MAT2050 : analyse 2, hiver 2016

Travaux pratiques, 28 janvier

Exercice 1. (a) Soit $N_0 \in \mathbb{N}$ et $f : [N_0, +\infty) \to [0, +\infty)$ une fonction décroissante. Montrez que

$$\int_{N_0}^{N} f(t)dt \leq \sum_{n=N_0}^{N} f(n) \leq f(N_0) + \int_{N_0}^{N} f(t)dt \quad (N \geq N_0).$$

Déduisez que la série $\sum_{n \geq N_0} f(n)$ converge si et seulement si $\sup_{N \geq N_0} \int_{N_0}^{N} f(t)dt < \infty$.

(b) Utilisez le critère au-dessous pour étudier la convergence de la série

$$\sum_{n \geq 10} \frac{1}{n(\log n)(\log\log n)^p},$$

où p est une paramètre positive.

Exercice 2. Calculez la limite

$$\lim_{N \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{1}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{N}\right) \right]^{\frac{1}{N}}.$$

Exercice 3. Si $f : [a, b] \to [0, +\infty)$ est continue et $\int_a^b f(x)dx = 0$, alors montrez que $f(x) = 0$ pour tout $x \in [a, b]$.

Exercice 4. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction differentiable telle que

$$M := \sup\{|f'(x)| : a \leq x \leq b\} < \infty.$$

Soient $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ une partition de $[a, b]$ et $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ pour $1 \leq i \leq n$. Considérons la somme de Riemann

$$R(f, \mathcal{P}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

et les sommes de Darboux $S^+(f, \mathcal{P})$ et $S^-(f, \mathcal{P})$. Montrez que

$$S^+(f, \mathcal{P}) - S^-(f, \mathcal{P}) \leq M \cdot \|\mathcal{P}\| \cdot (b - a)$$

et que

$$\left| R(f, \mathcal{P}, \boldsymbol{\xi}) - \int_a^b f(x)dx \right| \leq M \cdot \|\mathcal{P}\| \cdot (b - a).$$

Exercice 5. Trouvez une fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ intégrable ayant une infinité de points de discontinuité.