MESURE ET INTÉGRATION EN UNE DIMENSION

Solutions des exercices

André Giroux
Département de Mathématiques et Statistique
Université de Montréal
Juin 2005

1 INTRODUCTION

1. Vérifier que la fonction
$$x \mapsto \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x)$$
est partout discontinue.

   Solution. Quel que soit x_0, on a
$$\liminf_{x\to x_0} \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x) = 0 \ , \ \limsup_{x\to x_0} \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x) = 1$$
en s'approchant de x_0 suivant des points irrationnels ou des points rationnels respectivement.

2. Déterminer l'ensemble des points de continuité de la fonction
$$x \mapsto x\,\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x).$$

   Solution. La fonction $x\,\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x)$ est continue en x_0 si et seulement si $x_0 = 0$. En effet, la continuité en $x_0 = 0$ découle de l'inégalité
$$|x\,\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x)| \leq |x|.$$
D'autre part, si $x_0 > 0$, on a
$$\liminf_{x\to x_0} x\,\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x) = 0 \ , \ \limsup_{x\to x_0} x\,\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x) = x_0$$
alors que, si $x_0 < 0$, on a
$$\liminf_{x\to x_0} x\,\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x) = x_0 \ , \ \limsup_{x\to x_0} x\,\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x) = 0.$$

3. Déterminer les ensembles E_k associés à la fonction $\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}$.

   Solution. Pour chaque $m \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, on a
$$E_0 = \mathbb{Q}^c \ , \ E_m = \mathbb{Q} \ \text{ et } E_k = \emptyset \ \text{ si } \ 0 < k < m.$$

2 ENSEMBLES MESURABLES

1. Montrer que tout recouvrement d'un ensemble $K \subseteq \mathbb{R}$ compact (fermé et borné) par des ensembles ouverts contient un sous-recouvrement fini.

Solution. Soit $\{O_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un recouvrement ouvert de K. Si $K \subseteq [a,b]$, les intervalles ouverts dont se composent les ensembles ouverts K^c et O_α forment un recouvrement de $[a,b]$. Si $\{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$ constitue un recouvrement fini de $[a,b]$ par certains de ces intervalles, au plus n des ensembles O_α pourront être choisis de façon à recouvrir K.

2. Si $E \subseteq \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}$,

$$kE = \{y \mid y = kx\ ,\ x \in E\}.$$

Montrer que $\lambda^*(kE) = |k|\lambda^*(E)$.

Solution. Si $k = 0$, on a bien, avec la convention faite, que

$$\lambda^*(\{0\}) = 0\ \lambda^*(E).$$

Si $k > 0$,

$$\lambda^*(kE) = \inf\left\{\sum_n (b_n - a_n) \,\middle|\, kE \subseteq \bigcup_n\ ]a_n, b_n[\right\}$$
$$= k\ \inf\left\{\sum_n \left(\frac{1}{k}\ b_n - \frac{1}{k}\ a_n\right) \,\middle|\, E \subseteq \bigcup_n\ ]\frac{1}{k}\ a_n, \frac{1}{k}\ b_n[\right\} = k\,\lambda^*(E).$$

Si enfin $k < 0$,

$$\lambda^*(kE) = \inf\left\{\sum_n (b_n - a_n) \,\middle|\, kE \subseteq \bigcup_n\ ]a_n, b_n[\right\}$$
$$= -k\ \inf\left\{\sum_n \left(\frac{1}{k}\ a_n - \frac{1}{k}\ b_n\right) \,\middle|\, E \subseteq \bigcup_n\ ]\frac{1}{k}\ b_n, \frac{1}{k}\ a_n[\right\} = |k|\,\lambda^*(E).$$

3. Soit $\mu^* : \mathfrak{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ la fonction définie par

$$\mu^*(E) = \sup\{(b-a) \mid\ ]a,b[\ \subseteq E\}.$$

Cette fonction est-elle monotone ? invariante sous translation ? Préserve-t-elle la longueur des intervalles ? Est-elle sous-additive ?

Solution. Il est évident que la fonction μ^* est monotone, invariante sous translation et qu'elle préserve la longueur des intervalles. Elle n'est cependant pas sous-additive comme le montrent les relations

$$[0,1] = ([0,1/4] + [3/4,1]) + [1/4,3/4]$$

et

$$\mu^*([0,1]) = 1 > 1/4 + 1/2 = \mu^*\left([0,1/4] + [3/4,1]\right) + \mu^*([1/4,3/4]).$$

4. Répondre aux mêmes questions si la fonction μ^* est définie par

$$\mu^*(E) = \mathrm{card}(E\mathbb{Z}).$$

Solution. Les propriétés de la fonction $A \mapsto \mathrm{card}(A)$ montrent que μ^* est monotone et sous-additive mais elle n'est évidemment pas invariante sous translation et elle ne préserve pas la longueur des intervalles.

---

5. Montrer que, si $E \subseteq \mathbb{R}$ est mesurable et $k \in \mathbb{R}$, l'ensemble kE est mesurable.

Solution. Si $k = 0$, $kE = \{0\}$ est mesurable. Si $k \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\lambda^*(A\ kE) + \lambda^*(A\ (kE)^c) &= \lambda^*(A\ kE) + \lambda^*(A\ kE^c) \\
&= \lambda^*\left(k\ \frac{1}{k}A\ E\right) + \lambda^*\left(k\ \frac{1}{k}A\ E^c\right) \\
&= |k|\left(\lambda^*\left(\frac{1}{k}A\ E\right) + \lambda^*\left(\frac{1}{k}A\ E^c\right)\right) \\
&= |k|\,\lambda^*\left(\frac{1}{k}A\right) = \lambda^*(A).
\end{aligned}$$

6. Montrer que tout ensemble mesurable borné est de mesure finie. La réciproque est-elle vraie ?

Solution. Si $E \subseteq [-K, +K]$, alors $\lambda(E) \leq 2K$. La réciproque est fausse, comme le montre l'exemple de l'ensemble non borné

$$E = \sum_{k=1}^{+\infty} \left]k, k + \frac{1}{2^k}\right[$$

de mesure finie

$$\lambda(E) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 1.$$

7. Un ensemble de mesure nulle peut-il être ouvert ? Doit-il être fermé ?

Solution. Puisque

$$\lambda\left(\sum_k\ ]a_k, b_k[\right) = \sum_k (b_k - a_k),$$

le seul ensemble ouvert de mesure nulle est l'ensemble vide. Un ensemble de mesure nulle n'est d'autre part pas nécessairement fermé, comme le montre l'exemple de l'ensemble $\mathbb{Q}$.

8. Soit $\epsilon > 0$ donné. Construire un ensemble ouvert E de mesure $\lambda(E) < \epsilon$ qui soit dense dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire tel que tout nombre réel puisse s'écrire comme la limite d'une suite de nombres appartenant à E).

   Solution. Soit $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, r_3, \ldots\}$ une énumération des nombres rationnels (par exemple, $\{0, 1, -1, 1/2, -1/2, 1/3, -1/3, 2/3, ...\}$). L'ensemble
$$E = \bigcup_{k \geq 1} \left] r_k - \frac{\epsilon}{2^{k+2}}, r_k + \frac{\epsilon}{2^{k+2}} \right[$$
   possède les propriétés requises puisque qu'il contient $\mathbb{Q}$ et que
$$\lambda(E) < \epsilon.$$

9. Montrer qu'un ensemble $E \subseteq \mathbb{R}$ est mesurable si et seulement si à chaque $\epsilon > 0$ correspond un ensemble ouvert $O_\epsilon \subseteq \mathbb{R}$ tel que $E \subseteq O_\epsilon$ et que $\lambda^*(O_\epsilon E^c) < \epsilon$.

   Solution.
   Cas où $\lambda^*(E) < +\infty$.
   Soit O_ϵ un ensemble ouvert tel que $E \subseteq O_\epsilon$ et que
$$\lambda(O_\epsilon) < \lambda^*(E) + \epsilon.$$
   Si E est mesurable, on a
$$\lambda(O_\epsilon) = \lambda^*(E) + \lambda^*(O_\epsilon E^c) > \lambda(O_\epsilon) - \epsilon + \lambda^*(O_\epsilon E^c)$$
   et donc
$$\lambda^*(O_\epsilon E^c) < \epsilon.$$
   Réciproquement, considérons l'ensemble mesurable
$$G = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_{1/n}.$$
   Alors $G = E + N$ où $\lambda^*(N) = \lambda^*(GE^c) = 0$. Donc $E = GN^c$ est mesurable.
   Cas où $\lambda^*(E) = +\infty$.

Posons $I_n =]-n, n[$, $E_n = EI_n$. Alors $\lambda^*(E_n) < +\infty$. Si O est un ensemble ouvert tel que $E \subseteq O$ et $\lambda^*(OE^c) < \epsilon$, on a

$$\lambda^*(OI_nE_n^c) = \lambda^*(OI_nE^c) < \epsilon$$

et E_n est mesurable, donc

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$$

l'est aussi. Réciproquement, si E est mesurable, chaque ensemble E_n l'est. Si donc O_m est un ouvert tel que

$$\lambda^*(O_mE_m^c) < \frac{\epsilon}{2^{m+1}},$$

on aura, en posant

$$O = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} O_m,$$

que

$$\lambda^*(OE^c) = \lambda^*\left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_mE_n^c\right) \leq \sum_{m\in\mathbb{N}} \lambda^*(O_mE_m^c) < \epsilon.$$

10. Montrer qu'un ensemble $E \subseteq \mathbb{R}$ est mesurable si et seulement si on peut l'écrire comme la réunion disjointe d'un ensemble de mesure nulle N et d'un ensemble qui est une réunion au plus dénombrable d'ensembles fermés F_k :

$$E = N + \bigcup_k F_k.$$

Solution. La condition est évidemment suffisante. Elle est aussi nécessaire car si O_n est un ouvert tel que $E^c \subseteq O_n$ et

$$\lambda(O_nE) < \frac{1}{n},$$

en considérant l'ensemble fermé $F_n = O_n^c$, on aura $F_n \subseteq E$ et

$$\lambda(F_n^cE) < \frac{1}{n}.$$

On aura donc

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n + N$$

où

$$\lambda(N) = \lambda\left(E\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right)^c\right) = \lambda\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n^c E\right) = 0.$$

---

11. Soit $\mu : \mathfrak{L} \to [0,+\infty]$ une fonction additive. Montrer qu' elle est nécessairement croissante et sous-additive.

    Solution. Si $E \subseteq F$, on a $F = E + FE^c$ et donc, par additivité,

    $$\mu(F) = \mu(E) + \mu(FE^c) \geq \mu(E).$$

    (Si $\mu(\emptyset) \neq 0$, $\mu \equiv +\infty$ et l'énoncé est trivial). Donnée une suite quelconque d'ensembles mesurables $E_1, E_2, E_3, \ldots$, considérons les ensembles $F_1 = E_1, F_2 = E_2E_1^c, F_3 = E_3E_2^cE_1^c, \ldots$ Ils sont mesurables et disjoints donc, par additivité,

    $$\mu\left(\bigcup_n E_n\right) = \mu\left(\sum_n F_n\right) = \sum_n \mu(F_n) \leq \sum_n \mu(E_n).$$

12. Soit $\mu : \mathfrak{L} \to [0,+\infty]$ la fonction définie par

    $$\mu(E) = \begin{cases} +\infty & \text{si } E \text{ est infini} \\ \text{card}(E) & \text{si } E \text{ est fini.} \end{cases}$$

    Montrer que μ est additive et invariante sous translation.

    Solution. Que la fonction μ soit invariante sous translation est clair. Soient $E_1, E_2, E_3, \ldots$ des ensembles mesurables non vides deux à deux disjoints. Si l'un d'eux est infini, ainsi en est-il de leur réunion et donc on a bien

    $$\mu\left(\sum_n E_n\right) = \sum_n \mu(E_n) = +\infty$$

    dans ce cas. Si tous les ensembles E_n sont finis, leur réunion est finie s'ils sont en nombre fini et elle est infinie sinon. Dans le premier cas,

    $$\mu\left(\sum_n E_n\right) = \sum_n \mu(E_n) < +\infty$$

    et dans le deuxième

    $$\mu\left(\sum_n E_n\right) = \sum_n \mu(E_n) = +\infty.$$

13. Soit $\{E_k\}_k$ une suite décroissante,

$$E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \supseteq \cdots ,$$

d'ensembles de mesure finie. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda(E_n) = \lambda\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} E_k\right).$$

L'hypothèse « de mesure finie »est-elle essentielle ?

Solution. Si $n \geq 2$, considérons les ensembles croissant $F_n = E_1 E_n^c$. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda(F_n) = \lambda\left(\bigcup_n F_n\right) = \lambda\left(E_1\ (\bigcap_{n\geq 2} E_n)^c\right).$$

Toutes le quantités impliquées étant finies,

$$\lambda(E_1) = \lambda(E_n) + \lambda(F_n)$$

entraîne

$$\lambda(F_n) = \lambda(E_1) - \lambda(E_n)$$

et

$$\lambda(E_1) = \lambda\left(\bigcap_{n\geq 2} E_n\right) + \lambda\left(E_1\ (\bigcap_{n\geq 2} E_n)^c\right)$$

entraîne

$$\lambda\left(E_1\ (\bigcap_{n\geq 2} E_n)^c\right) = \lambda(E_1) - \lambda\left(\bigcap_{n\geq 2} E_n\right).$$

Par suite,

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda(E_n) = \lambda\left(\bigcap_{n\geq 1} E_n\right).$$

L'hypothèse $\lambda(E_1) < +\infty$ est essentielle comme le montre l'exemple des ensembles $E_n = [n, +\infty[$ de mesure infinie et d'intersection totale vide.

14. Une fonction $\mu : \mathfrak{L} \to [0, +\infty]$ possède la propriété d'additivité finie si, pour toute suite disjointe finie $\{E_k\}_{1 \leq k \leq N}$,

$$\mu\left(\sum_{k=1}^{N} E_k\right) = \sum_{k=1}^{N} \mu(E_k).$$

Montrer qu'une fonction

$$\mu : \mathfrak{L} \to [0, +\infty]$$

est additive si et seulement si elle continue et possède la propriété d'additivité finie.

Solution. Il suffit de voir que les propriétés d'additivité finie et de continuité conjuguées impliquent la propriété d'additivité. Cela suit des égalités suivantes, la première découlant de la continuité et la deuxième de l'additivité finie :

$$\mu\left(\sum_{k=1}^{+\infty} E_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu\left(\sum_{k=1}^{n} E_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(E_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(E_k).$$

3 FONCTIONS MESURABLES

1. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction. Montrer qu'elle est mesurable si et seulement si les ensembles

$$\{x \mid f(x) > r\}$$

le sont pour tout $r \in \mathbb{Q}$.

Solution. Cette condition est évidemment nécessaire et elle est aussi suffisante parce que tout nombre réel α peut s'écrire comme la limite d'une suite décroissante de nombres rationnels r_n. On a

$$\{x \mid f(x) > \alpha\} = \bigcup_n \{x \mid f(x) > r_n\}.$$

2. Vérifier les relations suivantes :

$$\mathbb{I}_{EF} = \mathbb{I}_E \mathbb{I}_F \ , \ \mathbb{I}_{E+F} = \mathbb{I}_E + \mathbb{I}_F \ , \ \mathbb{I}_{E\cup F} = \mathbb{I}_E + \mathbb{I}_F - \mathbb{I}_{EF} \ , \ \mathbb{I}_{\bigcup_n E_n} = \sup \mathbb{I}_{E_n}.$$

Solution. On a par exemple que $\mathbb{I}_{\bigcup_n E_n}(x) = 1$ si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in E_n$ ce qui est vrai si et seulement si $\sup \mathbb{I}_{E_n}(x) = 1$.

3. Soit $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ une fonction monotone. Montrer qu'elle est mesurable.

   Solution. L'ensemble $\{x \mid f(x) > \alpha\}$ est un intervalle.

4. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable et $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $x \mapsto f(x + x_0)$ est mesurable.

   Solution. On a

$$\{x \mid f(x + x_0) > \alpha\} = \{y \mid f(y) > \alpha\} - x_0.$$

5. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable et $k \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $x \mapsto f(kx)$ est mesurable.

   Solution. Si $k = 0$, la fonction résultante est constante donc mesurable. Sinon,

$$\{x \mid f(kx) > \alpha\} = \frac{1}{k}\{y \mid f(y) > \alpha\}.$$

6. Soit $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ une fonction admettant une primitive (c'est-à-dire telle qu'il existe une fonction $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ dont elle est la dérivée : $f = F'$). Montrer qu'elle est mesurable.

   Solution. Soit $f(x) = F'(x)$. La fonction dérivable F est mesurable et

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} n \left(F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F(x) \right)$$

   est mesurable comme limite de fonctions mesurables.

7. Soient $E \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble de mesure finie et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer qu'à chaque $\epsilon > 0$ correspond $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\lambda\{x \mid |f(x)| > N\} < \epsilon.$$

   Solution. On peut écrire que

$$E = \sum_{k=1}^{+\infty} \{x \mid (n-1) \leq |f(x)| < n\}.$$

   La série

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda(\{x \mid (n-1) \leq |f(x)| < n\})$$

étant convergente, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{k \geq N} \lambda(\{x \mid (n-1) \leq |f(x)| < n\}) < \epsilon$$

c'est-à-dire tel que

$$\lambda(\{x \mid N-1 \leq |f(x)|\}) < \epsilon.$$

8. Montrer que toute fonction mesurable est limite simple d'une suite de fonctions mesurables étagées.

   Solution. Décomposons la fonction suivant ses parties positives et négatives :

   $$f = f_+ - f_-.$$

   Si les fonctions mesurables positives étagées φ_n croissent vers f_+ et les fonctions mesurables positives étagées ψ_n croissent vers f_-, la fonction mesurable étagée $\varphi_n - \psi_n$ converge simplement vers f.

9. Montrer que toute fonction mesurable bornée est limite uniforme d'une suite de fonctions mesurables étagées.

   Solution. On a

   $$f = \lim_{n \to +\infty} \varphi_n$$

   où

   $$\varphi_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \mathbb{I}_{E_{n,k}}$$

   et la convergence est uniforme en vertu des inégalités :

   $$0 \leq f - \varphi_n \leq \frac{1}{2^n}.$$

4 INTÉGRATION

1. Soit $f \in \mathfrak{L}^1(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x+x_0)$ est intégrable et

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+x_0)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx.$$

   Solution. La mesure étant invariante sous translation, la relation

   $$\mathbb{I}_E(x+x_0) = \mathbb{I}_{E-x_0}(x)$$

montre que l'énoncé est vrai si $f = \mathbb{I}_E$ est la fonction indicatrice d'un ensemble mesurable, donc, par linéarité, si $f = \varphi$ est une fonction mesurable positive étagée, donc, par convergence monotone, si f est positive, donc enfin, encore par linéarité, si f est une fonction intégrable quelconque.

2. Soit $f \in \mathfrak{L}^1(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, la fonction $x \mapsto f(kx)$ est intégrable et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(kx)\ dx = \frac{1}{|k|} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx.$$

Solution. Les relations

$$\mathbb{I}_E(kx) = \mathbb{I}_{1/k\ E}(x) \quad \text{et} \quad \lambda\left(\frac{1}{k}E\right) = \frac{1}{|k|}\lambda(E)$$

montrent que la relation est vraie successivement pour une fonction indicatrice, pour une fonction positive étagée, pour une fonction positive et pour une fonction intégrable.

3. Soit $f \in \mathfrak{L}^1(E)$. Montrer que, quel que soit $\epsilon > 0$, on peut trouver une fonction mesurable étagée φ telle que

$$\int_E |f - \varphi| < \epsilon.$$

Solution. Toute fonction mesurable positive est la limite d'une suite croissante de fonctions mesurables positives étagées. En vertu du théorème de la convergence monotone, il existe deux fonctions mesurables positives étagées φ et ψ telles que l'on ait

$$\int_E (f_+ - \varphi) < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{et} \quad \int_E (f_- - \psi) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Alors

$$\int_E |f - (\varphi - \psi)| = \int_E |(f_+ - \varphi) - (f_- - \psi)| < \epsilon.$$

4. Soient $f \in \mathfrak{L}^1(E)$ et $g : E \to \mathbb{R}$ une fonction coïncidant presque partout avec f. Montrer que $g \in \mathfrak{L}^1(E)$ et que $\int_E g = \int_E f$.

Solution. Soit $N \subseteq E$ un ensemble de mesure nulle à l'extérieur duquel f et g coïncident. Alors

$$\int_E |g| = \int_N |g| + \int_{EN^c} |g| = \int_{EN^c} |f| < +\infty$$

et

$$\int_E f - \int_E g = \int_E (f-g) = \int_{EN^c} (f-g) = 0.$$

5. Obtenir la propriété de continuité de la mesure à partir du théorème de la convergence monotone.

   Solution. Soient E_n des ensembles mesurables qui croissent vers $E = \bigcup_n E_n$. En appliquant le théorème de la convergence monotone aux fonctions $f_n = \mathbb{I}_{E_n}$ qui croissent vers $f = \mathbb{I}_E$, on obtient la propriété de continuité de la mesure : la mesure de E_n ($\int_{-\infty}^{+\infty} f_n$) croit vers celle de E ($\int_{-\infty}^{+\infty} f$).

6. Déduire le théorème de la convergence monotone du lemme de Fatou.

   Solution. Si les fonctions mesurables positives f_n croissent vers la fonction f sur E, le lemme de Fatou entraîne

$$\int_E f = \int_E \liminf_{n\to+\infty} f_n \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_E f_n \leq \int_E f.$$

7. Montrer que l'on peut avoir inégalité stricte dans le lemme de Fatou.

   Solution. Soit $E \subseteq [0,1]$ un ensemble mesurable tel que $0 < \lambda(E) < 1$. Soit

$$f_n(x) = \begin{cases} \mathbb{I}_E & \text{si } n \text{ est pair} \\ \mathbb{I}_{[0,1]E^c} & \text{si } n \text{ est impair .} \end{cases}$$

   Alors

$$\int_0^1 \liminf_{n\to+\infty} f_n = 0 \ , \ \liminf_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n = \inf \{\lambda(E), 1-\lambda(E)\} > 0.$$

8. Le lemme de Fatou reste-t-il vrai si on y remplace lim inf par lim sup ?

   Solution. Non. Pour les fonctions de l'exercice précédent,

$$\int_0^1 \limsup_{n\to+\infty} f_n = 1 \ , \ \limsup_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n = \sup \{\lambda(E), 1-\lambda(E)\} < 1.$$

9. Soit

$$f_n(x) = ne^{-n|x|}.$$

   Vérifier que, pour tout $x \neq 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0.$$

Calculer ensuite

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\ dx.$$

Solution. La fonction exponentielle croissant plus vite que toute puissance de son argument,

$$\lim_{n\to+\infty} ne^{-n|x|} = 0 \ \text{ si } \ x \neq 0.$$

Cependant l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ne^{-n|x|}\ dx = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-nx}\ ndx = 2$$

ne tend pas vers 0.

10. Vérifier que les fonctions

$$f_n = \frac{1}{n}\ \mathbb{I}_{[0,n^2]}$$

convergent vers 0 uniformément sur l'axe réel. Calculer ensuite

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n.$$

Solution. On a

$$\sup\{f_n(x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \frac{1}{n}.$$

Cependant l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n = n$$

tend vers $+\infty$.

11. Soit $f \in \mathfrak{L}^1(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{|x|>n} f = 0.$$

Solution. En vertu du théorème de la convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{|x|>n} f = \lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}_{[-n,n]}{}^{c} f = 0.$$

(La fonction majorante est $|f|$.)

12. Soit $f \in \mathfrak{L}^1(\mathbb{R})$. Est-il nécessairement vrai que

$$\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = 0?$$

Solution. Non. Voici un exemple d'une fonction continue dont le graphe est constitué de segments de droite (en nombre infini). Soit

$$f = \sum_{n=2}^{+\infty} f_n$$

où

$$f_n(x) = \begin{cases} n^4 \left(x - n + \dfrac{1}{n^3} \right) & \text{si} \quad n - \frac{1}{n^3} \leq x \leq n \\ n^4 \left(n + \dfrac{1}{n^3} - x \right) & \text{si} \quad n \leq x \leq n + \frac{1}{n^3} \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty \ , \ \limsup_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Remarque : on a bien entendu

$$\liminf_{x \to +\infty} |f(x)| = 0.$$

13. Soit $f \in \mathfrak{L}^1(\mathbb{R})$. Déterminer

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin^n x \ dx.$$

Solution. En vertu du théorème de la convergence dominée (fonction majorante : $|f|$), on a

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin^n x \ dx = 0$$

car

$$\lim_{n \to +\infty} \sin^n x = 0 \ \text{ presque partout sur } \mathbb{R}.$$

14. Calculer
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\ dx.$$

Solution. Les fonctions
$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$
croissent vers la fonction e^x donc les fonctions
$$\mathbb{I}_{[0,n]}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}$$
croissent vers la fonction e^{-x}. En vertu du théorème de la convergence monotone ou en vertu du théorème de la convergence majorée,
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\ dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1.$$

15. Montrer que
$$\lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{\sin x}{x}\ dx \quad \text{existe}$$
puis vérifier que
$$\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\ dx = +\infty.$$

Solution. En intégrant par parties,
$$\int_{\pi/2}^b \frac{\sin x}{x}\ dx = -\frac{\cos b}{b} - \int_{\pi/2}^b \frac{\cos x}{x^2}\ dx$$
de telle sorte
$$\lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{\sin x}{x}\ dx = \int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{x}\ dx - \int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}\ dx.$$
D'autre part, si l'on avait
$$\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\ dx < +\infty,$$
on en déduirait que
$$\int_\pi^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\ dx < +\infty$$

donc que

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos^2 y}{(y+\pi/2)}\ dy < +\infty$$

ce qui entraînerait

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos^2 y}{y}\ dy < +\infty$$

et

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{dx}{x} = \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x}\ dx + \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\ dx < +\infty$$

ce qui est absurde.

16. Soient $f_n : E \to \mathbb{R}$ des fonctions mesurables positives qui décroissent vers une fonction $f : E \to \mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n = \int_E f$$

pourvu que f_1 soit intégrable. Cette dernière condition est-elle indispensable ?

Solution. On applique le théorème de la convergence monotone aux fonctions $g_n = f_1 - f_n$. On obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E (f_1 - f_n) = \int_E (f_1 - f)$$

donc

$$\int_E f_1 - \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n = \int_E f_1 - \int_E f$$

ce qui permet de conclure. L'hypothèse que f_1 soit intégrable est essentielle comme le montre l'exemple des fonctions $f_n = \mathbb{I}_{[n,+\infty[}$.

17. Soient $f_n : E \to \mathbb{R}$ des fonctions intégrables qui croissent vers une fonction $f : E \to \mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n = \int_E f$$

pourvu qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que

$$\int_E f_n \leq K$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution. En vertu du théorème de la convergence monotone, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\int_E (f_n - f_1) = \int_E (f - f_1)$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty}\int_e f_n - \int_E f_1 = \int_E (f - f_1).$$

On en déduit que

$$\int_E (f - f_1) \leq K - \int_E f_1.$$

Ainsi les fonctions $f - f_1$ et $f = (f - f_1) + f_1$ sont intégrables et

$$\int_E (f - f_1) = \int_E f - \int_E f_1$$

ce qui permet de conclure.

18. Soient $f_n : E \to \mathbb{R}$ des fonctions mesurables positives qui convergent vers une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ de telle sorte que $f_n \leq f$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_E f_n = \int_E f.$$

Solution. En vertu du lemme de Fatou,

$$\int_E f = \int_E \liminf_{n\to+\infty} f_n \leq \liminf_{n\to+\infty}\int_E f_n \leq \limsup_{n\to+\infty}\int_E f_n \leq \int_E f.$$

19. Soient $f_n : E \to \mathbb{R}$ des fonctions intégrables telles que $|f_n| \leq g$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ où la fonction $g : E \to \mathbb{R}$ est intégrable. Montrer qu'alors

$$\int_E \liminf_{n\to+\infty} f_n \leq \liminf_{n\to+\infty}\int_E f_n \leq \limsup_{n\to+\infty}\int_E f_n \leq \int_E \limsup_{n\to+\infty} f_n.$$

Solution. En vertu du lemme de Fatou,

$$\int_E g + \int_E \liminf_{n\to+\infty} f_n = \int_E (g + \liminf_{n\to+\infty} f_n) = \int_E \liminf_{n\to+\infty}(g + f_n)$$
$$\leq \liminf_{n\to+\infty}\int_E (g + f_n) = \liminf_{n\to+\infty}(\int_E g + \int_E f_n) = \int_E g + \liminf_{n\to+\infty}\int_E f_n$$

ce qui montre que

$$\int_E \liminf_{n\to+\infty} f_n \leq \liminf_{n\to+\infty}\int_E f_n.$$

En remplaçant f_n par $-f_n$ dans ce raisonnement, on obtient

$$\int_E \liminf_{n\to+\infty}(-f_n) \le \liminf_{n\to+\infty} \int_E (-f_n)$$

c'est-à-dire

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_E f_n \le \int_E \limsup_{n\to+\infty} f_n.$$

20. Soient $f_n : E \to \mathbb{R}$ des fonctions mesurables qui convergent vers une fonction $f : E \to \mathbb{R}$, $g_n : E \to \mathbb{R}$ des fonctions intégrables qui convergent vers une fonction intégrable $g : E \to \mathbb{R}$ et supposons que $|f_n| \le g_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que dans ce cas

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n = \int_E f \quad \text{pourvu que} \quad \lim_{n\to+\infty} \int_E g_n = \int_E g.$$

Solution. En vertu du lemme de Fatou,

$$\int_E \liminf_{n\to+\infty} (g + g_n - |f - f_n|) \le \liminf_{n\to+\infty} \int_E (g + g_n - |f - f_n|)$$

donc

$$\int_E 2g \le \liminf_{n\to+\infty} (\int_E g + \int_E g_n - \int_E |f - f_n|)$$

c'est-à-dire

$$\int_E 2g \le \int_E g + \lim_{n\to+\infty} \int_E g_n - \limsup_{n\to+\infty} \int_E |f - f_n|$$

et

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_E |f - f_n| \le 0$$

ce qui permet de conclure.

21. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1}\, dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Solution. En intégrant terme à terme une série de fonctions positives,

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1 - e^{-x}}\, dx = \int_0^{+\infty} xe^{-x} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kx}\, dx$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} xe^{-(k+1)x}\, dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \int_0^{+\infty} ye^{-y}\, dy = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

22. Montrer que, quel que soit $t > 0$, la fonction $x \mapsto e^{-x}x^{t-1}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Solution. Puisque la fonction exponentielle croît plus vite que toute puissance de son argument, à chaque $t \in \mathbb{R}$ correspond $A_t > 0$ tel que

$$e^{-x}x^t \leq \frac{A_t}{x^2} \quad \text{si} \quad x \geq 1$$

de telle sorte que

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}x^{t-1}\, dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{A_{t-1}}{x^2}\, dx < +\infty.$$

D'autre part,

$$\int_0^1 e^{-x}x^{t-1}\, dx \leq \int_0^1 \frac{1}{x^{1-t}}\, dx < +\infty$$

puisque $t > 0$.

23. Justifier la dérivation sous le signe intégral :

$$\frac{d}{dt}\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{t-1}\, dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{t-1}\log x\, dx.$$

Solution. On a, en vertu du théorème des accroissements finis,

$$\left|\frac{e^{-x}x^{t+h+1} - e^{-x}x^{t-1}}{h}\right| = e^{-x}x^{t-1}\left|\frac{x^h - 1}{h}\right| = e^{-x}x^{t+\theta_x(t)h-1}|\log x|$$

où $\theta_x(t) \in [0, 1]$. Puisque le logarithme croît plus lentement que toute puissance de son argument, à chaque $\rho > 0$ correspond $B_\rho > 0$ tel que

$$\log y \leq B_\rho y^\rho \text{ si } \; y \geq 1$$

donc que

$$|\log y| \leq B_\rho y^{-\rho} \text{ si } \; y \leq 1.$$

On en déduit que

$$\left|\frac{e^{-x}x^{t+h+1} - e^{-x}x^{t-1}}{h}\right| \leq \begin{cases} B_1 e^{-x}x^{3t/2} & \text{si } x \geq 1 \\ B_{t/4}e^{-x}x^{t/4-1} & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

dès que $|h| \leq t/2$. Cette dernière fonction étant intégrable sur $[0, +\infty[$, le théorème de la convergence dominée est applicable.

5 ESPACES DE LEBESGUE

1. Soit $\phi : (a,b) \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer par récurrence sur n que, quels que soient $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a,b)$ et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in]0,1[$ tels que $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$, on a

$$\phi\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \phi(x_k)$$

(Inégalité de Jensen).

Solution. Le cas où $n = 2$ est exactement la définition de convexité. Supposant la formule pour n termes, on aura

$$\begin{aligned}
\phi\left(\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k\right) &= \phi\left((1-\alpha_{n+1})\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{1-\alpha_{n+1}} x_k + \alpha_{n+1} x_{n+1}\right) \\
&\leq (1-\alpha_{n+1})\phi\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{1-\alpha_{n+1}} x_k\right) + \alpha_{n+1}\phi(x_{n+1}) \\
&\leq \phi\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right) + \alpha_{n+1}\phi(x_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k \phi(x_k)
\end{aligned}$$

2. Obtenir l'inégalité entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique de n nombres positifs $a_1, a_2, \dots, a_n$,

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k,$$

en y précisant les conditions d'égalité.

Solution. L'inégalié à vérifier équivaut à

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \log a_k \leq \log\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$$

et suit donc de la concavité du logarithme et de l'inégalité de Jensen. Comme le logarithme est une fonction strictement concave , c'est-à-dire que

$$\log(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) > \alpha \log x_1 + (1-\alpha)\log x_2$$

si $x_1 < \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 < x_2$ (parce que sa dérivée est strictement croissante), on ne peut avoir égalité dans l'inégalité précédente que si

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n.$$

3. Soit $\phi : (a,b) \to \mathbb{R}$ une fonction convexe dérivable. Montrer que son graphe $y = \phi(x)$ est entièrement situé au-dessus de n'importe laquelle de ses tangentes $y = \phi(x_0) + \phi'(x_0)(x - x_0)$.

   Solution. On a vu que si $x_1 < x_2$,

$$\phi'(x_1) \leq \frac{\phi(x_2) - \phi(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \phi'(x_2).$$

   Si $x > x_0$, l'inégalité

$$\phi(x) \geq \phi(x_0) + \phi'(x_0)(x - x_0)$$

   en découle en choisissant $x_1 = x_0$ et $x_2 = x$ dans l'inégalité de gauche alors que si $x < x_0$, elle suit de l'inégalité de droite en y faisant $x_1 = x$ et $x_2 = x_0$.

4. Discuter le cas d'égalité dans l'inégalité de Hölder (lorsque $1 < p < +\infty$).

   Solution. Si $\|fg\|_1 = \|f\|_p \|g\|_q$, il faut nécessairement que

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_q} = \frac{1}{p}\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_q}\right)^q$$

   presque partout sur E donc, étant donnée la concavité stricte du logarithme, que

$$\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\right)^p = \left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_q}\right)^q$$

   presque partout sur E. Cette condition est évidemment suffisante.

5. Soient $1 < p, q, r < +\infty$ des nombres tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$$

   et

$$f \in \mathfrak{L}^p(\mathbb{R}), g \in \mathfrak{L}^q(\mathbb{R}), h \in \mathfrak{L}^r(\mathbb{R}).$$

   Montrer que $fgh \in \mathfrak{L}^1(\mathbb{R})$ et que

$$\|fgh\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_r.$$

Solution. Appliquant l'inégalité de Jensen avec $n = 3$ au logarithme puis passant aux exponentielles, on obtient

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} \leq \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3.$$

Le choix

$$x_1 = \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} \ , \alpha_1 = \frac{1}{p} \ , \ x_2 = \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q} \ , \alpha_2 = \frac{1}{q} \ , \ x_3 = \frac{|h|^r}{\|h\|_r^r} \ , \alpha_3 = \frac{1}{r}$$

puis une intégration sur E conduisent au résultat.

6. Montrer que, si $f \in \mathfrak{L}^\infty([a, b])$,

$$\|f\|_\infty = \lim_{p \to +\infty} \|f\|_p.$$

Solution. On a évidemment

$$\left(\int_a^b |f|^p \right)^{1/p} \leq \|f\|_\infty (b - a)^{1/p}$$

donc

$$\limsup_{p \to +\infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty.$$

D'autre part, soit

$$E = \{x \mid |f(x)| > (\|f\|_\infty - \epsilon)\}.$$

Alors $\lambda(E) > 0$ et

$$\left(\int_a^b |f|^p \right)^{1/p} \geq \left(\int_E |f|^p \right)^{1/p} \geq (\|f\|_\infty - \epsilon)\lambda(E)^{1/p}.$$

Par suite,

$$\liminf_{p \to +\infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty.$$

7. Soient $f \in \mathfrak{L}^p([0, +\infty[\ )$ et $g \in \mathfrak{L}^q([0, +\infty[\ )$ où $1 \leq p, q \leq +\infty$ sont conjugués. Calculer

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(s) g(s) \ ds.$$

Solution. Puisque

$$\left|\int_0^T fg\right| \leq \left(\int_0^T |f|^p\right)^{1/p} \left(\int_0^T |g|^q\right)^{1/q} \leq \|f\|_p \|g\|_q,$$

on a

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(s)g(s)\ ds = 0.$$

8. Soit $f : [0, A] \to \mathbb{R}$ une fonction s'annulant à l'origine et admettant une dérivée continue. Montrer que, quel que soit $p \geq 1$, on a

$$\|f\|_p \leq \frac{A}{p^{1/p}}\|f'\|_p.$$

L'égalité est-elle possible ?

Solution. On a

$$|f(x)| = \left|\int_0^x f'(t)\ dt\right| \leq \left(\int_0^x |f'(t)|^p\ dt\right)^{1/p} x^{1/q}$$

de telle sorte que

$$\int_0^A |f(x)|^p\ dx \leq \int_0^A |f'(t)|^p\ dt \int_0^A x^{p/q}\ dx$$

et

$$\|f\|_p \leq \|f'\|_p \frac{A}{p^{1/p}}.$$

L'égalité aura lieu si et seulement si $f(x) = cx$ et $p = +\infty$.

9. Montrer que $\mathfrak{L}^2(\mathbb{R}) \not\subseteq \mathfrak{L}^1(\mathbb{R})$ et que $\mathfrak{L}^1([0,1]) \not\subseteq \mathfrak{L}^2([0,1])$.

Solution. Par exemple,

$$\frac{1}{1+|x|} \in \mathfrak{L}^2(\mathbb{R}) \setminus \mathfrak{L}^1(\mathbb{R})$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \in \mathfrak{L}^1([0,1]) \setminus \mathfrak{L}^2([0,1]).$$

10. Discuter le cas d'égalité dans l'inégalité de Minkowski (lorsque $1 < p < +\infty$).

    Solution. Si $\|f+g\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p$, il faut que $|f+g| = |f| + |g|$ presque partout sur E et que

    $$\frac{|f|}{|f+g|} \quad \text{et} \quad \frac{|g|}{|f+g|}$$

    soient constantes presque partout sur E. La première condition entraîne que $f/g > 0$ presque partout sur E et la seconde, que $|f/g|$ est constante presque partout sur E. Ainsi il faut (et il suffit, bien sûr) que $f/g = c > 0$ presque partout sur E.

11. Soient $f, g \in \mathfrak{L}^2(E)$. Montrer que

    $$\|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 = \frac{1}{2}(\|f+g\|_2^2 + \|f-g\|_2^2)$$

    (identité du parallélogramme).

    Solution. On a

    $$\begin{aligned}\|f+g\|_2^2 + \|f-g\|_2^2 &=< f+g, f+g > + < f-g, f-g > \\ &= \|f\|_2^2 + 2 < f, g > + \|g\|_2^2 + \|f\|_2^2 - 2 < f, g > + \|g\|_2^2.\end{aligned}$$

12. Soit $0 < p < 1$. Montrer que si $f, g \in \mathfrak{L}^p(E)$, alors $f + g \in \mathfrak{L}^p(E)$ mais que l'inégalité

    $$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

    n'est plus nécessairement satisfaite.

    Solution. On a

    $$|f+g|^p \leq (|f| + |g|)^p \leq (2\sup\{|f|, |g|\})^p \leq 2^p(|f|^p + |g|^p)$$

    de telle sorte que

    $$\|f+g\|_p^p \leq 2^p(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p).$$

    Cette inégalité peut devenir une égalité, par exemple, dans l'espace $\mathfrak{L}^{1/2}([0,1])$, pour les fonctions

    $$f = \mathbb{I}_{(0,1/2)} \quad \text{et} \quad g = \mathbb{I}_{(1/2,1)}.$$

13. On considère les fonctions $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définies par

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^{\alpha+\beta}x & \text{si} \quad 0 \le x \le 1/(2n^\alpha) \\ 2n^\beta(1-n^\alpha x) & \text{si} \quad 1/(2n^\alpha) \le x \le 1/n^\alpha \\ 0 & \text{si} \quad 1/n^\alpha \le x \le 1. \end{cases}$$

Montrer qu'elles convergent vers 0 en chaque point $x \in [0,1]$. Déterminer les valeurs de p pour lesquelles elles convergent au sens de $\mathfrak{L}^p([0,1])$.

Solution. Quel que soit $x \in]0,1[$, on a

$$f_n(x) = 0 \text{ dès que } n > \frac{1}{x^{1/\alpha}}.$$

D'autre part,

$$\int_0^1 f_n^p = \frac{n^{p\,\beta-\alpha}}{p+1}$$

ce qui tend vers 0 si et seulement si $p < \alpha/\beta$.

14. On dit d'une suite de fonctions mesurables $f_n : E \to \mathbb{R}$ qu'elles **convergent en mesure** sur E vers une fonction mesurable $f : E \to \mathbb{R}$ si, quel que soit $\delta > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda\{x \mid |f_n(x) - f(x)| > \delta\} = 0.$$

Montrer que la convergence au sens de $\mathfrak{L}^p(E)$ $(1 \le p \le +\infty)$ entraîne la convergence en mesure.

Solution. Soit $E_{\delta,n} = \{x \mid |f_n(x) - f(x)| > \delta\}$.
Si $1 \le p < +\infty$,

$$\left(\int_E |f_n - f|^p\right)^{1/p} \ge \left(\int_{E_{\delta,n}} |f_n - f|^p\right)^{1/p} \ge \delta\lambda(E_{\delta,n}).$$

(Inégalité de Tchebychev).
Si $p = +\infty$, $\lambda(E_{\delta,n}) = 0$ dès que $\|f_n - f\|_p < \delta$.

15. Soient $1 \le p, q \le +\infty$ des exposants conjugués, $f_n \in \mathfrak{L}^p(E)$ des fonctions qui convergent au sens de $\mathfrak{L}^p(E)$ vers une fonction $f \in \mathfrak{L}^p(E)$ et $g_n \in \mathfrak{L}^q(E)$ des fonctions qui convergent au sens de $\mathfrak{L}^q(E)$ vers une fonction $g \in \mathfrak{L}^q(E)$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n g_n = \int_E fg.$$

Solution. Le résultat suit des inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}\int_E |f_n g_n - fg| &\leq \int_E |f_n - f||g_n| + \int_E |f||g_n - g| \\ &\leq \|f_n - f\|_p \|g_n\|_q + \|f\|_p \|g_n - g\|_q\end{aligned}$$

et du fait que

$$\lim_{n \to +\infty} \|g_n\|_q = \|g\|_q.$$

16. Montrer que les fonctions $f_n(x) = \sin nx$ forment dans l'espace $\mathfrak{L}^2([-\pi, \pi])$ une suite bornée ($\|f_n\|_2$ restent bornées) qui n'admet aucune suite partielle convergente (au sens de $\mathfrak{L}^2([-\pi, \pi])$).

Solution. D'une part

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2 nx \; dx = \pi.$$

D'autre part,

$$\int_{-\pi}^{+\pi} (\sin nx - \sin mx)^2 \; dx = 2\pi.$$

17. Soient $f_n \in \mathfrak{L}^p(E)$ des fonctions qui convergent simplement (ponctuellement) vers une fonction $f \in \mathfrak{L}^p(E)$. Montrer qu'elles convergent au sens de $\mathfrak{L}^p(E)$ $(1 \leq p < +\infty)$ si et seulement si

$$\lim_{n \to +\infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p.$$

Solution. La condition est évidemment nécessaire puisque

$$|\|f_n\|_p - \|f\|_p| \leq \|f_n - f\|_p.$$

Pour démontrer l'implication réciproque, on utilise le fait que les fonctions $|f_n - f|^p$ tendent vers 0 en restant majorées par les fonctions $2^p(|f_n|^p + |f|^p)$ qui tendent, elles, vers $2^{p+1}|f|^p$. Comme

$$\lim_{n \to +\infty} \int_E 2^p(|f_n|^p + |f|^p) = \int_E 2^{p+1}|f|^p$$

par hypothèse, le résultat d'un exercice précédent implique

$$\lim_{n \to +\infty} \int_E |f_n - f|^p = \int_E 0 = 0.$$

18. Soit $f \in \mathfrak{L}^p(\mathbb{R})$ $(1 \leq p < +\infty)$. Montrer que

$$\lim_{h\to 0}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h) - f(x)|^p \ dx\right)^{1/p} = 0.$$

Solution. On sait que, quel que soit $h \in \mathbb{R}$, la fonction $x \to |f(x+h)|^p$ est intégrable et que

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h)|^p \ dx\right)^{1/p} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p \ dx\right)^{1/p}.$$

Si $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, on aura

$$\lim_{h\to 0}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h) - f(x)|^p \ dx\right)^{1/p} = 0$$

en vertu du théorème de la convergence dominée. Dans le cas général, soit $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ une fonction telle que

$$\|f - g\|_p < \frac{\epsilon}{3}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h) - f(x)|^p \ dx\right)^{1/p} \\
\leq &\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h) - g(x+h)|^p \ dx\right)^{1/p} + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x+h) - g(x)|^p \ dx\right)^{1/p} \\
&+ \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x) - f(x)|^p \ dx\right)^{1/p} \\
&< \frac{\epsilon}{3} + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x+h) - g(x)|^p \ dx\right)^{1/p} + \frac{\epsilon}{3} < \epsilon
\end{aligned}$$

dès que $|h|$ est assez petit.

19. Soient $1 \leq p, q \leq +\infty$ des exposants conjugués, $f \in \mathfrak{L}^p(\mathbb{R}), g \in \mathfrak{L}^q(\mathbb{R})$ et

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t) \ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) \ dt$$

leur produit de convolution. Montrer que h est une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

Solution. On peut supposer que $p < +\infty$ (autrement, on intervertit les rôles des fonctions f et g). On sait que, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \to |f(x-t)|^p$ est intégrable et que

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t)|^p \, dt\right)^{1/p} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^p \, dt\right)^{1/p}.$$

En vertu de l'inégalité de Hölder, la fonction h est bien définie et

$$\|h\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

De plus, elle est (uniformément) continue sur $\mathbb{R}$ car

$$|h(x) - h(y)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t) - f(y-t)||g(t)| \, dt$$
$$\leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t) - f(y-t)|^p \, dt\right)^{1/p} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^q \, dt\right)^{1/q}$$

ce qui tend vers 0 lorsque x tend vers y en vertu de l'exercice précédent.

6 DÉRIVATION

1. Vérifier qu'une fonction $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ est à variation bornée si et seulement si son graphe est **rectifiable**, c'est-à-dire si et seulement si les sommes

$$\sigma(\phi, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\phi(x_k) - \phi(x_{k-1}))^2 + (x_k - x_{k-1})^2}$$

restent bornées quelle que soit la partition $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de l'intervalle $[a, b]$.

Solution. On a

$$|\phi(x_k) - \phi(x_{k-1})| \leq \sqrt{(\phi(x_k) - \phi(x_{k-1}))^2 + (x_k - x_{k-1})^2}$$
$$\leq |\phi(x_k) - \phi(x_{k-1})| + (x_k - x_{k-1})$$

donc

$$s(\phi, \mathcal{P}) \leq \sigma(\phi, \mathcal{P}) \leq s(\phi, \mathcal{P}) + (b - a).$$

2. Soit $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction à variation bornée. Si $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ est une partition de l'intervalle $[a,b]$, soient

$$p(\phi, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} (\phi(x_k) - \phi(x_{k-1}))_+,$$
$$n(\phi, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} (\phi(x_k) - \phi(x_{k-1}))_-$$

et posons

$$\mathrm{pos}(\phi, [a,b]) = \sup_{\mathcal{P}} \{p(\phi, \mathcal{P})\} \ ,$$
$$\mathrm{neg}(\phi, [a,b]) = \sup_{\mathcal{P}} \{n(\phi, \mathcal{P})\}.$$

Montrer que

$$\mathrm{pos}(\phi, [a,b]) - \mathrm{neg}(\phi, [a,b]) = \phi(b) - \phi(a),$$

et que

$$\mathrm{pos}(\phi, [a,b]) + \mathrm{neg}(\phi, [a,b]) = \mathrm{var}(\phi, [a,b]).$$

Solution. On a

$$\phi(b) - \phi(a) = \sum_{k=1}^{n} (\phi(x_k) - \phi(x_{k-1}))$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (\phi(x_k) - \phi(x_{k-1}))_+ - \sum_{k=1}^{n} (\phi(x_k) - \phi(x_{k-1}))_-$$
$$= p(\phi, \mathcal{P}) - n(\phi, \mathcal{P}).$$

La relation

$$p(\phi, \mathcal{P}) = n(\phi, \mathcal{P}) + (\phi(b) - \phi(a))$$

implique

$$\mathrm{pos}(\phi, [a,b]) \leq \mathrm{neg}(\phi, [a,b]) + (\phi(b) - \phi(a))$$

et la relation

$$n(\phi, \mathcal{P}) = p(\phi, \mathcal{P}) - (\phi(b) - \phi(a))$$

implique

$$\mathrm{neg}(\phi, [a,b]) \leq \mathrm{pos}(\phi, [a,b]) - (\phi(b) - \phi(a))$$

ce qui démontre la première équation.

Pour démontrer la seconde, observons d'abord que

$$s(\phi,\mathcal{P}) = p(\phi,\mathcal{P}) + n(\phi,\mathcal{P}) \leq \mathrm{pos}(\phi,[a,b]) + \mathrm{neg}(\phi,[a,b])$$

donc que

$$\mathrm{var}(\phi,[a,b]) \leq \mathrm{pos}(\phi,[a,b]) + \mathrm{neg}(\phi,[a,b]).$$

D'autre part, en vertu de ce qui précède,

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(\phi,[a,b]) \geq s(\phi,\mathcal{P}) &= p(\phi,\mathcal{P}) + n(\phi,\mathcal{P}) \\ &= 2\,p(\phi,\mathcal{P}) - (\phi(b)-\phi(a)) \\ &= 2\,p(\phi,\mathcal{P}) - (\mathrm{pos}(\phi,[a,b]) - \mathrm{neg}(\phi,[a,b]))\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(\phi,[a,b]) &\geq 2\,\mathrm{pos}(\phi,[a,b]) - (\mathrm{pos}(\phi,[a,b]) - \mathrm{neg}(\phi,[a,b])) \\ &= \mathrm{pos}(\phi,[a,b]) + \mathrm{neg}(\phi,[a,b]).\end{aligned}$$

3. Soit $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction à variation bornée. Supposons que $\phi = g - h$ en soit une représentation comme la différence de deux fonctions croissantes sur $[a,b]$ et posons

$$P(x) = \mathrm{pos}(\phi,[a,x])\ ,\ N(x) = \mathrm{neg}(\phi,[a,x]).$$

Vérifier que P et N sont croissantes sur $[a,b]$ et que

$$\mathrm{var}(P,[a,b]) \leq \mathrm{var}(g,[a,b])\ ,\ \mathrm{var}(N,[a,b]) \leq \mathrm{var}(h,[a,b]).$$

Solution. En vertu de l'exercice précédent,

$$P(x) = \frac{1}{2}\,(V(x) + \phi(x) - \phi(a)) \quad \text{et} \quad N(x) = \frac{1}{2}\,(V(x) - \phi(x) + \phi(a))$$

ce qui montre que P et N sont croissantes. Puisque

$$V(b) \leq (g(b) - g(a)) + (h(b) - h(a)),$$

on a

$$\frac{1}{2}\,(V(b) + g(b) - h(b) - g(a) + h(a)) \leq g(b) - g(a)$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{var}(P,[a,b]) = P(b) \leq g(b) - g(a) = \mathrm{var}(g,[a,b]).$$

L'inégalité

$$\mathrm{var}(N,[a,b]) \leq \mathrm{var}(h,[a,b])$$

s'établit de façon semblable.

4. Vérifier que la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x^{-1/3} & \text{si } \; x \neq 0, \\ 0 & \text{si } \; x = 0. \end{cases}$$

est intégrable sur $[-1, 1]$ et déterminer la variation de son intégrale définie

$$F(x) = \int_{-1}^{x} f(t) \; dt$$

sur cet intervalle.

Solution. La fonction f étant impaire,

$$\int_{-1}^{1} |f(x)| \; dx = 2 \int_{0}^{1} x^{-1/3} \; dx = 3.$$

La fonction

$$F(x) = \frac{3}{2}(x^{2/3} - 1)$$

étant paire, décroissante sur $[-1, 0]$ et croissante sur $[0, 1]$ et la variation étant une fonction additive de l'intervalle,

$$\begin{aligned} \operatorname{var}(F, [-1, 1]) &= \operatorname{var}(F, [-1, 0]) + \operatorname{var}(F, [0, 1]) \\ &= 2 \operatorname{var}(F, [0, 1]) = 2(F(1) - F(0)) = 3. \end{aligned}$$

5. Montrer que la fonction continue $\phi(x)$ qui coïncide avec $x \; \sin 1/x$ lorsque $x \neq 0$ n'est à variation bornée sur aucun intervalle contenant 0.

Solution. En vertu de l'additivité finie de la variation et du fait que la fonction considérée est paire, il suffit de voir que la variation de ϕ sur l'intervalle $[0, 2/\pi]$ (par exemple) est infinie. Considérons la partition particulière $\mathcal{P}_n$

$$\mathcal{P}_n = \{0, \frac{2}{(2n+1)\pi}, \frac{2}{(2n-1)\pi}, \ldots, \frac{2}{3\pi}, \frac{2}{\pi}\}.$$

Pour la somme correspondante, on a

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} \left| \frac{2}{(2k+1)\pi} \sin \frac{(2k+1)\pi}{2} - \frac{2}{(2k-1)\pi} \sin \frac{(2k-1)\pi}{2} \right| \\ &+ \left| \frac{2}{(2n+1)\pi} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2} \right| \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{\pi} \frac{4k}{(2k+1)(2k-1)} \end{aligned}$$

ce qui tend vers $+\infty$ avec n.

6. Représenter sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ la fonction $\sin x$ comme la différence de deux fonctions croissantes.

   Solution. En utilisant l'additivité finie de la variation, on obtient pour la variation $V(x)$ associée à la fonction $\sin x$ l'expression

$$V(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } \ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 2 - \sin x & \text{si } \ \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \\ 4 + \sin x & \text{si } \ \frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

   et

$$\sin x = V(x) - (V(x) - \sin x)$$

   est une représentation possible.

7. Soit $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, q_3, \ldots\}$ une énumération des nombres rationnels. Montrer que la fonction

$$\phi(x) = \sum_{q_n < x} \frac{1}{2^n}$$

   est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et discontinue sur $\mathbb{Q}$.

   Solution. La série

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 1$$

   étant convergente, la fonction est bien définie. Si $x_1 < x_2$, il existe un nombre rationnel q_m entre x_1 et x_2. Donc

$$\phi(x_1) < \phi(x_2).$$

   D'autre part, en chaque point rationnel q_m, on a

$$\lim_{h \downarrow 0} \phi(q_m + h) = \lim_{h \downarrow 0} \sum_{q_n < q_m + h} \frac{1}{2^n} \geq \frac{1}{2^m} + \sum_{q_n < q_m} \frac{1}{2^n} \geq \frac{1}{2^m} + \lim_{h \downarrow 0} \phi(q_m - h)$$

   de telle sorte que ϕ fait un saut de 2^{-m} en q_m (la somme des sauts doit être égale à 1).

8. Soit $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction à variation bornée. Montrer que $|\phi|$ est aussi à variation bornée sur $[a, b]$ et que

$$\mathrm{var}(|\phi|, [a, b]) \leq \mathrm{var}(\phi, [a, b]).$$

En déduire l'inégalité

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b |\phi| \leq |\phi(a)| + \mathrm{var}(|\phi|, [a,b]).$$

Solution. La première inégalité découle de la relation :

$$|\,|u| - |v|\,| \leq |u-v|.$$

Pour démontrer la seconde, écrivons

$$|\phi|(x) = W(x) - k(x)$$

où $W(x)$ est la variation de $|\phi|$ sur l'intervalle $[a,x]$ et k est une fonction croissante. On en tire

$$\int_a^b |\phi| \leq \int_a^b (W(b) - k(a))\ dx = (\mathrm{var}(|\phi|, [a,b]) + |\phi(a)|)(b-a).$$

9. Soit $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ la limite d'une suite de fonctions $\phi_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ à variation bornée. Montrer que

$$\mathrm{var}(\phi, [a,b]) \leq \liminf_{n\to+\infty} \mathrm{var}(\phi_n, [a,b]).$$

Solution. Pour toute partition $\mathcal{P}$ de l'intervalle $[a,b]$,

$$s(\phi, \mathcal{P}) = \lim_{n\to+\infty} s(\phi_n, \mathcal{P})$$

donc

$$s(\phi, \mathcal{P}) \leq \liminf_{n\to+\infty} \mathrm{var}(\phi_n, [a,b])$$

et

$$\mathrm{var}(\phi, [a,b]) \leq \liminf_{n\to+\infty} \mathrm{var}(\phi_n, [a,b]).$$

10. Calculer les nombres de Dini $D^+\phi(0), D_+\phi(0), D^-\phi(0)$ et $D_-\phi(0)$ pour la fonction

$$\phi = (\mathbb{I}_{\mathbb{Q}^c\ ]-\infty,0]} + 2\ \mathbb{I}_{\mathbb{Q}^c\ ]0,+\infty[}) - (\mathbb{I}_{\mathbb{Q}\ ]-\infty,0]} + 2\ \mathbb{I}_{\mathbb{Q}\ ]0,+\infty[}).$$

Solution. On a

$$D^+\phi(0) = \limsup_{h\downarrow 0} \frac{\phi(h)-\phi(0)}{h} = \limsup_{h\downarrow 0} \frac{\phi(h)+1}{h} = +\infty,$$

et de façon semblable

$$D_+\phi(0) = -\infty\ ,\ D^-\phi(0) = +\infty\ ,\ D_-\phi(0) = 0.$$

---

11. Montrer qu'une fonction est absolument continue sur tout intervalle dans lequel elle admet une dérivée bornée.

Solution. En vertu du théorème des accroissements finis, quels que soient u, w dans l'intervalle $[a, b]$ où la fonction ϕ admet une dérivée bornée, il existe $v \in]u, w[$ tel que

$$\phi(w) - \phi(u) = \phi'(v)(w - u).$$

Par suite,

$$\sum_{k=1}^{n} |\phi(x_k) - \phi(x_{k-1})| \leq \|\phi'\|_\infty \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}).$$

12. Montrer que la fonction continue $\phi(x)$ qui coïncide avec $x^2 \sin 1/x$ lorsque $x \neq 0$ est absolument continue.

Solution. Application de l'exercice précédent. Si $x \neq 0$,

$$\phi'(x) = 2\,x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

alors que

$$\phi'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin 1/x}{x} = 0.$$

13. Soit $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. Montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme $\phi = \phi_{ac} + \phi_s$ où ϕ_{ac} est croissante absolument continue et ϕ_s est croissante **singulière**, c'est-à-dire telle que $\phi_s' = 0$ presque partout sur $[a, b]$.

Solution. La fonction

$$\phi_{\mathrm{ac}}(x) = \int_a^x \phi'(t)\ dt$$

est croissante, absolument continue et

$$\phi_{\mathrm{ac}}'(x) = \phi'(x)$$

presque partout sur l'intervalle $[a, b]$. La relation

$$\int_{x_1}^{x_2} \phi'(t)\ dt \leq \phi(x_2) - \phi(x_1)$$

montre d'autre part que la fonction

$$\phi_{\mathrm{s}}(x) = \phi(x) - \phi_{\mathrm{ac}}(x)$$

est croissante.

14. Montrer qu'une fonction convexe $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est absolument continue sur tout intervalle compact $[a, b]$.

Solution. On sait que si $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$,

$$\frac{\phi(x_2) - \phi(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{\phi(x_3) - \phi(x_2)}{x_3 - x_2} \leq \frac{\phi(x_4) - \phi(x_3)}{x_4 - x_3}$$

de telle sorte que si $a \leq x < y \leq b$,

$$\phi(a-1) - \phi(a-2) \leq \frac{\phi(y) - \phi(x)}{y - x} \leq \phi(b+2) - \phi(b+1).$$

On en déduit que

$$\frac{|\phi(y) - \phi(x)|}{|y - x|} \leq \sup\{|\phi(a-1) - \phi(a-2)|, |\phi(b+2) - \phi(b+1)|\} = K.$$

Ainsi, quelle que soit la partition $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de l'intervalle $[a, b]$,

$$\sum_{k=1}^{n} |\phi(x_k) - \phi(x_{k-1})| \leq K(b - a).$$

15. Soit $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction absolument continue. Montrer que

$$\operatorname{var}(\phi, [a, b]) = \int_a^b |\phi'(x)| \, dx.$$

Solution. Supposons d'abord que ϕ' soit continue. Soit $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ une partition quelconque de l'intervalle $[a, b]$. Alors, en vertu du théorème des accroissements finis, il existe des points $y_1, y_2, \ldots, y_n$ tels que

$$\sum_{k=1}^{n} |\phi(x_k) - \phi(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} |\phi'(y_k)|(x_k - x_{k-1})$$

de telle sorte que

$$\sum_{k=1}^{n} \inf\left\{|\phi'(x)| \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k\right\}(x_k - x_{k-1})$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n} |\phi(x_k) - \phi(x_{k-1})|$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n} \sup\left\{|\phi'(x)| \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k\right\}(x_k - x_{k-1}).$$

Puisque

$$\int_a^b |\phi'| = \sup\left\{ \sum_{k=1}^n \inf\left\{|\phi'(x)| \mid x_{k-1} \le x \le x_k\right\}(x_k - x_{k-1})\} \mid \mathcal{P}\right\}$$
$$= \inf\left\{ \sum_{k=1}^n \sup\left\{|\phi'(x)| \mid x_{k-1} \le x \le x_k\right\}(x_k - x_{k-1})\} \mid \mathcal{P}\right\}$$

on peut choisir une partition $\mathcal{P}$ telle que

$$\sum_{k=1}^n \sup\left\{|\phi'(x)| \mid x_{k-1} \le x \le x_k\right\}(x_k - x_{k-1})$$
$$-\sum_{k=1}^n \inf\left\{|\phi'(x)| \mid x_{k-1} \le x \le x_k\right\}(x_k - x_{k-1}) < \epsilon,$$

ce qui implique que

$$\left|\operatorname{var}(\phi, [a,b]) - \int_a^b |\phi'|\right| \le \epsilon$$

donc que

$$\operatorname{var}(\phi, [a,b]) = \int_a^b |\phi'|$$

dans ce cas.
Dans le cas général, introduisons une fonction $g \in C([a,b])$ telle que

$$\int_a^b |\phi' - g| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Pour la fonction

$$G(x) = \phi(a) + \int_a^x g(t)\ dt,$$

on a

$$\operatorname{var}(G, [a,b]) = \int_a^b |g|.$$

Maintenant,

$$\left|\sum_{k=1}^n |\phi(x_k) - \phi(x_{k-1})| - \sum_{k=1}^n |G(x_k) - G(x_{k-1})|\right|$$
$$\le \sum_{k=1}^n |(\phi(x_k) - \phi(x_{k-1})) - (G(x_k) - G(x_{k-1}))|$$
$$= \sum_{k=1}^n \left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} (\phi' - g)\right| \le \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |\phi' - g| < \frac{\epsilon}{2}.$$

On en déduit que

$$|\mathrm{var}(\phi, [a,b]) - \mathrm{var}(G, [a,b])| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

puis que

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{var}(\phi, [a,b]) - \int_a^b |\phi'|\right| &\leq |\mathrm{var}(\phi, [a,b]) - \mathrm{var}(G, [a,b])| \\ &+ \left|\mathrm{var}(G, [a,b]) - \int_a^b |g|\right| + \left|\int_a^b |g| - \int_a^b |\phi'|\right| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + 0 + \int_a^b |\phi' - g| < \epsilon\end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$\mathrm{var}(\phi, [a,b]) = \int_a^b |\phi'|.$$

16. Soient $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction absolument continue et

$$\ell_\phi = \sup\{\sigma(\phi, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P}\}$$

la longueur de son graphe. Montrer que

$$\ell_\phi = \int_a^b \sqrt{1 + \phi'(x)^2}\, dx.$$

Solution. Supposons d'abord que ϕ' soit continue. Soit $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ une partition quelconque de l'intervalle $[a,b]$. Alors, en vertu du théorème des accroissements finis, il existe des points $y_1, y_2, \ldots, y_n$ tels que

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{(\phi(x_k) - \phi(x_{k-1}))^2 + (x_k - x_{k-1})^2} = \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \phi'(y_k)^2}(x_k - x_{k-1})$$

donc

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^n \inf\left\{\sqrt{1 + \phi'(x)^2} \mid x_{k-1}| \leq x \leq x_k\right\} \\ &\leq \sum_{k=1}^n \sqrt{(\phi(x_k) - \phi(x_{k-1}))^2 + (x_k - x_{k-1})^2} \\ &\leq \sum_{k=1}^n \sup\left\{\sqrt{1 + \phi'(x)^2} \mid x_{k-1}| \leq x \leq x_k\right\}.\end{aligned}$$

La partition $\mathcal{P}$ étant arbitraire, on en déduit comme dans l'exercice précédent que

$$\ell_\phi = \int_a^b \sqrt{1+\phi'^2}$$

dans ce cas.

Dans le cas général, introduisons une fonction $g \in C([a,b])$ telle que

$$\int_a^b |\phi' - g| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Pour la fonction

$$G(x) = \phi(a) + \int_a^x g(t)\ dt,$$

on a

$$\ell_G = \int_a^b \sqrt{1+g^2}.$$

Maintenant, en utilisant la relation

$$|\sqrt{u} - \sqrt{v}| = \frac{|u-v|}{\sqrt{u}+\sqrt{v}},$$

on voit que

$$\Big| \sum_{k=1}^n \sqrt{(\phi(x_k)-\phi(x_{k-1}))^2 + (x_k - x_{k-1})^2}$$
$$- \sum_{k=1}^n \sqrt{(G(x_k)-G(x_{k-1}))^2 + (x_k - x_{k-1})^2} \Big|$$
$$\leq \sum_{k=1}^n \frac{|(\phi(x_k)-\phi(x_{k-1}))^2 - (G(x_k)-G(x_{k-1}))^2|}{\sqrt{(\phi(x_k)-\phi(x_{k-1}))^2 + (x_k - x_{k-1})^2} + \sqrt{(G(x_k)-G(x_{k-1}))^2 + (x_k - x_{k-1})^2}}$$
$$\leq \sum_{k=1}^n \frac{|(\phi(x_k)-\phi(x_{k-1}))^2 - (G(x_k)-G(x_{k-1}))^2|}{|\phi(x_k)-\phi(x_{k-1})| + |G(x_k)-G(x_{k-1})|}$$
$$\leq \sum_{k=1}^n |(\phi(x_k)-\phi(x_{k-1})) - (G(x_k)-G(x_{k-1}))| \leq \int_a^b |\phi' - g| < \frac{\epsilon}{2}.$$

On en déduit que

$$|\ell_\phi - \ell_G| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

puis, comme précédemment, que

$$|\ell_\phi - \int_a^b \sqrt{1+\phi'^2}| \le \frac{\epsilon}{2} + 0 + \left|\int_a^b (\sqrt{1+\phi'^2} - \sqrt{1+g^2})\right|$$
$$\le \frac{\epsilon}{2} + \int_a^b |\phi' - g| < \epsilon.$$

17. À partir de la formule d'intégration par parties, montrer que si la fonction $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ est absolument continue, positive et décroissante et si la fonction $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable, il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b F(x)g(x)\ dx = F(a)\int_a^c g(x)\ dx.$$

(« Deuxième théorème de la moyenne ». Quel est le premier ?)

Solution. Posons

$$G(x) = \int_a^x g(t)\ dt.$$

Alors

$$\int_a^b Fg = F(b)G(b) - \int_a^b F'G.$$

Puisque F' est négative,

$$F(b)G(b) + \inf\{G(x) \mid x \in [a,b]\}(F(a) - F(b) \le \int_a^b Fg$$
$$\le F(b)G(b) + \sup\{G(x) \mid x \in [a,b]\}(F(a) - F(b))$$

et, puisque F est positive,

$$\inf\{G(x) \mid x \in [a,b]\}F(a) \le \int_a^b Fg \le \sup\{G(x) \mid x \in [a,b]\}F(a).$$

En vertu du théorème de la valeur intermédiaire, il doit exister $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b Fg = F(a)G(c).$$

Le premier théorème de la moyenne dit qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)\ dx = f(c)(b-a).$$

Il s'applique dès que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue et peut être déduit du théorème des accroissements finis ou du théorème de la valeur intermédiaire.

7 INTÉGRATION ABSTRAITE

1. Soit $\mathfrak{F} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ où $A_1, A_2, \dots, A_n$ forment une partition de X ($X = \sum_{k=1}^{n} A_k$). Déterminer $\mathfrak{T}(\mathfrak{F})$.

   Solution. On a
   $$\mathfrak{T}(\mathfrak{F}) = \left\{ \sum_{j \in J} A_j \mid J \subseteq \{1, 2, \dots, n\} \right\}$$
   en convenant que $\sum_{j \in \emptyset} A_j = \emptyset$. En effet, $\mathfrak{T}(\mathfrak{F})$ doit contenir tous ces ensembles et la bijection
   $$J \longleftrightarrow \sum_{j \in J} A_j$$
   entre la tribu des parties de $\{1, 2, \dots, n\}$ et cette famille montre qu'elle forme bien une tribu.

2. Soit $\mathfrak{F} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ où $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont des parties quelconques de X. Déterminer $\mathfrak{T}(\mathfrak{F})$. Quelle est la cardinalité maximale de $\mathfrak{T}(\mathfrak{F})$?

   Solution. Soit
   $$\mathfrak{G} = \{B_1 B_2 \cdots B_n \mid \text{ où } B_k = A_k \text{ ou } B_k = A_k^c\}\,.$$
   (Par exemple, $A_1^c A_2 \cdots A_n \in \mathfrak{G}$). La famille $\mathfrak{H}$ des ensembles C_j de la famille $\mathfrak{G}$ qui sont non vides forme une partition de X. Si m est sa cardinalité, on aura donc
   $$\mathfrak{T}(\mathfrak{F}) = \left\{ \sum_{j \in J} C_j \mid J \subseteq \{1, 2, \dots, m\} \right\}.$$
   Évidemment,
   $$\operatorname{card}\left(\mathfrak{T}(\mathfrak{F})\right) \le 2^{2^n}.$$

3. Soit $\mathfrak{F} = \{A, B\}$. Déterminer $\mathfrak{M}(\mathfrak{F})$ et $\mathfrak{T}(\mathfrak{F})$.

   Solution. $\mathfrak{M}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}$ et, si $AB \neq \emptyset, A \subsetneq B$ et $B \subsetneq A$, une application de l'exercice précédent donne
   $$\mathfrak{T}(\mathfrak{F}) = \{AB, AB^c, A^cB, A^cB^c, A, B, A^c, B^c, A + A^cB, A + A^cB^c,$$
   $$A^c + AB, AB + A^cB^c, AB^c + A^cB, AB^c + A^cB + A^cB^c, \emptyset, X\},$$
   une tribu finie (= un clan) à 16 éléments.

4. Soient $E \subseteq \mathbb{R}$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable (relativement à la tribu de Lebesgue). Montrer qu'il existe une fonction $g : E \to \mathbb{R}$ borélienne (mesurable relativement à la tribu de Borel) qui coïncide presque partout (relativement à la mesure de Lebesgue) avec f.

   Solution. Si $f = \mathbb{I}_A$ est la fonction indicatrice d'un ensemble mesurable, la représentation de A comme somme d'un ensemble borélien $B = \bigcap_k F_k$ et d'un ensemble de mesure nulle N permet de conclure avec $g = \mathbb{I}_B$. Le résultat est donc vrai successivement pour une fonction f étagée, positive et mesurable quelconque.

5. Soient $(X, \mathfrak{T})$ un espace mesurable et $E \subseteq X$. Montrer que si $f : E \to \mathbb{R}$ est mesurable, $c \in \mathbb{R}$ et $p > 0$, les fonctions cf et $|f|^p$ sont mesurables.

   Solution. Si $c = 0$,
$$\{x \mid cf(x) > \alpha\} = \begin{cases} X & \text{si } \alpha < 0, \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$
   alors que
$$\{x \mid cf(x) > \alpha\} = \{x \mid f(x) > \frac{\alpha}{c}\}$$
   si $c > 0$ et que
$$\{x \mid cf(x) > \alpha\} = \{x \mid f(x) < \frac{\alpha}{c}\}$$
   si $c < 0$.
   Si $\alpha < 0$,
$$\{x \mid |f(x)|^p > \alpha\} = X,$$
   si $\alpha = 0$,
$$\{x \mid |f(x)|^p > \alpha\} = \{x \mid f(x) = 0\}^c$$
   et si $\alpha > 0$,
$$\{x \mid |f(x)|^p > \alpha\} = \{x \mid f(x) > \alpha^{1/p}\} + \{x \mid f(x) < -\alpha^{1/p}\}.$$

6. Soient $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ une suite de nombres réels et $\{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ une suite de nombres positifs. On considère la fonction $\mu : \mathfrak{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ définie par
$$\mu(E) = \sum_{x_k \in E} p_k.$$
   Vérifier que μ est une mesure sur $\mathbb{R}$. Déterminer l'espace $\mathfrak{L}^1_\mu(\mathbb{R})$. Expliciter l'inégalité de Hölder.

Solution. On a

$$\mu(\emptyset) = \sum_{x_k \in \emptyset} p_k = 0.$$

Puisque tous les nombres p_k sont positifs, on a aussi

$$\mu\left(\sum_k E_k\right) = \sum_{x_j \in \sum_k E_k} p_j = \sum_k \left(\sum_{x_j \in E_k} p_j\right) = \sum_k \mu(E_k).$$

Toutes les fonctions sont mesurables. Si f est positive,

$$\sup\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^{N} a_k \mathbb{I}_{E_k}\, d\mu \,\middle|\, 0 \leq \sum_{k=1}^{N} a_k \mathbb{I}_{E_k} \leq f\right\}$$

$$= \sup\left\{\sum_{k=1}^{N} a_k \sum_{x_j \in E_k} p_j \,\middle|\, 0 \leq \sum_{k=1}^{N} a_k \mathbb{I}_{E_k} \leq f\right\}$$

$$= \sup\left\{\sum_{k=1}^{N} \inf\{f(x) \mid x \in E_k\} \sum_{x_j \in E_k} p_j \,\middle|\, 0 \leq \sum_{k=1}^{N} \inf\{f(x) \mid x \in E_k\} \mathbb{I}_{E_k} \leq f\right\}$$

$$= \sum_k f(x_k) p_k.$$

Ainsi $f \in \mathfrak{L}^1_\mu(\mathbb{R})$ si et seulement si

$$\sum_k |f(x_k)| p_k < +\infty.$$

L'inégalité de Hölder s'écrit ici

$$\sum_k |f(x_k) g(x_k)| p_k \leq \left(\sum_k |f(x_k)|^p p_k\right)^{1/p} \left(\sum_k |g(x_k)|^q p_k\right)^{1/q}.$$

7. Répondre aux mêmes questions si $\mu : \mathfrak{L} \to [0, +\infty]$ est définie par

$$\mu(E) = \int_E |g(x)|\, dx$$

avec $g \in \mathfrak{L}^1(\mathbb{R})$. La tribu de Lebesgue est-elle complète relativement à cette mesure ?

Solution. On a

$$\mu(\emptyset) = \int_\emptyset |g| = 0.$$

En vertu du théorème sur la convergence monotone ou de celui sur la convergence majorée, on a aussi

$$\mu\left(\sum_k E_k\right) = \int_{\sum_k E_k} |g| = \sum_k \int_{E_k} |g| = \sum_k \mu(E_k).$$

La mesurabilité est la mesurabilité au sens de Lebesgue. Si f est positive,

$$\begin{aligned} &\sup\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^{N} a_k \mathbb{I}_{E_k}\, d\mu \;\middle|\; 0 \leq \sum_{k=1}^{N} a_k \mathbb{I}_{E_k} \leq f\right\} \\ &= \sup\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^{N} a_k \mathbb{I}_{E_k} |g| \;\middle|\; 0 \leq \sum_{k=1}^{N} a_k \mathbb{I}_{E_k} \leq f\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f\,|g|. \end{aligned}$$

Ainsi $f \in \mathfrak{L}^1_\mu(\mathbb{R})$ si et seulement si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)||g(x)|\, dx < +\infty.$$

L'inégalité de Hölder s'écrit ici

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_1\, f_2\, g| \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f_1|^p\, |g|\right)^{1/p} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f_2|^q\, |g|\right)^{1/q}.$$

La tribu de Lebesgue n'est pas complète relativement à cette mesure. Par exemple, on peut avoir $E \subseteq [0,1]$ non mesurable et $g \equiv 0$ sur $[0,1]$.

8. Soit $(X, \mathfrak{T}, \mu)$ un espace mesuré. Supposons que $\mathfrak{S}$ soit une autre tribu sur X et que $\nu : \mathfrak{S} \to [0, +\infty]$ soit une mesure sur X telles que $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{S}$, que la restriction de ν à $\mathfrak{T}$ coïncide avec μ et que $\mathfrak{S}$ soit $\nu-$complète. Montrer que $\mathfrak{T}_\mu \subseteq \mathfrak{S}$ et que la restriction de ν à $\mathfrak{T}_\mu$ coïncide avec μ.

   Solution. Soit $E \in \mathfrak{T}_\mu$. On a $A \subseteq E \subseteq B$ avec $A, B \in \mathfrak{T}$ et $\mu(BA^c) = 0$. $A \in \mathfrak{S}$. Puisque $\nu(BA^c) = 0$, que $EA^c \subseteq BA^c$ et que $\mathfrak{S}$ est $\nu-$complète, $EA^c \in \mathfrak{S}$ donc $E = A + EA^c \in \mathfrak{S}$. Finalement, si $E \in \mathfrak{T}_\mu$,

$$\nu(E) = \nu(A) = \mu(A) = \mu(E).$$

9. La fonction $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ croissant de 0 à 1 lorsque x croît de $-\infty$ à $+\infty$ et étant supposée continue à droite, on pose, pour $E \subseteq \mathbb{R}$,

$$\mu_F^*(E) = \inf \left\{ \sum_k (F(b_k-) - F(a_k)) \mid E \subseteq \bigcup_k \,]a_k, b_k[\right\},$$

la borne inférieure étant calculée sur la famille des suites finies ou infinies d'intervalles ouverts $\{ \,]a_k, b_k[\, \}_k$ recouvrant E. Montrer que
– $\mu_F^*([a,b]) = F(b) - F(a-)$;
– $\mu_F^*(]a,b]) = F(b) - F(a)$;
– $\mu_F^*(]a,b[) = F(b-) - F(a)$;
– pour tout $A \subseteq \mathbb{R}$ et pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\mu_F^*(A\,]a,+\infty[\,) + \mu_F^*(A\,]a,+\infty[^c\,) \leq \mu_F^*(A).$$

Solution. Remarquons d'abord que l'on a $F(x_1) \leq F(x_2-) \leq F(x_2)$ dès que $x_1 < x_2$. De plus, la fonction $E \mapsto \mu_F^*(E)$ est croissante et sous-additive.
– Puisque $[a,b] \subseteq \,]a-\epsilon, b+\epsilon[$, on a

$$\mu_F^*([a,b]) \leq F((b+\epsilon)-) - F(a-\epsilon)$$

quelque soit $\epsilon > 0$ de telle sorte que

$$\mu_F^*([a,b]) \leq F(b) - F(a-).$$

Réciproquement, il suffit, en vertu du théorème de Borel-Lebesgue, de voir que la relation

$$[a,b] \subseteq \bigcup_{k=1}^{N}]a_k, b_k[$$

entraîne la relation

$$F(b) - F(a-) \leq \sum_{k=1}^{N} (F(b_k-) - F(a_k)).$$

On peut supposer que

$$a_1 < a < a_2 < b_1 < a_3 < b_2 < \cdots < a_{N-1} < b_{N-2} < a_N < b_{N-1} < b < b_N.$$

Alors

$$\begin{aligned}
&F(b_N-) - F(a_N) + F(b_{N-1}-) - F(a_{N-1}) \\
&+ \cdots + F(b_2-) - F(a_2) + F(b_1-) - F(a_1) \\
&= F(b_N-) + (F(b_{N-1}-) - F(a_N)) + (F(b_{N-2}-) - F(a_{N-1})) \\
&+ \cdots + (F(b_1-) - F(a_2)) - F(a_1) \\
&\geq F(b_N-) - F(a_1) \geq F(b) - F(a-).
\end{aligned}$$

– La relation

$$]a, b] \subseteq]a, b + \epsilon[$$

entraîne

$$\mu_F^*(\,]a, b]) \leq F(b) - F(a)$$

et la relation

$$]a, b] \supseteq [a + \epsilon, b]$$

entraîne

$$\mu_F^*(\,]a, b]) \geq F(b) - F(a).$$

– On a évidemment

$$\mu_F^*(\,]a, b[\,) \leq F(b-) - F(a)$$

et la relation

$$]a, b[\supseteq]a, b - \epsilon]$$

entraîne

$$\mu_F^*(\,]a, b[\,) \geq F(b-) - F(a).$$

– Soit

$$A \subseteq \bigcup_k]a_k, b_k[$$

avec

$$\sum_k (F(b_k-) - F(a_k)) \leq \mu_F^*(A) + \epsilon$$

et posons

$$I_k' =]a, +\infty[\cap]a_k, b_k[\,,\ I_k'' =]a, +\infty[^c \cap]a_k, b_k[.$$

On vérifie aisément que

$$\mu_F^*(I_k') + \mu_F^*(I_k'') = (F(b_k-) - F(a_k)).$$

Alors

$$\mu_F^*(A\,]a,+\infty[\,) + \mu_F^*(A\,]a,+\infty[^c\,) \leq \sum_k \mu_F^*(I'_k) + \sum_k \mu_F^*(I''_k)$$
$$= \sum_k (F(b_k-) - F(a_k)) \leq \mu_F^*(A) + \epsilon.$$

8 INTÉGRALES ITÉRÉES

1. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions mesurables. Montrer que la fonction $(x, y) \mapsto f(x) + g(y)$ est mesurable (relativement à la tribu produit).

   Solution. La fonction $(x, y) \mapsto f(x)$ est mesurable puisque

   $$\{(x, y) \mid f(x) > \alpha\} = \{x \mid f(x) > \alpha\} \times \mathbb{R}.$$

   De même pour la fonction $(x, y) \mapsto g(y)$ et la somme de deux fonctions mesurables est mesurable.

2. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive. Montrer que l'ensemble

   $$E = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b\ ,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

   est mesurable (relativement à la tribu produit) et calculer sa mesure.

   Solution. On a

   $$E = \{(x, y) \mid f(x) - y \geq 0\} \cap [a, b] \times [0, +\infty[.$$

   et la fonction $(x, y) \mapsto f(x) - y$ est mesurable. De plus

   $$\lambda_2(E) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}_E\ dxdy = \int_a^b dx \int_0^{f(x)} dy = \int_a^b f(x)\ dx.$$

3. À $E \subseteq \mathbb{R}$ associons l'ensemble $\widetilde{E} \subseteq \mathbb{R}^2$ défini par

   $$\widetilde{E} = \{(x, y) \mid x - y \in E\}$$

   et considérons la famille

   $$\mathfrak{T} = \{E \in \mathfrak{B} \mid \widetilde{E} \in \mathfrak{B}_2\}.$$

   Montrer que $\mathfrak{T} = \mathfrak{B}$.

Solution. Les relations

$$\widetilde{(E^c)} = \left(\widetilde{E}\right)^c \quad \text{et} \quad \widetilde{\bigcup_k E_k} = \bigcup_k \widetilde{E_k},$$

qui sont aisément vérifiées, entraînent que $\mathfrak{T}$ est une tribu. Puisque la fonction $(x,y) \mapsto x - y$ est continue, $\widetilde{O}$ est ouvert quel que soit l'ensemble ouvert O. Cela assure que $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{T}$ donc que $\mathfrak{B} = \mathfrak{T}$.

4. Déduire du théorème de Tonelli et de la relation

$$\int_0^{+\infty} e^{-z^2}\ dz = \int_0^{+\infty} xe^{-x^2y^2}\ dy \quad \text{si} \quad x > 0$$

que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\ dx = \sqrt{2\pi}.$$

Solution. En vertu du théorème de Tonelli, on a

$$\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\ dx\right)^2 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\ dx \int_0^{+\infty} e^{-z^2}\ dz$$
$$= \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\ dx \int_0^{+\infty} xe^{-x^2y^2}\ dy = \int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} xe^{-x^2(1+y^2)}\ dx$$
$$= \int_0^{+\infty} \frac{dy}{2(1+y^2)} = \frac{1}{2} \arctan y \,\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}.$$

5. Calculer

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)\ dy\ ,\ \int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)\ dx \quad \text{et} \quad \int_0^1 \int_0^1 |f(x,y)|\ dxdy$$

pour la fonction

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Solution. Puisque

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right),$$

on a

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)\ dy = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)\ dx = -\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = -\frac{\pi}{4}$$

et

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_0^1 |f(x,y)|\ dxdy \\
= &\int_0^1 dy \left(\int_0^y \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\ dx + \int_y^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\ dx \right) \\
= &\int_0^1 \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{1+y^2} \right)\ dy = +\infty.
\end{aligned}$$

6. Utiliser le théorème de Tonelli pour calculer de deux manières l'intégrale

$$\int_a^b dx \int_0^1 y^x\ dy\ ,\ 0 < a < b$$

et en déduire la valeur de

$$\int_0^1 \frac{y^b - y^a}{\log y}\ dy.$$

Solution. L'intégrand étant positif, on a

$$\int_a^b dx \int_0^1 y^x\ dy = \int_a^b \frac{dx}{1+x} = \log \frac{b+1}{a+1}$$

et

$$\int_0^1 dy \int_a^b y^x\ dx = \int_0^1 \frac{y^b - y^a}{\log y}\ dy$$

de telle sorte que

$$\int_0^1 \frac{y^b - y^a}{\log y}\ dy = \log \frac{b+1}{a+1}.$$

7. Utiliser le théorème de Fubini pour calculer de deux manières l'intégrale

$$\int_0^A \int_0^A e^{-xy} \sin x\ dxdy$$

et en déduire que

$$\lim_{A \to +\infty} \int_0^A \frac{\sin x}{x}\ dx = \frac{\pi}{2}.$$

Solution. On a d'une part

$$\int_0^A dx \int_0^A e^{-xy} \sin x \ dy = \int_0^A \frac{\sin x}{x} \left(1 - e^{-Ax}\right) dx$$
$$\longrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \ dx$$

lorsque $A \longrightarrow +\infty$ puisque, par convergence dominée,

$$\int_0^A \frac{\sin x}{x} e^{-Ax} \ dx \longrightarrow 0.$$

D'autre part, en intégrant par parties par rapport à x,

$$\int_0^A dy \int_0^A e^{-xy} \sin x \ dx = \int_0^A \frac{1 - e^{-Ay}(\cos A - y \sin A)}{1 + y^2} \ dy$$
$$\longrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{\pi}{2}$$

puisque, encore par convergence dominée,

$$\int_0^A \frac{\cos A - y \sin A}{1 + y^2} e^{-Ay} \ dy \longrightarrow 0$$

lorsque $A \longrightarrow +\infty$.

9 APPLICATIONS

1. Soit $f \in \mathfrak{L}^1_{2\pi}$. Montrer que

$$\lim_{|k| \to +\infty} c_k(f) = 0.$$

Solution. Si f est continue sur $[-\pi, \pi[$, elle est de carré intégrable sur $[-\pi, \pi[$. La série $\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2$ est donc convergente. En particulier,

$$\lim_{|k| \to +\infty} c_k(f) = 0.$$

Dans le cas général, soient $\epsilon > 0$ arbitraire et g une fonction continue sur $[-\pi, \pi[$ telle que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |f - g| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Alors

$$|c_k(f)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) e^{-ikt} \, dt \right|$$
$$\leq \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} (f(t) - g(t)) e^{-ikt} \, dt \right| + \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} g(t) e^{-ikt} \, dt \right|$$
$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |f - g| + |c_k(g)| < \epsilon$$

dès que $|k|$ est assez grand.

2. Soit $f \in \mathfrak{L}^1_{2\pi}$ une fonction à variation bornée sur $[-\pi, \pi]$. Montrer que

$$|c_k(f)| \leq \frac{\mathrm{var}(f, [-\pi, \pi])}{4k}.$$

Solution. On a

$$2c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left(f(t) - f\left(t - \frac{\pi}{k}\right) \right) e^{-ikt} \, dt,$$

$$2c_k(f) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left(f\left(t - \frac{\pi}{k}\right) - f\left(t - 2\frac{\pi}{k}\right) \right) e^{-ikt} \, dt,$$
$$\ldots,$$
$$2c_k(f) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left(f\left(t - (2k-1)\frac{\pi}{k}\right) - f\left(t - (2k)\frac{\pi}{k}\right) \right) e^{-ikt} \, dt.$$

Donc

$$4kc_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sum_{j=0}^{2k-1} (-1)^j \left(f\left(t - j\frac{\pi}{k}\right) - f\left(t - (j+1)\frac{\pi}{k}\right) \right) e^{-ikt} \, dt$$

et

$$|4kc_k(f)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sum_{j=0}^{2k-1} \left| f\left(t - j\frac{\pi}{k}\right) - f\left(t - (j+1)\frac{\pi}{k}\right) \right| \, dt \leq \mathrm{var}(f, [-\pi, \pi]).$$

3. Développer la fonction $f(x) = \pi^2 - x^2$ en une série trigonométrique sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$. En déduire la valeur des sommes

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4}.$$

Solution. On a

$$c_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} (\pi^2 - x^2)\ dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

et, si $k \neq 0$,

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} (\pi^2 - x^2)e^{-ikx}\ dx = (-1)^{k+1}\frac{2}{k^2}$$

en intégrant par parties deux fois. La série de Fourier obtenue,

$$\frac{2\pi^2}{3} + \sum_{k\neq 0}(-1)^{k+1}\frac{2}{k^2}e^{ikx},$$

étant absolument convergente, sa somme est la fonction continue qui l'a engendrée :

$$\pi^2 - x^2 = \frac{2\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{4}{k^2}\cos kx \quad \text{si} \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

En particulier, faisant $x = 0$ puis $x = \pi$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

L'identité de Parseval implique d'autre part

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

4. Développer la fonction $f(x) = x$ en une série trigonométrique sur l'intervalle $(-\pi, \pi)$. En déduire la valeur des sommes

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin kx}{k}.$$

Solution. On a

$$c_0(f) = 0 \ \text{ et } \ c_k(f) = \frac{i(-1)^{k+1}}{k} \ \text{ si } k \neq 0.$$

Le théorème de Dirichlet étant applicable,

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{k} \sin kx \quad \text{si} \quad -\pi < x < \pi.$$

Choisissant $x = \pi/2$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Remplaçant x par $\pi - x$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin kx}{k} = \frac{\pi - x}{2} \quad \text{si} \quad 0 < x < 2\pi.$$

5. Soient $f \in \mathfrak{L}^1_{2\pi}$ une fonction réelle et

$$S(f)(x) = \frac{1}{2} a_0(f) + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx)$$

sa série de Fourier écrite sous « forme réelle ». Quelle est l'expression intégrale des coefficients ? Que devient l'identité de Parseval ?

Solution. En utilisant l'identité d'Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta,$$

on trouve

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \cos kt \; dt, \;\; b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \sin kt \; dt$$

(y compris pour $a_0(f)$) et

$$\frac{1}{2} a_0(f)^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k(f)^2 + b_k(f)^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |f|^2.$$

---

6. Soit $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ une fonction indéfiniment dérivable à support compact. Montrer que, quel que soit $N \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{|\xi| \to +\infty} \xi^N \hat{f}(\xi) = 0.$$

En déduire que, si $f \in \mathfrak{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$,

$$\lim_{|\xi| \to +\infty} \hat{f}(\xi) = 0.$$

Solution. En intégrant par parties sur un intervalle compact plus grand que le support de f, on obtient

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\xi t} \, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) \frac{e^{-i\xi t}}{-i\xi} \, dt \\ &= \cdots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(N+1)}(t) \frac{e^{-i\xi t}}{(-i\xi)^{(N+1)}} \, dt \end{aligned}$$

de telle sorte que

$$\left| \xi^N \hat{f}(\xi) \right| \leq \frac{1}{|\xi|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| f^{(N+1)}(t) \right| \, dt.$$

Dans le cas général, on peut supposer f réelle. Soient $f_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ des fonctions telles que

$$\lim_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_1 = 0.$$

Alors

$$\hat{f}(\xi) = \lim_{n \to +\infty} \hat{f}_n(\xi).$$

Donc, on aura

$$|\hat{f}(\xi)| \leq |\hat{f}(\xi) - \hat{f}_n(\xi)| + |\hat{f}_n(\xi)| < \epsilon$$

en choisissant d'abord n puis, n fixé, $|\xi|$ suffisamment grands.

7. Calculer la transformée de Fourier de la fonction

$$f(x) = e^{-|x|}.$$

En déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \xi x}{1 + \xi^2} \, d\xi.$$

Solution. On a, si $\xi \neq 0$,

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} e^{-i\xi t} \, dt \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos \xi t \, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\xi} \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin \xi t \, dt \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\xi^2} \left(1 - \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos \xi t \, dt \right). \end{aligned}$$

en intégrant par parties deux fois. On en déduit que

$$\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\xi^2}.$$

Cette tranformée de Fourier étant intégrable, la formule d'inversion de Fourier s'applique et donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \xi x}{1+\xi^2}\, d\xi = \frac{\pi}{2}\, e^{-|x|}.$$

8. Calculer la transformée de Fourier de la fonction

$$f(x) = \mathbb{I}_{[-1,1]}(x).$$

En déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx.$$

Solution. Un calcul simple donne

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-i\xi x}\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \xi}{\xi}$$

et la relation de Parseval conduit à

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

9. Calculer la convolution $\mathbb{I}_{[-1,1]} * \mathbb{I}_{[-1,1]}$ et vérifier l'équation $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$ dans ce cas.

Solution. En distinguant suivant les valeurs de x, on obtient

$$\mathbb{I}_{[-1,1]} * \mathbb{I}_{[-1,1]}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} \mathbb{I}_{[x-1,x+1]}(t)\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (2 - |x|)\, \mathbb{I}_{[-2,2]}(x).$$

La relation $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$ s'écrit ici

$$\frac{1-\cos 2\xi}{\pi \xi^2} = \frac{2\sin^2 \xi}{\pi \xi^2}.$$

10. Montrer que si $f, g \in \mathfrak{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\hat{g}(x)\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)g(x)\ dx.$$

Solution. Lorsque $f, g \in \mathfrak{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, le théorème de Fubini est applicable et donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\hat{g}(x)\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)e^{-ixy}\ dy$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\ dy \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-iyx}\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y)g(y)\ dy.$$

Dans le cas général, soient $f_A = f\mathbb{I}_{[-A,A]}$ et $g_A = g\mathbb{I}_{[-A,A]}$. Alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\hat{g}(x)\ dx = \lim_{A\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_A(x)\hat{g}_A(x)\ dx$$
$$= \lim_{A\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}_A(x)g_A(x)\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)g(x)\ dx.$$

11. Soit $f \in \mathfrak{L}^1(\mathbb{R})$ une fonction continue telle que

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |f(k)| < +\infty.$$

Supposons que supp($\hat{f}$)=$[\pi, \pi]$. Montrer que

$$c_k(\hat{f}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(-k).$$

En déduire la formule d'interpolation suivante

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f(k) \frac{\sin \pi(x-k)}{\pi(x-k)}.$$

(le « théorème d'échantillonage »). Que donne cette formule lorsque

$$\hat{f}(\xi) = (\pi - |\xi|)\mathbb{I}_{[-\pi,\pi]}(\xi)?$$

Solution. On a

$$c_k(\hat{f}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \hat{f}(t)e^{-ikt}\ dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t)e^{-ikt}\ dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(-k).$$

Par conséquent, en tout point de l'intervalle $[-\pi, \pi]$,

$$\hat{f}(\xi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k(\hat{f})e^{ik\xi} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(k)e^{-ik\xi}$$

et, en tout point de $\mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)e^{i\xi x}\ d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty} f(k)e^{-ik\xi}\ e^{i\xi x}\ d\xi = \sum_{-\infty}^{+\infty} f(k)\frac{\sin\pi(x-k)}{\pi(x-k)}$$

en vertu du théorème de la convergence dominée. Si

$$\hat{f}(\xi) = (\pi - |\xi|)\mathbb{I}_{[-\pi,\pi]}(\xi),$$

on a

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{+\pi}(\pi - |\xi|)e^{i\xi x}\ d\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1-\cos\pi x}{x^2}$$

de telle sorte que la formule est applicable et donne

$$\frac{1-\cos\pi x}{x^2} = \frac{\pi^2}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k\neq 0}\frac{1-(-1)^k}{k^2}\,\frac{\sin\pi(x-k)}{\pi(x-k)}.$$