos x = \Re(e^{ix})$ et $\sin x = \Im(e^{ix})$.]