MAT2050 : analyse 2, hiver 2016
Travaux pratiques, 14 janvier

Exercice 1. Trouvez $\limsup_{n\to\infty} x_n$, $\liminf_{n\to\infty} x_n$ et $\lim x_n$ (s'il existe) pour la suite $x_n = n!/\lambda^n$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Sous quelles conditions est-ce que

(a) $\inf A = \min A$?

(b) Pour tout $B \subset A$, $B \neq \emptyset$, alors $\inf B = \min B$ et $\sup B = \max B$? (plus difficile)

Exercice 3. (a) Montrez que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{(1+\delta)^n}$$

converge pour tous $p \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$.

(b) Étudiez la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}.$$

(c) Pour quels $p > 0$ est-ce que la série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$$

est convergente ?

[*Indice* : Trouvez deux suites $(a_k)_{k\geq 1}$ et $(b_k)_{k\geq 1}$ telles que $a_k \leq \frac{1}{n(\log n)^p} \leq b_k$ pour tout $n \in [2^k, 2^{k+1})$, $k \geq 1$.]

Exercice 4.

(a) Montrez qu'une fonction $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ dont la dérivée est bornée est uniformément continue.

(b) Pour quels $p \in \mathbb{R}$ est-ce que la fonction $f : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$, $f(x) = x^p$, est uniformément continue ?

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si} x \leq 0. \end{cases}$$

Montrez que f est differentiable une infinité de fois et calculez $f^{(n)}(0)$ pour chaque $n \geq 0$. Qu'est-ce que vous observez concernant la série de Taylor $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$?