Analyse 3

Solutions des exercices

André Giroux
Département de Mathématiques et Statistique
Université de Montréal
Juin 2005

1 Introduction

1. Calculer
$$\limsup_{n\to+\infty} \sin n\frac{\pi}{2}\cos n\pi \ , \ \liminf_{n\to+\infty} \sin n\frac{\pi}{2}\cos n\pi.$$
Solution.
On a
$$-1 \leq \sin n\frac{\pi}{2}\cos n\pi \leq 1$$
et
$$\sin(2m+1)\frac{\pi}{2}\cos(2m+1)\pi = -(\sin m\pi\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}\cos m\pi) = (-1)^{m+1}$$
donc
$$\limsup_{n\to+\infty} \sin n\frac{\pi}{2}\cos n\pi = 1 \ , \ \liminf_{n\to+\infty} \sin n\frac{\pi}{2}\cos n\pi = -1.$$

2. Déterminer, sans calculatrice, le plus grand des deux nombres π^e et e^π.
Solution.

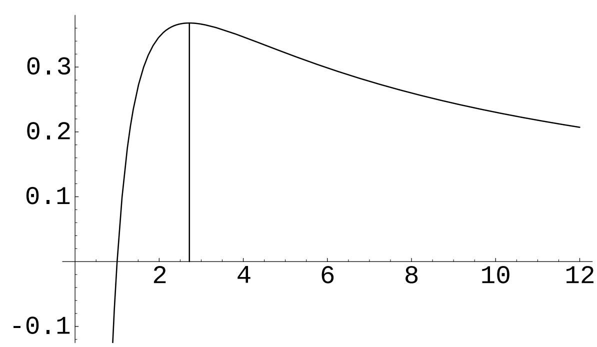

FIG. 1 – La fonction $\frac{\log x}{x}$

L'inégalité $\pi^e < e^\pi$ est équivalente à l'inégalité
$$\frac{\log \pi}{\pi} < \frac{\log e}{e}.$$
La fonction $x \mapsto \log x/x$ étant croissante jusqu'à $x = e$ et décroissante ensuite, on a bien $\pi^e(= 22,45) < e^\pi(= 23,14)$.

3. Montrer que
$$1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x}{e}$$
lorsque $0 < x < 1$.
Solution.

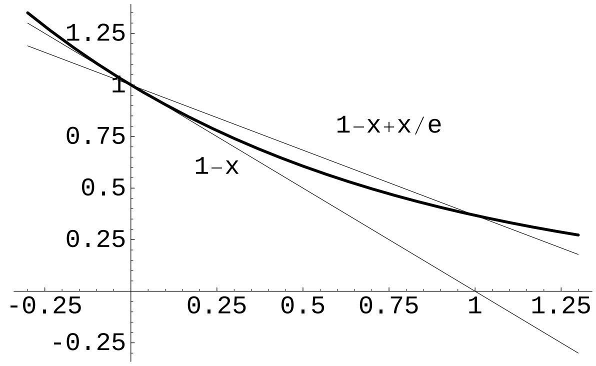

FIG. 2 – La fonction e^{-x}

La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est convexe. Sur l'intervalle $(0, 1)$, son graphe est situé sous la droite passant par $(0, 1)$ et $(1, 1/e)$ au-dessus de sa tangente en $(0, 1)$:
$$1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x}{e}.$$

2 L'espace euclidien

1. Les nombres λ_i dans la représentation
$$\mathbf{x} = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \mathbf{x}_i$$
d'un point du polyèdre $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m]$ sont ses **coordonnées barycentriques** et le **barycentre** du polyèdre est le point dont toutes les coordonnées barycentriques sont égales.
– Montrer que les coordonnées barycentriques sont uniques (on suppose les vecteurs $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_m - \mathbf{x}_0$ linéairement indépendants).
– Montrer que le barycentre d'un triangle coïncide avec l'intersection de ses médianes (les droites joignant les sommets aux milieux des côtés opposés).

Solution.

– Si

$$\sum_{i=0}^{m} \nu_i \,\mathbf{x}_i = \mathbf{0} \;\text{ avec }\; \sum_{i=0}^{m} \nu_i = 0,$$

alors

$$\sum_{i=1}^{m} \nu_i(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$$

donc

$$\nu_1 = \nu_2 = \cdots = \nu_m = 0 = \nu_0.$$

– Les médianes,

$$\lambda_0\,\mathbf{x}_0 + (1-\lambda_0)\frac{\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2}{2}\;,\;\lambda_1\,\mathbf{x}_1 + (1-\lambda_1)\frac{\mathbf{x}_0+\mathbf{x}_2}{2}\;,\;\lambda_2\,\mathbf{x}_2 + (1-\lambda_2)\frac{\mathbf{x}_0+\mathbf{x}_1}{2}$$

se coupent lorsque

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{3}$$

c'est-à-dire au point

$$\frac{\mathbf{x}_0+\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_1}{3}.$$

2. Montrer qu'un ensemble est convexe si et seulement si il contient tous les segments admettant deux de ses points pour extrémités.

   En déduire qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si son **épigraphe**,

   $$E_f = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq f(x_1)\},$$

   est convexe.

   Solution.

   La condition est évidemment nécessaire. Elle est aussi suffisante, par récurrence sur le nombre N de points de la combinaison convexe considérée en vertu de la relation

   $$\sum_{k=1}^{N+1} \lambda_k\,\mathbf{x}_k = \lambda_{N+1}\,\mathbf{x}_{N+1} + \left(\sum_{k=1}^{N} \lambda_k\right) \sum_{k=1}^{N} \frac{\lambda_k}{\sum_{k=1}^{N}\lambda_k}\mathbf{x}_k.$$

   La fonction est convexe si et seulement si

   $$f(\lambda\,x_1 + (1-\lambda)y_1) \leq \lambda\,f(x_1) + (1-\lambda)f(y_1)$$

et l'épigraphe est convexe si et seulement si

$$f(\lambda\, x_1 + (1-\lambda) y_1) \leq \lambda\, x_2 + (1-\lambda) y_2$$

quels que soient $x_2 \geq f(x_1)$ et $y_2 \geq f(y_1)$.

3. Soient

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$$

et

$$B_1(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_1 < r\}.$$

– Montrer que

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_1 \leq \|\mathbf{x}\|_1 + \|\mathbf{y}\|_1.$$

– Montrer que

$$\lim_{k \to +\infty} \|\mathbf{x_k} - \mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \lim_{k \to +\infty} \|\mathbf{x_k} - \mathbf{x}\|_1 = 0.$$

– Montrer que $B_1(\mathbf{a}, r)$ est convexe.

Solution.

– Découle des inégalités

$$|x_j + y_j| \leq |x_j| + |y_j|\ ,\ 1 \leq j \leq n.$$

– Découle des inégalités

$$\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\|_1 \leq \sqrt{n}\sqrt{\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\|}.$$

– Découle des relations

$$\begin{aligned} \|\lambda\, \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2 - \mathbf{a}\|_1 &= \|\lambda\, (\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}) + (1-\lambda)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{a})\|_1 \\ &\leq \lambda\, \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}\|_1 + (1-\lambda)\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{a}\|_1. \end{aligned}$$

4. Mêmes questions pour

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \sup\{|x_j| \mid 1 \leq j \leq n\}$$

et

$$B_\infty(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_\infty < r\}.$$

Solution.

– Découle de l'inégalité

$$\sup\{|x_j|+|y_j| \mid 1 \leq j \leq n\} \leq \sup\{|x_j| \mid 1 \leq j \leq n\}+\sup\{|y_j| \mid 1 \leq j \leq n\}.$$

– Découle des inégalités

$$\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| \leq n\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\|_\infty.$$

– Découle des relations

$$\begin{aligned}\|\lambda\,\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2 - \mathbf{a}\|_\infty &= \|\lambda\,(\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}) + (1-\lambda)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{a})\|_\infty \\ &\leq \lambda\,\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}\|_\infty + (1-\lambda)\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{a}\|_\infty.\end{aligned}$$

5. La distance entre le point $\mathbf{x}_0$ et l'ensemble E est

$$d(\mathbf{x}_0, E) = \inf\{\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}\| \mid \mathbf{x} \in E\}.$$

Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour déterminer la distance entre le point $\mathbf{x}_0$ et l'hyperplan H d'équation $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0$ ainsi que le point $\mathbf{x}_m \in H$ où elle est atteinte.
Solution.
On a

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = -\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{a})$$

de telle sorte que l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \geq \frac{|\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{a})|}{\|\mathbf{n}\|}$$

avec égalité si et seulement si

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_m = \mathbf{x}_0 - \frac{|\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{a})|}{\|\mathbf{n}\|^2}\mathbf{n}.$$

6. Soit $\mathbf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un opérateur linéaire inversible. Montrer que

$$\frac{1}{\|\mathbf{L}^{-1}\|_\infty} \leq \frac{\|\mathbf{L}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|\mathbf{L}\|_\infty.$$

Solution.
Par définition,

$$\|\mathbf{L}(\mathbf{x})\| \leq \|\mathbf{L}\|_\infty \|\mathbf{x}\|.$$

D'autre part, $\mathbf{x} = \mathbf{L}^{-1}(\mathbf{L}(\mathbf{x}))$ implique

$$\|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{L}^{-1}\|_\infty \|\mathbf{L}(\mathbf{x})\|.$$

7. Soit $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'opérateur linéaire dont la matrice relativement à la base canonique est

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\cos\phi\,\sin\theta & \sin\phi\,\cos\theta \\ \sin\theta & \cos\phi\,\cos\theta & -\sin\phi\,\sin\theta \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}.$$

Calculer $\|\mathbf{A}\|_\infty$ et $\|\mathbf{A}\|$.

Solution.

L'opérateur $\mathbf{A}$ est obtenu en appliquant successivement deux rotations qui sont des opérateurs préservant la norme. Donc

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = 1.$$

D'autre part, la relation $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ entraîne que

$$\|\mathbf{A}\| = 3.$$

8. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p\times m}$. Montrer que

–
$$\|\lambda\mathbf{A}\| = |\lambda|\,\|\mathbf{A}\|.$$

–
$$\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\| \le \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|.$$

–
$$\|\mathbf{C}\mathbf{A}\| \le \|\mathbf{C}\|\,\|\mathbf{A}\|.$$

Solution.

– On a

$$\|\lambda\mathbf{A}\|^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \lambda^2 a_{i,j}^2 = \lambda^2 \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 = \lambda^2 \|\mathbf{A}\|^2.$$

– On a

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}+\mathbf{B}\|^2 &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{i,j}+b_{i,j})^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{i,j}^2 + 2a_{i,j}b_{i,j} + b_{i,j}^2) \\ &\le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 + +2\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{i,j}^2} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{i,j}^2 \\ &= \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{i,j}^2}\right)^2 = (\|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|)^2. \end{aligned}$$

– On a

$$\begin{aligned}\|\mathbf{CA}\|^2 &= \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} c_{k,i}\, a_{i,j}\right)^2 \\ &\leq \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{k,i}^2 \sum_{i=1}^{m} a_{i,j}^2 \\ &= \sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{m} c_{k,i}^2 \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{i,j}^2 = \|\mathbf{C}\|^2\|\mathbf{A}\|^2.\end{aligned}$$

9. Soit $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un opérateur linéaire. Montrer que

–
$$\|\mathbf{A}\|_\infty \leq \|\mathbf{A}\| \leq \sqrt{m \times n}\, \|\mathbf{A}\|_\infty.$$

En déduire que, si $\mathbf{A}_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est une suite d'opérateur linéaire, on a

–
$$\lim_{k\to+\infty} \|\mathbf{A}_k - \mathbf{A}\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \lim_{k\to+\infty} \|\mathbf{A}_k - \mathbf{A}\| = 0.$$

Solution.

On a

$$\begin{aligned}\|\mathbf{A}\|^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\mathbf{e}_i^{(m)} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{e}_j^{(n)})\right)^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \|\mathbf{A}(\mathbf{e}_j^{(n)})\|^2 \leq m \times n\, \|\mathbf{A}\|_\infty^2.\end{aligned}$$

10. Vrai ou faux ?

– Toute réunion d'ensembles convexes est convexe.

– Toute intersection d'ensembles convexes est convexe.

Solution.

Faux. $[0,1] \cup [2,3]$ n'est pas convexe.

Vrai. Toute combinaison convexe de points de l'intersection $\bigcap E_a$ est une combinaison convexe de points de chacun des ensembles convexes E_a qui la composent donc appartient à chacun de ces ensembles convexes E_a donc appartient à leur intersection $\bigcap E_a$.

11. Mêmes questions en remplaçant « convexe » par « ouvert », par « fermé », par « borné », par « compact ».
Solution.
Réunion ouverte ? Vrai. Si $\mathbf{x} \in \bigcup E_a$, $\mathbf{x} \in E_{a_x}$. Cet ensemble étant ouvert, on peut trouver $r_x > 0$ tel que $B(\mathbf{x}, r_x) \subseteq E_{a_x} \subseteq \bigcup E_a$.
Intersection ouverte ? Faux. $\bigcap_{n>0} B(\mathbf{0}, 1/n) = \{\mathbf{0}\}$ n'est pas ouverte.
Réunion fermée ? Faux. Par complémentarité.
Intersection fermée ? Vrai. Par complémentarité.
Réunion bornée ? Faux. $\mathbb{R}^n = \bigcup_{n>0} B(\mathbf{0}, n)$ n'est pas borné.
Intersection bornée ? Vrai. Tout sous-ensemble d'un ensemble borné est borné.
Réunion compacte ? Faux. N'est pas nécessairement fermée.
Intersection compacte ? Vrai. Est fermée et bornée.

12. Montrer que le pavé $[0, 1[^n \subseteq \mathbb{R}^n$ n'est ni fermé, ni ouvert.
Solution.
On ne peut tracer aucune boule ouverte centrée en $\mathbf{0}$ entièrement contenue dans le pavé bien que $\mathbf{0}$ y appartienne : il n'est pas ouvert. La suite des points $(1 - 1/k, 1 - 1/k, \ldots, 1 - 1/k)$ du pavé converge vers $(1, 1, \ldots, 1)$ qui n'en fait pas partie : le pavé n'est pas fermé.

13. Déterminer l'intérieur de chacun des ensembles suivants : la boule $\{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < 1\}$, l'hyperplan $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0\}$ et le pavé $[0, 1[^n$.
Solution.
L'intérieur de la boule est la boule elle-même car elle est ouverte.
L'intérieur de l'hyperplan est vide. Si $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0$, si petit que soit $r > 0$, $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} + r\,\mathbf{n} - \mathbf{a}) > 0$.
L'intérieur du pavé est le pavé ouvert $]0, 1[^n$. Tout ensemble ouvert entièrement contenu dans $[0, 1[^n$ doit contenir tout point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tel que $0 < x_j < 1$ pour tout $1 \leq j \leq n$ et ne peut contenir aucun point ayant une coordonnée nulle.

14. Déterminer l'adhérence de chacun des ensembles suivants : la boule $\{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq 1\}$, le demi-espace $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) > 0\}$ et le pavé $[0, 1[^n$.
Solution.
L'adhérence de la boule fermée est la boule fermée.
L'adhérence du demi-espace ouvert est le demi-espace fermé $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \geq 0\}$. Tout point de cet ensemble est la limite d'une suite de points du demi-espace ouvert.
L'adhérence du pavé est le pavé fermé $[0, 1]^n$ pour la même raison.

15. Déterminer la frontière de chacun des ensembles suivants : la boule pointée $\{\mathbf{x} \mid 0 < \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| < 1\}$, l'hyperplan $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{n}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{a}) = 0\}$, $\mathbb{Q}^n$ et le cône positif fermé $\{\mathbf{x} \mid x_j \geq 0\ ,\ 1 \leq j \leq n\}$.

    Solution.

    La frontière de la boule pointée est $S(\mathbf{a}, 1) \cup \{\mathbf{a}\}$. Les points de cet ensemble sont tous limites de points de la boule pointée et de points qui n'en font pas partie.

    La frontière de l'hyperplan est l'hyperplan lui-même. Ses points sont tous limite de points qui n'y appartiennent pas.

    La frontière de $\mathbb{Q}^n$ est $\mathbb{R}^n$. Tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels et limite d'une suite de nombres irrationnels.

    La frontière du cône positif fermé est la réunion des ensembles

    $$E_j = \{\mathbf{x} \mid x_j \geq 0\ ,\ 1 \leq j \leq n \text{ et } x_j = 0 \text{ pour au moins un indice } j\}.$$

    Toute limite de points du cône doit avoir toutes ses coordonnées positives, toute limite de points n'appartenant pas au cône doit avoir au moins une coordonnée négative.

16. Vrai ou faux ?
    - $E = \overline{\overset{\circ}{E}}$
    - $E = \overset{\circ}{\overline{E}}$
    - $E = \overset{\circ}{E} \cup \partial E$.

    Solution.
    - Faux. Si $E = \{\mathbf{0}\}$, $\overline{E} = E$ et $\overset{\circ}{E} = \emptyset$.
    - Faux. Si $E = \{\mathbf{0}\}$, $\overset{\circ}{E} = \emptyset$ et $\overline{\emptyset} = \emptyset$.
    - Faux. Si $E = \{\mathbf{x} \mid 0 < \|\mathbf{x}\| < 1\}$, $\overset{\circ}{E} \cup \partial E = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$.

17. On considère la suite des points $\mathbf{x}_k$ de $\mathbb{R}^2$ définie par

    $$x_{k+1,1} = \sqrt{x_{k,1}\, x_{k,2}}\,,\ x_{k+1,2} = \frac{x_{k,1} + x_{k,2}}{2}.$$

    Montrer que, quels que soient $x_{0,1} > 0$ et $x_{0,2} > 0$, elle converge et que sa limite est un point situé sur la droite $x_2 = x_1$.

    Solution.

    On a

    $$x_{k+1,1} \leq x_{k+1,2} \text{ pour tout } k \geq 0.$$

    Par suite,

    $$x_{k+1,1} \geq x_{k,1} \text{ et } x_{k+1,2} \leq x_{k,2} \text{ pour tout } k \geq 0.$$

Les suites de coordonnées étant monotones et bornées, elles convergent et le point limite $\mathbf{x}$ satisfait la relation $x_2 = (x_1 + x_2)/2$, c'est-à-dire $x_2 = x_1$.

18. Déterminer les valeurs de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ pour lesquelles la série

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^k}$$

converge et calculer sa somme.
Solution.
On a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_j}{\|\mathbf{x}\|^k} = \frac{x_j}{\|\mathbf{x}\| - 1} \ , \ 1 \leq j \leq n$$

si et seulement si $\|\mathbf{x}\| > 1$. Par suite

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^k} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\| - 1}$$

si $\|\mathbf{x}\| > 1$ et la série diverge autrement.

19. Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Montrer que la série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{A}^k$$

converge si $\|\mathbf{A}\| < 1$ et calculer sa somme.
Solution.
On a

$$\mathbf{I} - \mathbf{A}^k = (\mathbf{I} - \mathbf{A})(\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \cdots + \mathbf{A}^{k-1}).$$

Si $\|\mathbf{A}\| < 1$, la série

$$\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \cdots$$

converge normalement, à fortiori simplement et, laissant $k \to +\infty$ dans la relation précédente,

$$\mathbf{I} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}) \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{A}^k.$$

La matrice $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ est donc inversible et la somme de la série est son inverse.

20. On considère une suite décroissante d'ensembles compacts non vides :

$$E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \supseteq \cdots$$

Montrer que l'intersection

$$\bigcap_{k \geq 1} E_k$$

est non vide. La conclusion tient-elle si l'on remplace « compacts » par « fermés » ?

Solution.

Considérons une suite quelconque de points $\mathbf{x}_k \in E_k$. Ces points, étant tous dans E_1 admettent une suite partielle $\mathbf{x}_{k_p}$ qui converge vers un point $\mathbf{x}$ de E_1. Comme, quel que soit N, les points $\mathbf{x}_{k_p}$ sont tous dans E_N après un certain rang, on a en fait $\mathbf{x} \in \bigcap_{k \geq 1} E_k$.

La conclusion serait fausse si l'on remplaçait « compacts » par « fermés » : $E_k = [k, +\infty[$.

3 Fonctions numériques continues

1. Soient $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions continues. Montrer que la fonction

$$f(\mathbf{x}) = f_1(x_1) f_2(x_2) \cdots f_n(x_n)$$

est continue sur $\mathbb{R}^n$.

Solution.

Si $\mathbf{x_k} \to \mathbf{x}$, alors, pour chaque $1 \leq j \leq n$, $x_{k,j} \to x_j$ et

$$f_j(x_{k,j}) \to f_j(x_j)$$

donc

$$f_1(x_{k,1}) f_2(x_{k,2}) \cdots f_n(x_{k,n}) \to f_1(x_1) f_2(x_2) \cdots f_n(x_n).$$

2. Déterminer l'ensemble des points de continuité des fonctions suivantes :
– $f(x_1, x_2) = \operatorname{sgn} x_1 \operatorname{sgn} x_2$ (fonction signe) ;
– $f(x_1, x_2) = x_1\, x_2\, \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x_1)\, \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x_2)$ (fonction indicatrice) ;
– $f(x_1, x_2) = \operatorname{sgn}(x_1 - x_2) \operatorname{sgn}(x_1 + x_2)$.

Solution.

— La fonction $\operatorname{sgn} x_1 \operatorname{sgn} x_2$ vaut 1 si $x_1 x_2 > 0$ et -1 si $x_1 x_2 < 0$. Elle est discontinue le long des axes des coordonnées.

— La fonction $x_1\, x_2\, \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x_1)\, \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x_2)$ vaut 1 si x_1 et x_2 sont rationnels et $x_1 x_2 \neq 0$ et vaut 0 autrement. Elle est discontinue partout sauf à l'origine puisque
$$x_1\, x_2\, \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x_1)\, \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x_2) \leq x_1 x_2.$$
— La fonction $\operatorname{sgn}(x_1 - x_2)\operatorname{sgn}(x_1 + x_2)$ est discontinue sur les droites $x_1 - x_2 = 0$ et $x_1 + x_2 = 0$.

3. Soient $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction. Montrer qu'elle est continue si et seulement si elle possède la propriété suivante : pour tout ensemble ouvert $O \subseteq \mathbb{R}^n$, l'ensemble $f^{-1}(O)$ est ouvert.

   Solution.

   On sait que la condition est nécessaire.

   Vérifions qu'elle est suffisante. Donnés $\mathbf{x}_0$ et $\epsilon > 0$ arbitraires,
$$\mathbf{x}_0 \in f^{-1}(B(f(\mathbf{x}_0), \epsilon)).$$
   Cet ensemble étant ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que
$$B(\mathbf{x}_0, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(\mathbf{x}_0), \epsilon))E,$$
   c'est-à-dire tel que
$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \ \text{ implique } \ \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| < \epsilon.$$

4. Vrai ou faux ?
   - Si $F \subseteq \mathbb{R}$ est fermé et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est continue, l'ensemble $f^{-1}(F)$ est fermé.
   - Si $F \subseteq \mathbb{R}^n$ est fermé et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est continue, l'ensemble $f(F)$ est fermé.

   Solution.

   — Vrai. $f^{-1}(E) = \left(f^{-1}(E^c)\right)^c$.

   — Faux. Si
$$f(x) = \frac{x^2}{1 + x^2},$$
   on a $f(\mathbb{R}) = [0, 1[$.

5. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Que peut-on dire des ensembles suivants ?
   - $\{\mathbf{x} \mid f(\mathbf{x}) > \alpha\}$;
   - $\{\mathbf{x} \mid f(\mathbf{x}) \geq \alpha\}$;
   - $\{\mathbf{x} \mid f(\mathbf{x}) = \alpha\}$.

Solution.
— $\{\mathbf{x} \mid f(\mathbf{x}) > \alpha\}$, image inverse d'un intervalle ouvert, est ouvert.
— $\{\mathbf{x} \mid f(\mathbf{x}) \geq \alpha\}$, image inverse d'un intervalle fermé, est fermé.
— $\{\mathbf{x} \mid f(\mathbf{x}) = \alpha\}$ est fermé pour la même raison.

6. Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice carrée dont les entrées $a_{i,j} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues. Montrer que :
– La norme $\|\mathbf{A}(\mathbf{x})\|$ est une fonction continue.
– Le déterminant dét$(\mathbf{A}(\mathbf{x}))$ est une fonction continue.
– L'ensemble $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}(\mathbf{x}) \text{ est inversible}\}$ est un ensemble ouvert.
Solution.
— On a
$$\|\mathbf{A}(\mathbf{x})\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(\mathbf{x})}.$$
— On a
$$\text{dét}(\mathbf{A}(\mathbf{x})) = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$
où σ est une permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$ et $\operatorname{sgn}(\sigma)$ est son signe.
— Cet ensemble est l'image inverse d'un ensemble ouvert ($\mathbb{R} \setminus \{0\}$) par une fonction continue (le déterminant).

7. Montrer qu'un sous-ensemble connexe de $\mathbb{R}$ est nécessairement un intervalle.
Solution.
Supposons que $E \subseteq \mathbb{R}$ est un ensemble connexe non vide ou non réduit à un point. Soit $x_0 \in E$. Posons
$$a = \inf\{x \leq x_0 \mid x \in E\} \quad \text{et} \quad b = \sup\{y \geq x_0 \mid y \in E\}.$$
Alors $E = (a, b)$. Si par exemple $z \in]x_0, b[$ n'appartenait pas à E, on aurait
$$E =]-\infty, z[\, E \cup\,]z, +\infty[\, E.$$

8. Soient $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que quels que soient $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2 \in E$ et quel que soit y entre $f(\mathbf{x}_1)$ et $f(\mathbf{x}_2)$, il existe $\mathbf{x} \in [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$ tel que $f(\mathbf{x}) = y$.
Solution.
Considérons la fonction continue $\phi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par
$$\phi(t) = f((1-t)\,\mathbf{x}_1 + t\,\mathbf{x}_2).$$
Il existe $s \in]0, 1[$ tel que $\phi(s) = y$.

9. Soient $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble compact et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement positive. Montrer qu'il existe un nombre μ strictement positif tel que $f(\mathbf{x}) \geq \mu$ pour tout $\mathbf{x} \in E$. La conclusion tient-elle si l'on remplace « compact » par « fermé » ?

   Solution.

   Puisque f atteint son minimum sur E et qu'elle est strictement positive,
   $$\mu = \inf\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in E\} > 0.$$
   La conclusion est fausse si l'on remplace « compact » par « fermé » : si
   $$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
   et $E = [0, +\infty[$, on a $\mu = 0$.

10. Soient E, $F \subseteq \mathbb{R}^n$ des ensembles compacts. Vérifier que la fonction
   $$f(\mathbf{x}) = \inf\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \mid \mathbf{y} \in F\}$$
   est continue. En déduire qu'il existe $\mathbf{x}_0 \in E$ et $\mathbf{y}_0 \in F$ tels que
   $$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad \text{pour tout } \mathbf{x} \in E,\, \mathbf{y} \in F.$$
   Solution.

   La fonction $\mathbf{y} \mapsto \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ satisfait l'inégalité
   $$|\|\mathbf{x} - \mathbf{y}_1\| - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}_2\|| \leq \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|.$$
   Elle est de ce fait continue et atteint son minimum sur tout ensemble compact. Par suite, il existe $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in F$ tels que
   $$f(\mathbf{x}_1) = \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1\| \;,\; f(\mathbf{x}_2) = \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{y}_2\|$$
   et
   $$|f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2)| \leq \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|.$$
   La fonction f est continue et atteint son minimum sur E. Si $\mathbf{x}_0 \in E$ est un point où f atteint ce minimum et si $\mathbf{y}_0 \in F$ est un point où $f(\mathbf{x}_0) = \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0\|$, on aura
   $$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0\| = f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x}) \quad \text{pour tout } \mathbf{x} \in E$$
   donc
   $$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad \text{pour tout } \mathbf{x} \in E,\, \mathbf{y} \in F.$$

11. Montrer que la fonction

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\arctan \mathbf{a}^T \mathbf{x}}{1 + \|\mathbf{x}\|^2}$$

atteint son maximum et son minimum sur $\mathbb{R}^n$.

Solution.

On a

$$f(\mathbf{a}) > 0 \quad , \quad f(-\,\mathbf{a}) = -\,f(\mathbf{a})$$

et

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \to +\infty} f(\mathbf{x}) = 0.$$

Il existe donc $R > \|\mathbf{a}\|$ tel que

$$\|\mathbf{x}\| > R \text{ implique } |f(\mathbf{x})| < f(\mathbf{a}).$$

Sur la boule compacte $\overline{B}(\mathbf{0}, R)$, f atteint son maximum (en $\mathbf{x}_M$) et son minimum (en $f(\mathbf{x}_m)$). Alors

$$f(\mathbf{x}_m) \leq f(\mathbf{x}) \leq \mathbf{x}_M \qquad \text{pour tout } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

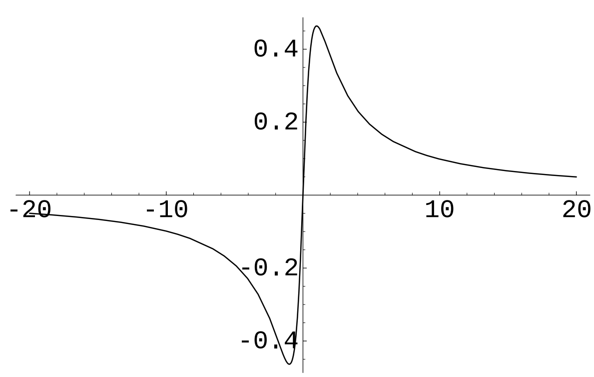

FIG. 3 – La fonction $\arctan x/(1 + x^2)$

4 Fonctions numériques dérivables

1. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. Montrer que la fonction

$$h(x_1, x_2) = f(x_1)\, g(x_2)$$

est dérivable.
Solution.
La fonction h est dérivable et

$$\mathbf{grad}\, h(\mathbf{x}) = (g(x_2)f'(x_1)\,,\ f(x_1)g'(x_2))$$

car

$$\begin{gathered}
h(\mathbf{y}) - h(\mathbf{x}) = (f(y_1) - f(x_1))g(y_2) + f(x_1)(g(y_2) - g(x_2)) \\
= (f'(x_1)(y_1 - x_1) + r_f(y_1))g(y_2) + f(x_1)(g'(x_2)(y_2 - x_2) + r_g(y_2)) \\
= (f'(x_1)(y_1 - x_1) + r_f(y_1))g(x_2) + f(x_1)(g'(x_2)(y_2 - x_2) + r_g(y_2)) \\
+(g(y_2) - g(x_2))(f'(x_1)(y_1 - x_1) + r_f(y_1)) \\
= g(x_2)f'(x_1)(y_1 - x_1) + f(x_1)g'(x_2)(y_2 - x_2) + r(\mathbf{y})
\end{gathered}$$

où

$$\begin{gathered}
\frac{r(\mathbf{y})}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|} = g(x_2)\frac{r_f(y_1)}{y_1 - x_1}\frac{y_1 - x_1}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|} + f(x_1)\frac{r_g(y_2)}{y_2 - x_2}\frac{y_2 - x_2}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|} \\
+(g(y_2) - g(x_2))f'(x_1)\frac{y_1 - x_1}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|} + (g(y_2) - g(x_2))\frac{r_f(y_1)}{y_1 - x_1}\frac{y_1 - x_1}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|}
\end{gathered}$$

donc

$$\lim_{\mathbf{y} \to \mathbf{x}} \frac{r(\mathbf{y})}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|} = 0.$$

2. Déterminer l'ensemble des points où la fonction

$$f(x_1, x_2) = |x_1|\, x_2^2$$

est dérivable.
Solution.
La fonction est de classe $C^{(1)}$, donc dérivable, dans les demi-plans $x_1 > 0$ et $x_1 < 0$. Elle n'admet pas de dérivées partielles et donc n'est pas dérivable aux points $(0, x_2)$ tels que $x_2 \neq 0$. À l'origine, elle est dérivable et $f'(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ car

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{0}} \frac{|x_1| x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = 0.$$

3. Même question pour la fonction

$$f(x_1, x_2) = \sqrt[3]{x_1 x_2}.$$

Solution.

La fonction est de classe $C(1)$ donc dérivable dans $\{\mathbf{x} \mid x_1x_2 \neq 0\}$. Elle n'admet pas de dérivées partielles aux points où $x_1x_2 = 0$ et donc n'est pas dérivable en ces points.

4. Soit $p > 1$. Calculer $\|\mathbf{grad}(\|\mathbf{x}\|^p)\|$.

   Solution.

   On a
$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\|\mathbf{x}\|^p) = p\, x_1 \|\mathbf{x}\|^{p-2}$$
   donc
$$\|\mathbf{grad}(\|\mathbf{x}\|^p)\| = p\, \|\mathbf{x}\|^{p-1}.$$

5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Calculer le gradient de la fonction $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $g(\mathbf{x}) = f(\|\mathbf{x}\|)$.

   Solution.

   Pour $1 \leq j \leq n$,
$$\frac{\partial f(\|\mathbf{x}\|)}{\partial x_j} = f'(\|\mathbf{x}\|)\frac{x_j}{\|\mathbf{x}\|} \quad \text{si} \quad \|\mathbf{x}\| \neq 0$$
   donc
$$\mathbf{grad}\, g(\mathbf{x}) = f'(\|\mathbf{x}\|)\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \quad \text{si} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$
   Comme
$$\frac{g(x_j\mathbf{e}_j^{(n)}) - g(\mathbf{0})}{x_j} = \frac{f(|x_j|) - f(0)}{x_j},$$
   la fonction g possède des dérivées partielles à l'origine si et seulement si $f'(0) = 0$ auquel cas
$$\mathbf{grad}\, g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

6. Soit
$$f_k(x) = \begin{cases} x^k \sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
   Montrer que
   – f_0 n'est pas continue ;
   – f_1 est continue mais non dérivable ;
   – f_2 est dérivable mais non continûment dérivable ;
   – f_3 est continûment dérivable mais non deux fois dérivable...

Solution.

—

$$\lim_{x\to+\infty} \sin\frac{1}{x} \text{ n'existe pas.}$$

—

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} \text{ n'existe pas.}$$

—

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to 0} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} \text{ n'existe pas.}$$

—

$$\lim_{x\to 0} 3x^2\sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to 0} 3x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} \text{ n'existe pas.}$$

En général, on peut raisonner à partir des relations

$$f_n(x) = xf_{n-1}(x)\ ,\ f'_n(x) = xf'_{n-1}(x) + f_{n-1}(x) \text{ si } x \neq 0.$$

7. Soient $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert, $\mathbf{x}_0 \in E$ un de ses points et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction numérique définie sur E. La **dérivée directionnelle** de f en $\mathbf{x}_0$ dans la direction du vecteur **unitaire e** ($\|\mathbf{e}\| = 1$) est

$$D_{\mathbf{e}}f(\mathbf{x}_0) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{e}) - f(\mathbf{x}_0)}{h}$$

(si la limite existe). Montrer qu'une fonction dérivable en $\mathbf{x}_0$ admet une dérivée directionnelle suivant toute direction $\mathbf{e}$ en $\mathbf{x}_0$ et que

$$D_{\mathbf{e}}f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{grad}f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{e}.$$

Solution.
Si f est dérivable en $\mathbf{x}_0$, on aura

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{e}) - f(\mathbf{x}_0)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{Df(\mathbf{x}_0)(h\mathbf{e}) + r(h)}{h}$$
$$= Df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}) + \lim_{h\to 0+} \frac{r(h)}{h} = \mathbf{grad}f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{e}.$$

8. Soient $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert convexe et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur E. Montrer que, quels que soient $\mathbf{x}_1$ et $\mathbf{x}_2$ dans E, on a

$$|f(\mathbf{x}_2) - f(\mathbf{x}_1)| \leq \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| \sup\{\|f'(\mathbf{x})\| \mid \mathbf{x} \in [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]\}.$$

Solution.
L'ensemble E étant convexe, $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] \subseteq E$. Il existe donc $\mathbf{x}_3 \in [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$ tel que

$$f(\mathbf{x}_2) - f(\mathbf{x}_1) = f'(\mathbf{x}_3)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$$

et par suite

$$|f(\mathbf{x}_2) - f(\mathbf{x}_1)| \leq \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| \sup\{\|f'(\mathbf{x})\| \mid \mathbf{x} \in [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]\}.$$

9. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$|f(\mathbf{x}_2) - f(\mathbf{x}_1)| \leq A \, \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|^p$$

avec $p > 1$. Montrer qu'elle est constante.
Solution.
L'hypothèse entraîne que les dérivées partielles de la fonction sont toutes partout nulles. En vertu de l'exercice précédent, elle doit être constante.

10. Développer la fonction $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3$ au point $(1, 1, 1)$.
Solution.
On a

$$\begin{gathered}
f(x_1, x_2, x_3) = 1 + ((x_1 - 1) + (x_2 - 1) + (x_3 - 1)) \\
+\frac{1}{2!}((x_1 - 1)(x_2 - 1) + (x_2 - 1)(x_1 - 1) + (x_1 - 1)(x_3 - 1) \\
+(x_3 - 1)(x_1 - 1) + (x_2 - 1)(x_3 - 1) + (x_3 - 1)(x_2 - 1)) \\
+\frac{1}{3!}((x_1 - 1)(x_2 - 1)(x_3 - 1) + (x_1 - 1)(x_3 - 1)(x_2 - 1) \\
+(x_2 - 1)(x_1 - 1)(x_3 - 1) + (x_2 - 1)(x_3 - 1)(x_1 - 1) \\
+(x_3 - 1)(x_1 - 1)(x_2 - 1) + (x_3 - 1)(x_2 - 1)(x_1 - 1))
\end{gathered}$$

c'est-à-dire

$$\begin{gathered}
x_1x_2x_3 = -2 + x_1 + x_2 + x_3 \\
+(x_1 - 1)(x_2 - 1) + (x_1 - 1)(x_3 - 1) + (x_2 - 1)(x_3 - 1) \\
+(x_1 - 1)(x_2 - 1)(x_3 - 1).
\end{gathered}$$

11. Soient $\phi \in C^{(k)}(\mathbb{R})$ et $f(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{a}^T\mathbf{x})$. Vérifier que le développement limité de cette fonction à l'origine peut s'écrire

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{0}) + \sum_{p=1}^{k-1} \phi^{(p)}(0) \sum_{\|\boldsymbol{\alpha}\|_1 = p} \frac{1}{\boldsymbol{\alpha}!} (a_1x_1)^{\alpha_1} (a_2x_2)^{\alpha_2} \cdots (a_nx_n)^{\alpha_n} + r_k$$

et préciser la forme du reste r_k.
Solution.
On a

$$D^{\boldsymbol{\alpha}}\phi(\mathbf{a}^T\mathbf{x}) = \phi^{\|\boldsymbol{\alpha}\|_1}(\mathbf{a}^T\mathbf{x})\,\mathbf{a}^{\boldsymbol{\alpha}}$$

donc,

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{0}) + \sum_{p=1}^{k-1} \phi^{(p)}(0) \sum_{\|\boldsymbol{\alpha}\|_1 = p} \frac{1}{\boldsymbol{\alpha}!} (a_1x_1)^{\alpha_1} (a_2x_2)^{\alpha_2} \cdots (a_nx_n)^{\alpha_n} + r_k$$

où

$$r_k = \phi^k(\mathbf{a}^T\mathbf{y}) \sum_{\|\boldsymbol{\alpha}\|_1 = k} \frac{1}{\boldsymbol{\alpha}!}(a_1x_1)^{\alpha_1} (a_2x_2)^{\alpha_2} \cdots (a_nx_n)^{\alpha_n}$$

avec $\mathbf{y} \in [\mathbf{0}, \mathbf{x}]$.

12. Soient $\phi \in C^{(2)}(\mathbb{R})$ et $f(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x})$. Calculer $f'(\mathbf{0})$ et $\mathbf{H}(\mathbf{0})$.
Solution.
On a

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\,\phi(\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}) = \phi'(\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x})\;2\;\sum_{k=1}^{n} a_{k,j}x_j$$

et

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i x_j}\,\phi(\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}) = \phi''(\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x})\;2\;\sum_{p=1}^{n} a_{p,i}x_i\;2\;\sum_{k=1}^{n} a_{k,j}x_j + \phi'(\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x})\;2\;a_{i,j}.$$

Alors

$$f'(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

et

$$\mathbf{H}(\mathbf{0}) = \phi'(0)\,2\,\mathbf{A}.$$

5 Optimisation

1. Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_N, y_N)$ des points du plan tels que

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_N.$$

Déterminer la pente a et l'ordonnée à l'origine b de façon à ce que la droite $y = ax + b$ obtenue minimise la somme des carrés des écarts entre les points donnés (x_k, y_k) et les points calculés $(x_k, ax_k + b)$:

$$\sum_{k=1}^{N} (y_k - ax_k - b)^2.$$

(**droite des moindres carrés**)
Solution.
Il s'agit de minimiser le polynôme

$$f(a, b) = a^2 \sum_{k=1}^{N} x_k^2 + Nb^2 + 2ab \sum_{k=1}^{N} x_k - 2a \sum_{k=1}^{N} x_k y_k - 2b \sum_{k=1}^{N} y_k + \sum_{k=1}^{N} y_k^2.$$

Les conditions du premier ordre conduisent à des équations linéaires

$$a \sum_{k=1}^{N} x_k^2 + b \sum_{k=1}^{N} x_k = \sum_{k=1}^{N} x_k y_k$$
$$a \sum_{k=1}^{N} x_k + Nb = \sum_{k=1}^{N} y_k$$

admettant une solution unique

$$a = \frac{N \sum_{k=1}^{N} x_k y_k - \sum_{k=1}^{N} x_k \sum_{k=1}^{N} y_k}{N \sum_{k=1}^{N} x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{N} x_k\right)^2},$$
$$b = \frac{\sum_{k=1}^{N} x_k^2 \sum_{k=1}^{N} y_k - \sum_{k=1}^{N} x_k \sum_{k=1}^{N} x_k y_k}{N \sum_{k=1}^{N} x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{N} x_k\right)^2}.$$

Les mineurs principaux de la matrice hessienne,

$$\sum_{k=1}^{N} x_k^2 \quad \text{et} \quad N \sum_{k=1}^{N} x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{N} x_k\right)^2,$$

étant positifs, il s'agit d'un minimum local. Puisque

$$\lim_{a^2+b^2\to+\infty} f(a,b) = +\infty,$$

il s'agit en fait du minimum global de la fonction f sur $\mathbb{R}^2$.

2. Déterminer le minimum de l'expression

$$\int_{-1}^{1} (\sin \pi\, t - a - b\, t - c\, t^2)^2 dt$$

lorsque $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Solution.

Il s'agit de minimiser le polynôme

$$f(a,b,c) = 2a^2 + \frac{2}{3}b^2 + \frac{2}{5}c^2 + \frac{4}{3}ac - \frac{4}{\pi}b + 1.$$

Les équations des points critiques sont

$$a + \frac{1}{3}c = 0\ ,\ \frac{1}{3}b - \frac{1}{\pi} = 0\ ,\ \frac{1}{3}a + \frac{1}{5}c = 0$$

et admettent pour unique solution

$$a = 0\ ,\ b = \frac{3}{\pi}\ ,\ c = 0.$$

Les mineurs principaux de la matrice hessienne sont 1, 1/3 et 12/305 et il s'agit d'un minimum local. Puisque

$$\lim_{a^2+b^2+c^2\to+\infty} f(a,b,c) = +\infty,$$

il s'agit en fait du point où f atteint son minimum global

$$1 - \frac{6}{\pi^2}.$$

3. Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui est à la fois convexe et concave est nécessairement une fonction affine.

Solution.

On a

$$f((1-\lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}) = (1-\lambda)f(\mathbf{x}) + \lambda f(\mathbf{y}).$$

La fonction $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{0})$ satisfait encore la relation précédente et de plus

$$g(\lambda\,\mathbf{x}) = \lambda\,g(\mathbf{x}) \;\text{ si }\; 0 \leq \lambda \leq 1\;,\; g(-\mathbf{x}) = -g(\mathbf{x}).$$

On tire aussitôt de la première de ces deux propreté que

$$g(\lambda\,\mathbf{x}) = \lambda\,g(\mathbf{x}) \;\text{ pour tout }\; \lambda \geq 0\;,\; g(\mathbf{x_1} + \mathbf{x}_2) = g(\mathbf{x}_1) + g(\mathbf{x}_2).$$

On a

$$g\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\,\mathbf{e}_j^{(n)}\right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\,g(\mathbf{e}_j^{(n)}) \;\text{ si }\; \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \leq 1$$

c'est-à-dire, en posant

$$\mathbf{a} = (g(\mathbf{e}_1^{(n)}),\, g(\mathbf{e}_2^{(n)}),\, \ldots,\, g(\mathbf{e}_n^{(n)})),$$

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T\mathbf{x} \;\text{ si }\; \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n \;\text{ est tel que }\; \sum_{j=1}^{n} x_j \leq 1.$$

On en déduit d'abord que

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T\mathbf{x} \;\text{ si }\; \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$$

puis que

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T\mathbf{x} \;\text{ pour tout }\; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

en utilisant les propriétés supplémentaires de g (tout point de $\mathbb{R}^n$ est la différence de deux points de $\mathbb{R}_+^n$). Ainsi

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T\mathbf{x} + f(\mathbf{0})$$

est une fonction affine.

4. Montrer qu'une fonction convexe sur un polyèdre y atteint toujours son maximum en certains des sommets.
   Solution.
   Si

$$[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m]$$

est le polyèdre, ses points sont des combinaisons linéaires de ses sommets et si f est la fonction, on a

$$f\left(\sum_{k=0}^{m} \lambda_k\,\mathbf{x}_k\right) \leq \sum_{k=0}^{m} \lambda_k\,f(\mathbf{x}_k) \leq \sup\{f(\mathbf{x}_k) \mid 0 \leq k \leq m\}.$$

5. Montrer que la fonction

$$f(\mathbf{x}) = (1 + \mathbf{x}^T\mathbf{x})^{\mathbf{x}^T\mathbf{x}}$$

est convexe.

Solution.

La fonction $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^T\mathbf{x}$ est convexe et la fonction $u \mapsto (1+u)^u$ est convexe croissante sur $]0, +\infty[$.

6 Transformations de l'espace euclidien

1. Soit $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction. Vérifier qu'elle est bornée (en norme) sur l'ensemble E si et seulement si ses composantes $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ le sont. Posant

$$M = \sup\{\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \mid \mathbf{x} \in E\}$$

et

$$M_i = \sup\{|f_i(\mathbf{x})| \mid \mathbf{x} \in E\},$$

montrer que

$$M_i \leq M \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m M_i^2}.$$

Solution.

On a, quels que soient $1 \leq i \leq m$ et $\mathbf{x} \in E$,

$$|f_i(\mathbf{x})| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m f_i(\mathbf{x})^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m M_i^2}$$

ce qui entraîne

$$M_i \leq M \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m M_i^2}.$$

2. Soit $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la fonction

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \dfrac{(x_1^2 - x_2^2,\, 2x_1x_2)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Vérifier que $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$. Déterminer l'ensemble E_c des points où elle est continue puis l'ensemble E_d des points où elle est dérivable.

Solution.

On a

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|^2 = \frac{x_1^4 - 2x_1^2x_2^2 + x_2^4 + 4x_1^2x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} = x_1^2 + x_2^2 = \|\mathbf{x}\|^2.$$

La fonction est de classe $C^{(1)}$ donc dérivable donc continue sur $\mathbb{R}^n \setminus \mathbf{0}$. Elle est continue à l'origine mais n'y est pas dérivable parce que sa première composante f_1 n'y admet pas de dérivées partielles.

3. Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

   –
   $$y_1 = e^{x_1} \cos x_2,\ y_2 = e^{x_1} \sin x_2$$

   –
   $$y_1 = x_1 + x_2 + x_3,\ y_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

   –
   $$y_1 = x_1 + x_2,\ y_2 = x_1 - x_2,\ y_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

   –
   $$y_1 = \cos x_1,\ y_2 = \sin x_1,\ y_3 = x_1.$$

   Solution.

   — On a
   $$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} e^{x_1} \cos x_2 & -e^{x_1} \sin x_2 \\ e^{x_1} \sin x_2 & e^{x_1} \cos x_2 \end{pmatrix}.$$

   — On a
   $$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \end{pmatrix}.$$

   — On a
   $$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ \dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} & \dfrac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \end{pmatrix}$$

   si $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, la fonction n'étant pas dérivable à l'origine car sa troisième composante f_3 ne l'est pas.

   — On a
   $$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -\sin x_1 \\ \cos x_1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Pour chacune des fonctions précédente, déterminer l'image $\mathbf{f}(\mathbb{R}^n)$ de $\mathbb{R}^n$ par la fonction $\mathbf{f}$.

   Solution.

   — On a $\mathbf{f}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$ car

   $$(y_1,\, y_2) = \mathbf{f}\left(\log\sqrt{y_1^2 + y_2^2},\, \arctan\frac{y_2}{y_1} + k\pi\right)$$

   pour un $k \in \{-1, 0, 1\}$ approprié.

   — On a

   $$\mathbf{f}(\mathbb{R}^3) = \{(y_1, y_2) \mid y_1^2 \leq 3y_2\}.$$

   En effet, le cercle d'équation $x_1^2 + x_2^2 = y_2 - x_3^2$ coupe la droite d'équation $x_1 + x_2 = y_1 - x_3$ si et seulement si son rayon est au moins aussi grand que la distance de la droite à l'origine, c'est-à-dire si et seulement si

   $$\sqrt{y_2 - x_3^2} \geq \frac{|y_1 - x_3|}{\sqrt{2}}$$

   ce qui admet une solution en x_3 si et seulement si $y_1^2 \leq 3y_2$. On a alors, par exemple,

   $$(y_1,\, y_2) = \mathbf{f}\left(\frac{y_1}{3} + \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{3y_2 - y_1^2},\, \frac{y_1}{3} - \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{3y_2 - y_1^2},\, \frac{y_1}{3}\right).$$

   — On obtient un cône

   $$\mathbf{f}(\mathbb{R}^2) = \left\{(y_1, y_2, y_3) \mid y_3 = \sqrt{\frac{y_1^2 + y_2^2}{2}}\right\}$$

   car alors

   $$(y_1, y_2, y_3) = \mathbf{f}\left(\frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{y_1 - y_2}{2}\right).$$

   — On obtient une hélice

   $$\mathbf{f}(\mathbb{R}) = \{(y_1, y_2, y_3) \mid y_1^2 + y_2^2 = 1\ ,\ y_2 = y_1 \tan y_3\},$$

   $$(y_1, y_2, y_3) = \mathbf{f}(y_3).$$

5. Montrer, par un exemple approprié, que le théorème des accroissements finis,

   $$\mathbf{f}(\mathbf{x}_2) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_3)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1),$$

est faux pour une fonction $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ si $m > 1$.
Solution.
Considérer

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (e^{x_1} \cos x_2,\ e^{x_1} \sin x_2)$$

et

$$\mathbf{x}_2 = (0, 2\pi)\ ,\ \mathbf{x}_1 = (0, 0).$$

6. Soient $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert convexe et $\mathbf{f} : E \to \mathbb{R}^m$ une fonction dérivable. Montrer que, si $\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ pour tout $\mathbf{x} \in E$, la fonction $\mathbf{f}$ est constante dans E.
   Solution.
   Quels que soient $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in E$, on a

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_2) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_1)\| \leq \sqrt{m\,n}\ \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|\ \sup\{\|\mathbf{f}'(\mathbf{x})\| \mid \mathbf{x} \in [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]\} = 0.$$

7. Vrai ou faux ?
   Soient $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert et $\mathbf{f} : E \to \mathbb{R}^n$ une fonction admettant une matrice jacobienne dans E. Si $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|$ admet un minimum local en $\mathbf{x}_0 \in E$, $J\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = 0$.
   Solution.
   Faux. $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.
8. On considère la transformation des coordonnées sphériques aux coordonnées cartésiennes sur $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos\theta_1 \sin\theta_2 \\ x_2 &= r \sin\theta_1 \sin\theta_2 \\ x_3 &= r \cos\theta_2. \end{aligned}$$

   Pour quelles valeurs de $\mathbf{x}$ la transformation inverse est-elle définie ? continue ? dérivable ? Quelle est sa dérivée ?
   Solution.

On a

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

$$\theta_1 = \begin{cases} \arctan \frac{x_2}{x_1} & \text{si } x_1 > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x_1 = 0,\ x_2 > 0 \\ \arctan \frac{x_2}{x_1} + \pi & \text{si } x_1 < 0,\ x_2 \geq 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x_1 = 0,\ x_2 < 0 \\ \arctan \frac{x_2}{x_1} - \pi & \text{si } x_1 < 0,\ x_2 < 0. \end{cases}$$

$$\theta_2 = \begin{cases} \arctan \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_3} & \text{si } x_3 > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x_3 = 0 \\ \arctan \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_3} + \pi & \text{si } x_3 > 0. \end{cases}$$

Cette fonction inverse $\mathbf{f}$ est définie dans $\mathbb{R}^3$ privé de la droite d'équations $x_1 = x_2 = 0$. Elle est continue sur $\mathbb{R}^3$ privé du demi-plan défini par $x_1 \leq 0, x_2 = 0$. Elle est dérivable en tout point de cet ensemble ouvert et sa dérivée $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ est

$$\begin{pmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} & \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} & \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \\ \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} & 0 \\ \frac{x_1 x_3}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} & \frac{x_2 x_3}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} & \frac{-\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)} \end{pmatrix}.$$

7 Dérivation en chaîne

1. Montrer que la composition $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ de fonctions $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $\mathbf{g} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ de classe $C^{(1)}$ est une fonction de classe $C^{(1)}$.

   Solution.

   Posant $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ et $\mathbf{z} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$, on a

   $$\frac{\partial z_k}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial z_k}{\partial y_i}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})$$

   pour tout $1 \leq k \leq p$ et pour tout $1 \leq j \leq n$.

2. Calculer le jacobien
$$\frac{\partial(r,\theta_1,\theta_2)}{\partial(x_1,x_2,x_3)}$$
(l'exprimer en termes des variables x_1, x_2 et x_3).
Solution.
On sait que
$$\frac{\partial(x_1 x_2, x_3)}{\partial(r,\theta_1,\theta_2)} = -r\sin\theta_2.$$
Donc
$$\frac{\partial(r,\theta_1,\theta_2)}{\partial(x_1,x_2,x_3)} = -\frac{1}{r\sin\theta_2} = -\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}.$$

3. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable strictement positive et considérons la fonction $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par
$$g(\mathbf{x}) = \sqrt{f(\mathbf{x})}.$$
Montrer qu'elle est dérivable et que
$$g'(\mathbf{x}) = \frac{f'(\mathbf{x})}{2\sqrt{f(\mathbf{x})}}.$$
Solution.
La fonction g est dérivable comme composition des fonctions dérivables $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x})$ et $y \mapsto \sqrt{y}$. On a
$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\sqrt{f(\mathbf{x})}}\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}).$$

4. Soient $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables et considérons la fonction $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par
$$h(\mathbf{x}) = \log\left(1 + f^2(\mathbf{x}) + g^2(\mathbf{x})\right).$$
Montrer qu'elle est dérivable et que
$$h'(\mathbf{x}) = 2\,\frac{f(\mathbf{x})f'(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})g'(\mathbf{x})}{1 + f^2(\mathbf{x}) + g^2(\mathbf{x})}.$$
Solution.
La fonction h est dérivable comme composition des fonctions dérivables $\mathbf{x} \mapsto (f(\mathbf{x}),\, g(\mathbf{x}))$ et $\mathbf{y} \mapsto \log(1 + y_1^2 + y_2^2)$. On a
$$\frac{\partial h}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = 2\,\frac{1}{1 + f^2(\mathbf{x}) + g^2(\mathbf{x})}\left(f(\mathbf{x})\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\frac{\partial g}{\partial x_j}(\mathbf{x})\right).$$

5. Soit $f \in C^{(2)}(\mathbb{R}^2)$ et considérons l'équation d'onde
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}.$$
Montrer que pour un changement linéaire approprié des variables,
$$\mathbf{y} = \mathbf{P}\mathbf{x},$$
elle devient
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_2} = 0.$$
En déduire la forme générale de sa solution.
Solution.
Si $y_1 = p_{1,1}x_1 + p_{1,2}x_2$ et $y_2 = p_{2,1}x_1 + p_{2,2}x_2$, l'équation devient
$$p_{1,1}^2\frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2} + 2\,p_{1,1}p_{2,1}\frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_2} + p_{2,1}^2\frac{\partial^2 f}{\partial y_2^2}$$
$$= \frac{1}{c^2}\left(p_{1,2}^2\frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2} + 2\,p_{2,2}p_{1,2}\frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_2} + p_{2,2}^2\frac{\partial^2 f}{\partial y_2^2}\right).$$
Le choix $p_{1,2} = c\,p_{1,1}$, $p_{2,2} = -\,c\,p_{2,1}$ la réduit à
$$2\,(1 + c^2)\,p_{1,1}p_{2,1}\,\frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_2} = 0.$$
Donc, en posant
$$y_1 = x_1 + c\,x_2\ ,\ y_2 = x_1 -\ c\,x_2$$
il faut résoudre
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_2 \partial y_1} = 0.$$
Comme
$$\frac{\partial}{\partial y_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right) = 0,$$
il faut que
$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = g(y_1)$$
puis
$$f = F(y_1) + G(y_2)$$
c'est-à-dire que
$$f(x_1, x_2) = F(x_1 + c\,x_2) + G(x_1 - c\,x_2).$$

6. Vérifier que le laplacien

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

est invariant sous une transformation orthogonale

$$\mathbf{y} = \mathbf{P}\mathbf{x} \ \text{ avec } \ \mathbf{P}^T = \mathbf{P}^{-1}$$

des variables.
Solution.
Sous la transformation linéaire

$$\mathbf{y} = \mathbf{P}\mathbf{x},$$

l'opérateur différentiel

$$D = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_j}$$

devient

$$D = \sum_{k=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} (\mathbf{PAP}^T)_{k,q} \frac{\partial^2}{\partial y_q \partial y_k}.$$

Pour le laplacien, $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ et si $\mathbf{P}$ est orthogonale

$$\mathbf{PAP}^T = \mathbf{I}.$$

7. Montrer qu'en deux dimensions, les solutions de classe $C^{(2)}$ de l'équation de Laplace (les **fonctions harmoniques**)

$$\Delta f = 0$$

qui ne dépendent que de $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ sont de la forme

$$f(\mathbf{x}) = a \log \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + b.$$

Solution.
En coordonnées polaires,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2}.$$

Si $\Delta f = 0$ et si f ne dépend pas de θ_1, on a

$$r^2 \frac{d^2 f}{dr^2} + r \frac{df}{dr} = 0.$$

En posant $s = \log r$, on a

$$\frac{d}{dr} = \frac{1}{r}\frac{d}{ds}\ , \ \frac{d^2}{dr^2} = -\frac{1}{r^2}\frac{d}{ds} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2}{ds^2}.$$

Ainsi,

$$\frac{d^2 f}{ds^2} = 0$$

et

$$f(r) = a \log r + b.$$

8. Montrer qu'en trois dimensions, les solutions de classe $C^{(2)}$ de l'équation de Laplace

$$\Delta f = 0$$

qui ne dépendent que de $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ sont de la forme

$$f(\mathbf{x}) = \frac{a}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} + b.$$

Solution.
En coordonnées sphériques,

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta_2}\frac{\partial}{\partial \theta_2}\left(\sin\theta_2 \frac{\partial}{\partial \theta_2}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta_2}\frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2}.$$

Pour une fonction harmonique f ne dépendant que de r, on a donc

$$\frac{df}{dr}\left(r^2 \frac{df}{dr}\right) = 0$$

ce qui entraîne immédiatement

$$f(r) = \frac{a}{r} + b.$$

9. Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $p \in \mathbb{R}$ un nombre réel. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) quels que soient $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ et $t > 0$,

$$f(t\,\mathbf{x}) = t^p\, f(\mathbf{x});$$

(ii) quel que soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = p\, f(\mathbf{x}).$$

(théorème d'Euler sur les **fonctions homogènes**.
Solution.
La condition (i) entraîne la condition (ii). Il suffit de dériver les deux membres de la relation

$$f(t\,\mathbf{x}) = t^p\, f(\mathbf{x})$$

par rapport à t et de prendre $t = 1$ dans le résultat.
La condition (ii) entraîne la condition (i). On a

$$\frac{d}{dt} f(t\mathbf{x}) = \frac{1}{t}\, p\, f(t\mathbf{x})$$

par hypothèse. Posant $g(t) = f(t\mathbf{x})$ ($\mathbf{x}$ fixé), la relation

$$t\, \frac{dg}{dt} = p\, g(t)$$

admet pour solution

$$g(t) = At^p.$$

Lorsque $t = 1$, $A = g(1) = f(\mathbf{x})$ ce qui signifie que

$$f(t\mathbf{x}) = t^p f(\mathbf{x}).$$

8 Fonctions inverses

1. Déterminer les points $\mathbf{x}_0$ au voisinage desquels le système

$$y_1 = x_1^2 + x_2^2\ ,\ y_2 = x_1 x_2$$

peut être résolu pour $\mathbf{x}$. Calculer explicitement cette solution.
Solution.
On a

$$\frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} = 2(x_1^2 - x_2^2)$$

et les équations peuvent être résolues au voisinage de tout point $\mathbf{x}$ tel que $x_1^2 \neq x_2^2$. Explicitement, si $x_1 \neq 0$,

$$x_1 = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(y_1 - \sqrt{y_1^2 - 4y_2^2}\right)}\ ,\ x_2 = \frac{y_2}{\pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(y_1 - \sqrt{y_1^2 - 4y_2^2}\right)}}$$

et, si $x_1 = 0$, $x_2 = \pm\sqrt{y_1}$. Si $x_1^2 \neq x_2^2$, on a $y_1^2 - 4y_2^2 > 0$ et les droites $x_1^2 = x_2^2$ correspondent aux droites $y_1^2 = 4y_2^2$.

2. Déterminer les points $\mathbf{x}_0$ au voisinage desquels le système

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\ y_2 &= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \\ &\cdots \\ y_n &= x_1^n + x_2^n + \cdots + x_n^n \end{aligned}$$

peut être résolu pour $\mathbf{x}$.

Solution.

On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} &= \text{dét}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2x_1 & 2x_2 & \cdots & 2x_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ nx_1^{n-1} & nx_2^{n-1} & \cdots & nx_n^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= n!\prod_{i=1}^{n-1}(x_n - x_i)\prod_{i=1}^{n-2}(x_{n-1} - x_i)\cdots(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

— le déterminant est un polynôme en x_n qui s'annule si aux points x_i, $1 \leq i \leq n-1$, et dont le coefficient du terme x_n^n est

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})}.$$

Par conséquent, le système peut être résolu au voisinage de tout point $\mathbf{x}$ dont les coordonnées sont toutes distinctes.

3. Montrer que si la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

est inversible, le système d'équations

$$y_1 = ax_1 + \epsilon\, x_1^2 + bx_2 \ ,\ y_2 = cx_1 + dx_2 + \epsilon\, x_2^2$$

peut être résolu pour $\mathbf{x}$ près de l'origine. Obtenir la solution explicite dans le cas où

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Spécifier les points $\mathbf{y}$ pour lesquels la solution obtenue est valable. Qu'arrive-t-il lorsque ϵ tend vers 0 ?

Solution.

On a

$$\frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} == \text{dét} \begin{pmatrix} a + 2\epsilon x_1 & b \\ c & d + 2\epsilon x_2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)}(\mathbf{0}) = \text{dét}(\mathbf{A}) \neq 0$$

et le système peut être résolu pour $\mathbf{x}$ au voisinage de $\mathbf{0}$. Le système

$$y_1 = x_1 + \epsilon x_1^2 \ ,\ y_2 = x_1 + x_2 + \epsilon x_2^2$$

admet pour solution au voisinage de l'origine

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\epsilon y_1}}{2\epsilon} \ ,\ x_2 = \frac{-1 + \sqrt{3 + 4\epsilon y_2 - 2\sqrt{1 + 4\epsilon y_1}}}{2\epsilon}.$$

Lorsque $\epsilon \to 0$, ces expressions deviennent

$$x_1 = y_1 \ ,\ x_2 = y_2 - y_1$$

— la fonction inverse dépend de façon continue du paramètre ϵ.

4. Montrer que le système

$$y_1 = x_3 \cos x_1 x_2 \ ,\ y_2 = x_3 \sin x_1 x_2 \ ,\ y_3 = x_1 + x_3$$

peut être résolu pour $\mathbf{x}$ au voisinage de tout point $\mathbf{x}_0$ tel que $x_{0,1}x_{0,3} \neq 0$. Calculer les dérivées partielles au point $\mathbf{y}_0$ des fonctions obtenues lorsque $\mathbf{x}_0 = (1, 0, 1)$.

Solution.

On a

$$\frac{\partial(y_1, y_2, y_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = -x_1 x_3.$$

L'inverse de la matrice jacobienne de la transformation $\mathbf{x} \to \mathbf{y}$,

$$\begin{pmatrix} -x_2x_3 \sin x_1x_2 & -x_1x_3 \sin x_1x_2 & \cos x_1x_2 \\ x_2x_3 \cos x_1x_2 & x_1x_3 \cos x_1x_2 & \sin x_1x_2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

est la matrice de la transformation $\mathbf{y} \to \mathbf{x}$:

$$\begin{pmatrix} -\cos x_1x_2 & -\sin x_1x_2 & 1 \\ \dfrac{x_2x_3 \cos x_1x_2 - \sin x_1x_2}{x_1x_3} & \dfrac{x_2x_3 \sin x_1x_2 + \cos x_1x_2}{x_1x_3} & -\dfrac{x_2}{x_1} \\ \cos x_1x_2 & \sin x_1x_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lorsque $x_1 = 1, x_2 = 0$ et $x_3 = 1$, on obtient

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire que

$$\frac{\partial x_1}{\partial y_1}(1,0,2) = -1 \ , \ \frac{\partial x_1}{\partial y_3}(1,0,2) = \frac{\partial x_2}{\partial y_2}(1,0,2) = \frac{\partial x_3}{\partial y_1}(1,0,2) = 1,$$

les autres dérivées partielles étant nulles au point considéré.

5. Soit $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (x_1, x_2^3, x_3^5)$. Vérifier que $\mathbf{f}$ est inversible au voisinage de $\mathbf{0}$ bien que $\mathbf{f}'(\mathbf{0})$ ne le soit pas. Explication ?
   Solution.
   On a $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}) = (y_1, \sqrt[3]{y_2}, \sqrt[5]{y_3})$ et

$$\mathbf{f}'(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   La fonction $\mathbf{f}$ est bien de classe $C^{(1)}(\mathbb{R}^3)$. La fonction $\mathbf{f}^{-1}$ n'est pas dérivable à l'origine.

9 Fonctions implicites

1. On considère l'équation

$$x_1x_2 - x_3 \log x_2 + e^{x_1x_2} - 1 = 0$$

au voisinage du point $(0, 1, 2)$. Peut-on l'y résoudre pour x_1 ? pour x_2 ? pour x_3 ?
Solution.
Soit

$$f(\mathbf{x}) = x_1 x_2 - x_3 \log x_2 + e^{x_1 x_2} - 1.$$

Puisque

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2 + x_2 e^{x_1 x_2} \ , \ \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 - \frac{x_3}{x_2} + x_1 e^{x_1 x_2} \ , \ \frac{\partial f}{\partial x_3} = -\log x_2,$$

on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 1, 2) = 2 \ , \ \frac{\partial f}{\partial x_2}(0, 1, 2) = -2 \ , \ \frac{\partial f}{\partial x_3}(0, 1, 2) = 0,$$

et on peut résoudre pour x_1 ou pour x_2 mais pas pour x_3.

2. On considère le système d'équations

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \ , \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

au voisinage du point $(1, 0, 0)$. Quelles variables peut-on y éliminer ?
Solution.
Soient

$$f_1(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + x_3 \ , \ f_2(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Alors

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_i, x_j)} = 2(x_j - x_1).$$

Donc

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_2)}(1, 0, 0) \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_3)}(1, 0, 0) \neq 0$$

et l'on peut éliminer x_1 et x_2 du système et les exprimer en terme de x_3 ou éliminer x_1 et x_3 du système et les exprimer en terme de x_2 mais on ne peut pas exprimer x_2 et x_3 en terme de x_1.

3. On considère le système d'équations

$$x_1^2 - 2x_2 x_4 + x_3^2 = 0 \ , \ x_1^3 - x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 0$$

au voisinage du point $(-1, 1, 1, 1)$. Vérifier que l'on peut l'y résoudre pour x_1 et x_3 et calculer les dérivées partielles

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_2} \ , \ \frac{\partial x_1}{\partial x_4} \ , \ \frac{\partial x_3}{\partial x_2} \ , \ \frac{\partial x_3}{\partial x_4}.$$

Solution.
Soient

$$f_1(\mathbf{x}) = x_1^2 - 2x_2x_4 + x_3^2 \ , \ f_2(\mathbf{x}) = x_1^3 - x_2^3 + x_3^3 + x_4^3.$$

On a

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_3)} = 6x_1x_3(x_3 - x_1).$$

Donc

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_3)}(-1, 1, 1, 1) = -12$$

et

$$x_1 = x_1(x_2, x_4) \ , \ x_3 = x_3(x_2, x_4).$$

On aura

$$\begin{array}{ll} 2x_1\dfrac{\partial x_1}{\partial x_2} - 2x_4 + 2x_3\dfrac{\partial x_3}{\partial x_2} = 0 & 3x_1^2\dfrac{\partial x_1}{\partial x_2} - 3x_2^2 + 3x_3^2\dfrac{\partial x_3}{\partial x_2} = 0 \\ 2x_1\dfrac{\partial x_1}{\partial x_4} - 2x_2 + 2x_3\dfrac{\partial x_3}{\partial x_4} = 0 & 3x_1^2\dfrac{\partial x_1}{\partial x_4} + 3x_3^2\dfrac{\partial x_3}{\partial x_4} + 3x_4^2 = 0 \end{array}$$

donc au point $(-1, 1, 1, 1)$,

$$\begin{array}{ll} -\dfrac{\partial x_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial x_3}{\partial x_2} = 1 & \dfrac{\partial x_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial x_3}{\partial x_2} = 1 \\ -\dfrac{\partial x_1}{\partial x_4} + \dfrac{\partial x_3}{\partial x_4} = 1 & \dfrac{\partial x_1}{\partial x_4} + \dfrac{\partial x_3}{\partial x_4} = -1 \end{array}$$

et

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_2} = 0 \ , \ \frac{\partial x_1}{\partial x_4} = -1 \ , \ \frac{\partial x_3}{\partial x_2} = 1 \ , \ \frac{\partial x_3}{\partial x_4} = 0$$

en ce point.

4. On considère le système d'équations

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 10x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + x_4^2 &= 0 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 + x_4^3 &= 0 \end{aligned}$$

au voisinage de l'origine. Vérifier qu'elles déterminent x_1, x_2 et x_4 comme fonctions de x_3 et calculer la dérivée à l'origine de chacune de ces fonction.
Solution.

Si

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}) &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 10x_4 \\ f_2(\mathbf{x}) &= 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + x_4^2 \\ f_3(\mathbf{x}) &= 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 + x_4^3, \end{aligned}$$

on a

$$\frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(x_1, x_2, x_4)} = -9x_4^2 + 12x_4 - 30$$

et

$$\frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(x_1, x_2, x_4)}(\mathbf{0}) \neq 0.$$

Pour calculer les dérivées on obtient le système

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dx_3}(0) + 2\frac{dx_2}{dx_3}(0) + 10\frac{dx_4}{dx_3}(0) &= -3 \\ 4\frac{dx_1}{dx_3}(0) + 5\frac{dx_2}{dx_3}(0) &= -6 \\ 7\frac{dx_1}{dx_3}(0) + 8\frac{dx_2}{dx_3}(0) &= -9 \end{aligned}$$

qui admet pour solution

$$\frac{dx_1}{dx_3}(0) = 1 \ , \ \frac{dx_2}{dx_3}(0) = -2 \ , \ \frac{dx_4}{dx_3}(0) = 0.$$

5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^{(2)}$ telle que $f(\mathbf{x}_0) = 0$ et que

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) \neq 0.$$

Calculer

$$\frac{d^2 x_2}{dx_1^2}$$

le long de la **courbe de niveau** $f(\mathbf{x}) = 0$ au voisinage de $\mathbf{x}_0$.
Solution.
La relation $f(x_1, x_2) = 0$ définit x_2 comme fonction de x_1 et l'on a

$$\frac{d}{dx_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{dx_2}{dx_1}\frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Donc
$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{D^{(1)}f}{D^{(2)}f}$$
et
$$\frac{d^2x_2}{dx_1^2} = -\frac{d}{dx_1}\left(\frac{D^{(1)}f}{D^{(2)}f}\right)$$
soit
$$\frac{d^2x_2}{dx_1^2} = -\frac{(D^{(1)}f)^2\,D^{(0,2)}f - 2D^{(1)}f\,D^{(2)}f\,D^{(1,1)}f + (D^{(2)}f)^2\,D^{(2,0)}f}{(D^{(2)}f)^3}.$$

6. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^{(1)}$ telle que $f(\mathbf{x}_0) = 0$ et que
$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0)\frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0)\frac{\partial f}{\partial x_3}(\mathbf{x}_0) \neq 0.$$
Alors l'équation $f(\mathbf{x}) = 0$ détermine chaque variable x_j comme fonction des deux autres au voisinage du point $\mathbf{x}_0$. Montrer que
$$\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_1} = -\,1.$$
Solution.
On a successivement
$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_3} + \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$$
et
$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_1} = 0.$$
D'où
$$\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_1} = (-1)^3\frac{D^{(2)}f}{D^{(1)}f}\frac{D^{(3)}f}{D^{(2)}f}\frac{D^{(1)}f}{D^{(3)}f} = -1.$$

7. Déduire le théorème des fonctions inverse du théorème des fonctions implicites.
Solution.
Il suffit de considérer les fonctions $\mathbf{F} : \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^n$ définies par
$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (f_1(\mathbf{x}) - y_1, f_2(\mathbf{x}) - y_2, \ldots, f_n(\mathbf{x}) - y_n).$$

La condition
$$\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \neq 0$$
permet de résoudre le système $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ pour les variables x_j en terme des variables y_j, c'est-à-dire d'inverser la fonction $\mathbf{f}$.

10 Optimisation sous contraintes

1. Vérifier que l'espace $T_M(\mathbf{x}_0)$ est indépendant du choix des paramètres au voisinage de $\mathbf{x}_0$.
   Solution.
   Soit $\mathbf{h} : T \to \mathbb{R}^n$ un paramétrage d'une portion de M contenant $\mathbf{x}_0$ et soit $\psi : S \to T$ un difféomorphisme de classe $C^{(1)}$ entre S et T ; alors $\mathbf{h}_1 = \mathbf{h} \circ \psi$ est un autre paramétrage possible et
   $$\sum_{k=1}^{p} \mu_k \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial s_k} = \sum_{k=1}^{p} \mu_k \sum_{l=1}^{p} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t_l} \frac{\partial t_l}{\partial s_k} = \sum_{l=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{p} \mu_k \frac{\partial t_l}{\partial s_k} \right) \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t_l}.$$
2. Déterminer espace tangent et espace normal au cercle défini paramétriquement par
   $$x_1 = r\cos\theta_1 \sin t \ , \ x_2 = r\sin\theta_1 \sin t \ , \ x_3 = r\cos t$$
   (r et θ_1 sont fixés).
   Solution.
   On a
   $$\mathbf{h}'(t) = (r\cos\theta_1 \cos t, r\sin\theta_1 \cos t, -r\sin t)$$
   donc l'espace tangent en $\mathbf{x}_0 = \mathbf{h}(t_0)$ est
   $$\{\mathbf{x}_0 + \lambda\, \mathbf{h}'(t_0) \mid -\infty < \lambda < \infty\}$$
   et l'espace normal est
   $$\{\mathbf{x} \mid \mathbf{h}'(t_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0\}.$$
3. Déterminer espace tangent et espace normal au cercle défini implicitement par
   $$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \ , \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$
   Solution.
   L'espace $N_M(\mathbf{x}_0)$ est engendré par les vecteurs $(1, 1, 1)$ et $\mathbf{x}_0$. L'espace $T_M(\mathbf{x}_0)$ est constitué des multiples de
   $$(1, 1, 1) \times \mathbf{x}_0 = (x_{0,3} - x_{0,2}, x_{0,1} - x_{0,3}, x_{0,2} - x_{0,1}).$$

4. Montrer que le graphe d'une fonction dérivable $f :]a, b[\to \mathbb{R}$,

$$\{(x_1, x_2) \mid x_2 = f(x_1)\ ,\ a < x_1 < b\},$$

est une courbe différentiable sans point de rebroussement dans $\mathbb{R}^2$.
Solution.
Un paramétrage possible est

$$\mathbf{h}(t) = (t, f(t))\ ,\ a < t < b.$$

On a

$$\mathbf{h}'(t) = (1, f'(t)) \neq \mathbf{0}$$

en tout point.

5. Les **coordonnées cylindriques** ρ, ϕ et z sur $\mathbb{R}^3$ sont définies par

$$x_1 = \rho \cos\phi\ ,\ x_2 = \rho \sin\phi\ ,\ x_3 = z$$

$(\rho > 0\ ,\ -\pi < \phi \leq \pi\ ,\ -\infty < z < \infty)$.
– On considère le **cylindre**

$$S = \{\mathbf{x} = (\cos\phi, \sin\phi, z)\}.$$

Calculer les vecteurs tangents

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \phi} \text{ et } \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z}$$

et vérifier que

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z} \neq \mathbf{0}.$$

– Considérons ensuite l'**hélice**

$$C = \{\mathbf{x} = (\cos t, \sin t, h\, t)\}$$

($h > 0$ est le **pas** de l'hélice). Exprimer le vecteur tangent

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}$$

en un point $\mathbf{x}_0$ de la courbe C en terme des vecteurs

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \phi} \text{ et } \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z}$$

au même point.

Solution.

— On a
$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \phi} = (-\sin\phi, \cos\phi, 0)$$
et
$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z} = (0, 0, 1).$$
Ces vecteurs sont indépendants :
$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z} = (\cos\phi, \sin\phi, 0) \neq \mathbf{0}$$
en tout point.

— On a
$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = (-\sin t, \cos t, h).$$
Ainsi
$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \phi} + h\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z}$$
(avec $\phi = t$).

6. Considérons la sphère
$$S = \{\mathbf{x} = (\cos\theta_1 \sin\theta_2,\ \sin\theta_1 \sin\theta_2,\ \cos\theta_2)\}.$$
– Vérifier que
$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta_2} = -\ \sin\theta_2\, \mathbf{x}.$$
– Vérifier que les **méridiens** (les courbes $\theta_1 = c_1$) et **les parallèles** (les courbes $\theta_2 = c_2$) se coupent bien à angle droit.

Solution.

— On a
$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta_2}$$
$$= (-\sin\theta_1 \sin\theta_2, \cos\theta_1 \sin\theta_2, 0)\ \times\ (\cos\theta_1 \cos\theta_2, \sin\theta_1 \cos\theta_2, -\sin\theta_2)$$
$$= -\sin\theta_2\,(\cos\theta_1 \sin\theta_2,\ \sin\theta_1 \sin\theta_2,\ \cos\theta_2) = -\sin\theta_2\,\mathbf{x}.$$

— Les tangentes aux méridiens sont portées par les vecteurs tangents $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta_2}$ et les tangentes aux parallèles par les vecteurs tangents $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta_2}$. On a
$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta_2}$$
$$= (-\sin\theta_1 \sin\theta_2, \cos\theta_1 \sin\theta_2, 0)\ \cdot\ (\cos\theta_1 \cos\theta_2, \sin\theta_1 \cos\theta_2, -\sin\theta_2)$$
$$= -\sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 = 0.$$

7. Soient $m, n, p \in \mathbb{N}$. Déterminer le maximum de l'expression

$$x_1^{2m+1} x_2^{2n+1} x_3^{2p+1}$$

sous la contrainte $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.
Solution.
La fonction de Lagrange est

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = x_1^{2m+1} x_2^{2n+1} x_3^{2p+1} - \lambda\,(x_1 + x_2 + x_3 - 1)$$

et les équations de Lagrange sont

$$(2m+1)\,x_1^{2m} x_2^{2n+1} x_3^{2p+1} - \lambda = 0,$$

$$(2n+1)\,x_1^{2m+1} x_2^{2n} x_3^{2p+1} - \lambda = 0,$$

$$(2p+1)\,x_1^{2m} x_2^{2n+1} x_3^{2p} - \lambda = 0$$

et

$$x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0$$

ce qui conduit à

$$\lambda = (2m + 2n + 2p + 3)\,x_1^{2m+1} x_2^{2n+1} x_3^{2p+1}$$

puis à

$$x_1 = \frac{2m+1}{2m+2n+2p+3}\ ,\ x_2 = \frac{2n+1}{2m+2n+2p+3}\ ,\ x_3 = \frac{2p+1}{2m+2n+2p+3}.$$

Le maximum est donc

$$\frac{(2m+1)^{2m+1}(2n+1)^{2n+1}(2p+1)^{2p+1}}{(2m+2n+2p+3)^{2m+2n+2p+3}}$$

(et le minimum est 0).

8. Déterminer le minimum de l'expression

$$\int_{-1}^{1} (\sin \pi\, t - a - b\, t - c\, t^2)^2 dt$$

sous la contrainte $a + b + c = 0$.
Solution.

La fonction de Lagrange est

$$L(a,b,c,\lambda) = 2\,a^2 + \frac{2}{3}\,b^2 + \frac{2}{5}\,c^2 + \frac{4}{3}\,ac - \frac{4}{\pi}\,b + 1 - \lambda\,(a+b+c)$$

et les équations de Lagrange sont

$$4\,a + \frac{4}{3}\,c - \lambda = 0\ ,\ \frac{4}{3}\,b - \frac{4}{\pi} - \lambda = 0\ ,\ \frac{4}{3}\,a + \frac{4}{5}\,c - \lambda = 0$$

et

$$a + b + c = 0.$$

L'unique solution est

$$a = \frac{1}{14\pi}\ ,\ b = \frac{53}{28\pi}\ ,\ c = -\frac{55}{21\pi}\ ,\ \lambda = -\frac{31}{21\pi}$$

et le minimum cherché est

$$1 - \frac{187}{49\pi^2}$$

(le « maximum » est $+\infty$).

9. Soient $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, $0 < b_1 < b_2 < \cdots < b_n$,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_n \end{pmatrix}.$$

Déterminer

$$\sup\{\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \mid \mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x} = 1\}$$

et

$$\inf\{\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \mid \mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x} = 1\}.$$

Solution.
La fonction de Lagrange est

$$L(\mathbf{x},\lambda) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} - \lambda\,(\mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x} - 1)$$

et les équations de Lagrange sont

$$2\,\mathbf{x}^T\mathbf{A} - 2\,\lambda\,\mathbf{x}^T\mathbf{B} = \mathbf{0}^T$$

et

$$\mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x} - 1 = 0.$$

Donc

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x}$$

et les solutions sont les valeurs propres

$$\lambda_j = \frac{a_j}{b_j}$$

de la matrice $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ et les vecteurs propres $\mathbf{x}_j$ normalisés par

$$\mathbf{x}_j^T\mathbf{B}\mathbf{x}_j = 1.$$

Comme $f(\mathbf{x}_j) = \lambda_j$,

$$\sup\{\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \mid \mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x} = 1\} = \sup\left\{\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_n}{b_n}\right\}$$

et

$$\inf\{\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \mid \mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x} = 1\} = \inf\left\{\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_n}{b_n}\right\}.$$

10. La formule de Héron pour l'aire du triangle de côtés a, b et c est

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

où

$$s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Pour quel triangle cette aire est-elle maximale ?
Solution.
Formons la fonction de Lagrange

$$L(a,b,c,\lambda) = s(s-a)(s-b)(s-c) - \lambda\,(a+b+c-2s).$$

Les équations de Lagrange sont

$$-s(s-b)(s-c) - \lambda = 0,$$

$$-s(s-a)(s-c) - \lambda = 0,$$

$$-s(s-a)(s-b) - \lambda = 0$$

et

$$a+b+c-2s = 0.$$

On a donc

$$3s(s-a)(s-b)(s-c)+\lambda=0$$

puis

$$a=b=c=\frac{2s}{3}.$$

L'aire est maximale pour le triangle équilatéral. (Le minimum est 0).

11. L'entropie d'une distribution de probabilité est

$$-\sum_{j=1}^{n} p_j \log p_j.$$

(C'est une mesure du degré d'aléatoire de la distribution). Pour quelle distribution de probabilité est-elle maximale ?

Solution.

La fonction de Lagrange est

$$L(\mathbf{p},\lambda)=-\sum_{j=1}^{n} p_j \log p_j-\lambda\left(\sum_{j=1}^{n} p_j-1\right)$$

et les équations de Lagrange sont

$$-\log p_j-1-\lambda=0\ ,\ 1\leq j\leq n$$

et

$$\sum_{j=1}^{n} p_j-1=0.$$

On a donc

$$p_j=\frac{1}{n}\ \text{ pour tout } j\ \text{ et } \lambda=\log n-1.$$

Le maximum est $\log n$ (et le minimum, 0).

12. La moyenne arithmétique de n nombres positifs est

$$A=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j$$

et leur moyenne géométrique est

$$G=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}.$$

Montrer que
$$G \leq A$$
en précisant le cas d'égalité.
Solution.
Il suffit de voir que
$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{1}{n} \text{ si } \sum_{j=1}^{n} x_j = 1.$$
Formons la fonction de Lagrange
$$L(\mathbf{x}, \lambda) = x_1 x_2 \cdots x_n - \lambda \left(\sum_{j=1}^{n} x_j - 1 \right).$$
Les équations de Lagrange sont
$$x_2 x_2 \cdots x_n - \lambda = 0,$$
$$x_1 x_3 \cdots x_n - \lambda = 0,$$
$$...$$
$$x_1 x_2 \cdots x_{n-1} - \lambda = 0$$
et
$$\sum_{j=1}^{n} x_j - 1 = 0.$$
Elles admettent pour seule solution
$$x_j = \frac{1}{n} \text{ pour tout } j \text{ et } \lambda = \frac{1}{n^{n-1}}.$$
On a donc
$$x_1 x_2 \cdots x_n \leq \frac{1}{n^n}$$
avec égalité si et seulement si les nombres x_j sont tous égaux. (Le minimum du produit est 0).