MAT2050 : analyse 2, hiver 2016
Travaux pratiques #3, 4 février

Exercice 1. Soient f et g deux fonctions sont intégrables sur $[a, b]$.

(a) L'inégalité de Cauchy-Schwarz sur $\mathbb{R}^n$ dit que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right),$$

pour tous $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. Utilisez ce fait pour montrer que

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f(x)^2 dx\right)\left(\int_a^b g(x)^2 dx\right).$$

(b) Donnez une démonstration directe de l'inégalité de Cauchy-Schwarz en utilisant le fait que

$$\int_a^b (f(x) + \lambda g(x))^2 dx \geq 0,$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) Montrez l'inégalité de Minkowksi :

$$\left(\int_a^b (f(x) + g(x))^2 dx\right)^{1/2} \leq \left(\int_a^b f(x)^2 dx\right)^{1/2} + \left(\int_a^b g(x)^2 dx\right)^{1/2}.$$

Exercice 2. Vrai ou faut ?

(a) Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ admettant une anti-dérivé sur $[a, b]$ est intégrable.

(b) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction dont la valeur absolue est continue, alors f est intégrable.

Exercice 3. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions dérivables telles que $a(x) < b(x)$ pour tout x. Calculez

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt.$$

Exercice 4. (a) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $g : [a, b] \to [0, +\infty)$ est une fonction intégrable, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

[*Indication :* Observez que $m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx$, où $m = \min f(x)$ et $M = \max f(x)$.

(b) (difficile) Soit $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable et décroissante, et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrez qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = F(a)\int_a^c g(x)dx + F(b)\int_c^b g(x)dx.$$

[*Indice :* considérez la fonction $G(x) = \int_a^x g(t)$.]

(c) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction differentiable telle que $f'(x) \geq m > 0$ pour tout $x \in [a,b]$. Montrez que
$$\left| \int_a^b \cos(f(x))dx \right| \leq \frac{2}{m}.$$
[*Indice* : multipliez et divisez l'integrand par $f'(x)$.]

Exercice 5.

(a) Montrez que la fonction $f : [0,1] \to [0,1]$, définie par
$$f(x) = \begin{cases} 1/q & \text{si } x = p/q, \text{ où } p,q \in \mathbb{N} \text{ avec } \mathrm{pgcd}(p,q) = 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$
est intégrable sur $[0,1]$.
[*Indice* : considérez les partitions $\mathcal{P} = \{a/b : 0 \leq a \leq b \leq B,\ \mathrm{pgcd}(a,b) = 1\}$.]

(b) Montrez que la fonction $g \circ f : [0,1] \to \mathbb{R}$, où f est la fonction de la partie (a) et
$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$
n'est pas intégrable sur $[0,1]$.