Analyse 2

Solutions des exercices

André Giroux
Département de Mathématiques et Statistique
Université de Montréal
Juin 2005

1 Introduction

1. Vérifier que la suite de points de $[-1, 1]$ définie par
$$x_n = \frac{1 + (-1)^n n}{1 + n}$$
ne converge pas. En exhiber une suite partielle convergente.
Solution.
Les termes pairs ($n = 2k$) sont tous égaux à 1, les termes impairs ($n = 2k + 1$) sont égaux à $-k/(k + 1)$ et tendent vers -1.
2. Montrer qu'une fonction continue sur un intervalle fermé peut toujours être prolongée à une fonction continue sur $\mathbb{R}$ tout entier. Cela reste-t-il vrai pour un intervalle quelconque ?
Solution.
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Il suffit de poser $f(x) = f(a)$ si $x < a$ et $f(x) = f(b)$ si $x > b$ pour obtenir une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Cela n'est possible que parce que l'on ne sait que $\lim_{x\to a+} f(x) = f(a)$ et que $\lim_{x\to b-} f(x) = f(b)$. La fonction $f(x) = 1/x(1-x)$ est continue sur l'intervalle $]0, 1[$ mais ne peut être prolongée ni à gauche ni à droite.
3. Donner un exemple d'une fonction continue sur un intervalle fermé qui n'y est pas bornée ou qui n'y atteint pas ses bornes. Même question pour un intervalle borné.
Solution.
La fonction $f_1(x) = x$ est continue et non bornée sur l'intervalle fermé $[0, +\infty[$, la fonction $f_2(x) = x/(x + 1)$ est bornée par 1 sur le même intervalle mais n'atteint jamais cette borne (qui est évidemment sa plus petite borne supérieure). La fonction $f_3(x) = 1/x$ n'est pas bornée sur l'intervalle borné $]0, 1]$, la fonction $f_4(x) = 1/(1 + x)$ est bornée sur le même intervalle mais n'y atteint pas sa plus petite borne supérieure (qui est 1).
4. Montrer qu'une fonction dérivable sur un intervalle fermé peut toujours être prolongée à une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier.
Solution.
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Il suffit de poser $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ si $x < a$ et $f(x) = f(b) + f'(b)(x - b)$ si $x > b$ pour obtenir une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Cela n'est possible que parce que l'on sait que $\lim_{x\to a+}(f(x) - f(a))/(x - a) = f'(a)$ et aussi que $\lim_{x\to b-}(f(x) - f(b))/(x - b) = f'(b)$.

5. Les fonctions suivantes sont-elles dérivables en tous les points de leur domaine de définition :

$$x^{1/2} \ , \ x^{1/3} \ , \ x^{3/2} \ , \ x^{4/3} \ ?$$

Solution.
La fonction $x^{1/2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ mais n'est dérivable que sur $]0,+\infty[$:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^{1/2}-0}{x-0}$$

n'existe pas. De même, la fonction $x^{1/3}$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable à l'origine. La fonction $x^{3/2}$ est dérivable en tous les points de son domaine de définition, qui est l'intervalle $[0,+\infty[$:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^{3/2}-0}{x-0} = 0.$$

De façon semblable, la fonction $x^{4/3}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

6. Soient $0 < a < b$. Déterminer le point c du théorème des accroissements finis pour la fonction $f(x) = x^2$. Même question pour la fonction $f(x) = x^3$.
Solution.
Si $f(x) = x^2$, alors $f'(x) = 2x$. Puisque

$$b^2 - a^2 = (b+a)(b-a) = f'(c)(b-a),$$

on a

$$c = \frac{b+a}{2}.$$

Si $f(x) = x^3$, alors $f'(x) = 3x^2$. Puisque

$$b^3 - a^3 = (b^2 + ba + a^2)(b-a),$$

on a

$$c = \sqrt{\frac{b^2 + ba + a^2}{3}}.$$

On a bien $a < c < b$; par exemple, $b > a$, $b^2 > a^2$, $b^2 > ba$ donc $3b^2 > b^2 + ba + a^2$ et $c < b$.

2 Intégration des fonctions continues

1. Montrer qu'une fonction $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ admettant une dérivée bornée est uniformément continue.

   Solution.

   En vertu du théorème des accroissements finis, on a

   $$|f(x) - f(y)| = |f'(z)(x-y)| \leq M|x-y|$$

   où M est une borne supérieure pour $|f'|$.

2. En déduire qu'une fonction rationnelle $R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

   Solution.

   Si $R(x) = P(x)/Q(x)$ est une telle fonction, son dénominateur Q ne s'annule jamais et le degré de Q est au moins aussi élevé que celui de P. Par suite, la dérivée

   $$R'(x) = \frac{P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x)}{Q^2(x)}$$

   est bornée sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer qu'une fonction $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ qui est uniformément continue sur $(a,c]$ et sur $[c,b)$ l'est aussi sur (a,b).

   Solution.

   Donné $\epsilon > 0$, soient $\delta_1 > 0$ et $\delta_2 > 0$ les nombres correspondant dans la définition de la continuité uniforme à $\epsilon/2$ sur les intervalles $(a,c]$ et $[c,b)$ respectivement. Posons $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Soient $x, y \in (a,b)$ deux nombres tels que $|x-y| < \delta$. Si $x, y \in (a,c]$ ou si $x, y \in [c,b)$, on a $|f(x) - f(y)| < \epsilon/2$ alors que si, par exemple, $x \in (a,c]$ et $y \in [c,b)$, on a

   $$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(c)| + |f(c) - f(y)| < \epsilon.$$

4. En déduire que la fonction $f(x) = \sqrt[3]{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

   Solution.

   La fonction est uniformément continue sur l'intervalle compact $[-1,1]$ et elle est aussi uniformément continue sur chacun des intervalles $[1, +\infty[$ et $]-\infty, -1]$ parce qu'elle y admet une dérivée bornée.

5. La fonction $f(x) = 1/x$ est-elle uniformément continue sur l'intervalle $]0,1]$? sur l'intervalle $[1,+\infty[$?

   Solution.

   La fonction n'est pas uniformément continue sur l'intervalle $]0,1]$. Il suffit de considérer les points $x_n = 1/n$ et $y_n = 2/n$ pour le voir. On a

$$|x_n - y_n| = \frac{1}{n} \quad \text{mais} \quad |f(x_n) - f(y_n)| = \frac{n}{2}.$$

   Elle est uniformément continue sur l'intervalle $[1,+\infty[$ parce qu'elle y admet une dérivée bornée.

6. Les sommes supérieures et les sommes inférieures de Riemann peuvent être calculées pour toute fonction bornée $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mais il n'est plus certain que la fonction soit intégrable. Considérer avec Dirichlet la fonction indicatrice des nombres rationnels :

$$f(x) = \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

   Montrer qu'elle n'est intégrable sur aucun intervalle.

   Solution.

   Sur tout intervalle I non réduit à un point, on a

$$\sup\{f(x) \mid x \in I\} = 1 \ , \ \inf\{f(x) \mid x \in I\} = 0$$

   de telle sorte que pour toute partition $\mathcal{P}$ de l'intervalle $[a,b]$,

$$S(\mathcal{P}, f) = b - a \ , \ s(\mathcal{P}, f) = 0.$$

7. Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz : si $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sont continues, alors

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}\sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}.$$

   (Suggestion : choisir le nombre λ de façon optimale dans l'inégalité :

$$0 \leq \int_a^b (f(x) + \lambda g(x))^2\,dx.)$$

   Solution.

On a

$$0 \leq \int_a^b (f(x)+\lambda g(x))^2\,dx = \int_a^b f^2(x)\,dx + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)\,dx + \lambda^2 \int_a^b g^2(x)\,dx.$$

Pour minimiser le membre de droite, choisissons

$$\lambda = -\frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g^2(x)\,dx}.$$

On obtient alors, après simplification,

$$0 \leq \int_a^b f^2(x)\,dx - \frac{\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2}{\int_a^b g^2(x)\,dx}$$

ce qui est équivalent à l'inégalité de Cauchy-Schwarz. (Si

$$\int_a^b g^2(x)\,dx = 0,$$

la fonction g est identiquement nulle (exercice 10) et l'inégalité devient une égalité trivialement vraie.)

8. En déduire l'inégalité de Minkowski :

$$\sqrt{\int_a^b (f(x)+g(x))^2\,dx} \leq \sqrt{\int_a^b f(x)^2\,dx} + \sqrt{\int_a^b g(x)^2\,dx}.$$

Solution.
On a

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(x)+g(x))^2\,dx &= \int_a^b f^2(x)\,dx + 2\int_a^b f(x)g(x)\,dx + \int_a^b g^2(x)\,dx \\ &\leq \int_a^b f^2(x)\,dx + 2\sqrt{\int_a^b f(x)^2\,dx}\sqrt{\int_a^b g(x)^2\,dx} + \int_a^b g^2(x)\,dx \\ &= \left(\sqrt{\int_a^b f(x)^2\,dx} + \sqrt{\int_a^b g(x)^2\,dx}\right)^2.\end{aligned}$$

9. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

(Premier théorème de la moyenne).
Solution.
Soient

$$M = \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}\ , m = \inf\{f(x) \mid x \in [a,b]\}.$$

Alors, en vertu de la positivité de l'intégrale,

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M.$$

À cause de la propriété des valeurs intermédiaires, il existe un nombre $c \in [a,b]$ tel que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c).$$

10. Soit $f : [a,b] \to [0,+\infty[$ une fonction continue et positive telle que

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0.$$

Montrer qu'elle est identiquement nulle.
Solution.
Si la fonction est strictement positive en un point x_0, elle sera, par continuité, strictement positive dans un intervalle $[c,d] \subseteq [a,b]$ contenant ce point x_0. On pourra trouver un nombre $m > 0$ tel que $f(x) \geq m$ pour tout $x \in [c,d]$ et alors

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_c^d f(x)\,dx \geq m(d-c) > 0.$$

11. Vérifier les relations suivantes :

$$\sup_{a\in A,\, b\in B}(a+b) \leq \sup_{a\in A} a\ + \sup_{b\in B} b,$$

$$\inf_{a\in A,\, b\in B}(a+b) \geq \inf_{a\in A} a\ + \inf_{b\in B} b.$$

Solution.
Quelques soient $a \in A$ et $b \in B$, on a

$$a+b \leq \sup_{a\in A} a\ + \sup_{b\in B} b$$

donc

$$\sup_{a\in A,\, b\in B}(a+b) \leq \sup_{a\in A} a \; + \sup_{b\in B} b.$$

De même,

$$a+b \geq \inf_{a\in A} a \; + \inf_{b\in B} b$$

et

$$\inf_{a\in A,\, b\in B}(a+b) \geq \inf_{a\in A} a \; + \inf_{b\in B} b.$$

12. Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $\{a_n\}_{n\geq 1}$ une suite de nombres convergeant vers a, $a_n > a$. Montrer que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_{a_n}^b f(x)\,dx.$$

Solution.
Soit $M > 0$ une borne supérieure pour $|f(x)|$ lorsque $x \in [a,b]$. Alors, en vertu des propriétés de l'intégrale,

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_{a_n}^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^{a_n} |f(x)|\,dx \leq M(a_n - a).$$

3 Théorème fondamental du calcul

1. Déduire le théorème fondamental du calcul du premier théorème de la moyenne.
Solution.
On a, dès que x et $x+h$ sont dans l'intervalle $[a,b]$ et pour un nombre $\theta = \theta(x,h) \in [0,1]$ approprié, que

$$\frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(x+\theta h) \to f(x)$$

lorsque $h \to 0$.

2. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions dérivables telles que $a(x) < b(x)$. Calculer

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt.$$

Solution.

En utilisant la règle de dérivation en chaîne du calcul différentiel et le théorème fondamental du calcul, on a (c désigne un nombre fixé),

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt &= \frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{c} f(t)\,dt + \frac{d}{dx}\int_{c}^{b(x)} f(t)\,dt \\ &= f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x).\end{aligned}$$

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Calculer

$$\frac{d}{dx}\int_0^1 f(x+t)\,dt.$$

Solution.
Un changement de variable simple montre que

$$\frac{d}{dx}\int_0^1 f(x+t)\,dt = \frac{d}{dx}\int_x^{x+1} f(s)\,ds = f(x+1) - f(x).$$

4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique de période $2p$ ($f(t+2p) = f(t)$ pour tout t). Montrer que, quel que soit le nombre x,

$$\int_x^{x+2p} f(t)\,dt = \int_0^{2p} f(t)\,dt.$$

Solution.
On a

$$\frac{d}{dx}\int_x^{x+2p} f(t)\,dt = f(x+2p) - f(x) = 0$$

de telle sorte que

$$\int_x^{x+2p} f(t)\,dt = \int_0^{2p} f(t)\,dt.$$

5. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Posons

$$\phi(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt.$$

Montrer que ϕ est croissante si f l'est.
Solution.
En vertu du théorème fondamental,

$$\frac{d}{dx}\phi(x) = \frac{1}{x}\left(f(x) - \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right) \geq 0.$$

6. Soit $p > 0$. Calculer
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^p}{n^{p+1}}.$$
Solution.
Il s'agit de sommes de Darboux associées à la fonction x^p sur l'intervalle $[0,1]$. D'où :
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^p}{n^{p+1}} = \int_0^1 x^p\,dx = \frac{1}{p+1}.$$
7. Déduire la règle de dérivation d'un quotient de la règle de dérivation d'un produit.
Solution.
En supposant que toutes fonctions impliquées sont dérivables, on a, en posant $h = f/g$,
$$f' = h'g + hg' = h'g + \frac{f}{g}\;g'$$
donc
$$g^2h' = f'g - fg'.$$
8. Soit $p > 2$. Calculer
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{kn^{p-2}}{(k+n)^p}.$$
Solution.
On a
$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{kn^{p-2}}{(k+n)^p} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k/n}{(k/n+1)^p} \\ &= \int_0^1 \frac{x}{(x+1)^p}\,dx = \frac{1-p\;2^{-p+1}}{(-p+1)(-p+2)}\end{aligned}$$
en intégrant par parties.
9. Soit $f : [-A,A] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que si f est impaire (c'est-à-dire $f(-x) = -f(x)$ pour tout x),
$$\int_{-A}^{A} f(x)\,dx = 0$$

et que si f est paire (c'est-à-dire $f(-x) = f(x)$ pour tout x),

$$\int_{-A}^{A} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{A} f(x)\,dx.$$

Solution.
Par changements de variables,

$$\int_{-A}^{A} f(x)\,dx = \int_{0}^{A} f(x)\,dx + \int_{-A}^{0} f(x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{A} f(x)\,dx + \int_{0}^{A} f(-t)\,dt = \int_{0}^{A} f(x)\,dx - \int_{0}^{A} f(t)\,dt = 0$$

dans le cas d'une fonction impaire et

$$\int_{-A}^{A} f(x)\,dx = \int_{0}^{A} f(x)\,dx + \int_{-A}^{0} f(x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{A} f(x)\,dx + \int_{0}^{A} f(-t)\,dt = \int_{0}^{A} f(x)\,dx + \int_{0}^{A} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{A} f(x)\,dx$$

dans le cas d'une fonction paire.

10. Soit $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable. Montrer que

$$af(a) = \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} xf'(x)\,dx.$$

Donner une interprétation géométrique de cette relation dans le cas où $f'(x) > 0$ et $f(0) = 0$.
Solution.
En intégrant par parties,

$$\int_{0}^{a} xf'(x)\,dx = xf(x)\Big|_{0}^{a} - \int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Si $f'(x) > 0$, la fonction f est strictement croissante. L'aire $af(a)$ du rectangle $[0, a] \times [0, f(a)]$ est la somme de l'aire

$$\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

au-dessous du graphe de f et de l'aire

$$\int_{0}^{f(a)} f^{-1}(y)\,dy = \int_{0}^{a} xf'(x)\,dx$$

au-dessus (figure (1)).

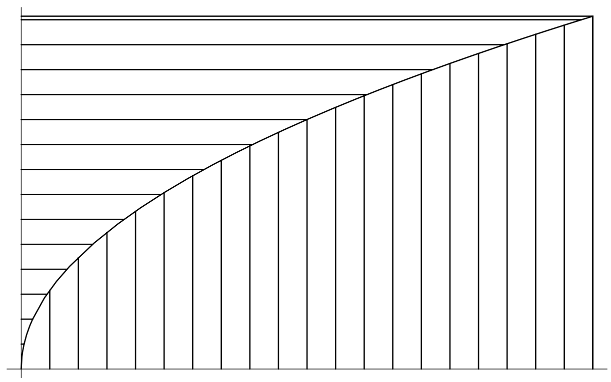

FIG. 1 – L'aire d'un rectangle

11. Soient $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable, positive et décroissante et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b F(x)g(x)\, dx = F(a) \int_a^c g(x)\, dx.$$

(Deuxième théorème de la moyenne). (Suggestion : introduire la fonction

$$G(x) = \int_a^x g(t)\, dt$$

et intégrer par parties.)

Solution.

Soit

$$I = \int_a^b F(x)g(x)\, dx.$$

Suivant la suggestion, on a

$$I = F(b)G(b) - \int_a^b F'(x)G(x)\, dx$$

et il s'agit de voir qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$I = F(a)G(c)$$

c'est-à-dire, en vertu de la propriété des valeurs intermédiaires, que l'on a

$$F(a) \inf_x G(x) \leq I \leq F(a) \sup_x G(x).$$

Utilisant les hypothèses faites sur F, on trouve

$$\begin{aligned} I &\leq F(b)G(b) - \int_a^b F'(x)\,dx\ \sup_x G(x) \\ &= F(b)G(b) - (F(b) - F(a))\sup_x G(x) \\ &= F(b)\left(G(b) - \sup_x G(x)\right) + F(a)\ \sup_x G(x) \leq F(a)\ \sup_x G(x). \end{aligned}$$

L'inégalité opposée s'obtient de façon semblable.

12. Soit $p > 0$. Montrer qu'il existe un nombre $c \in [0, 1]$ tel que

$$\int_0^1 \frac{x^p}{x^{2p}+1}\,dx = \frac{c^{p+1}}{p+1}.$$

Solution.
Illustration du deuxième théorème de la moyenne avec

$$F(x) = \frac{1}{x^{2p}+1}.$$

On trouve

$$\int_0^1 \frac{x^p}{x^{2p}+1}\,dx = \int_0^c x^p\,dx = \frac{c^{p+1}}{p+1}.$$

4 Logarithme et exponentielle

1. Soit

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n.$$

Montrer que la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $1 - \log 2$ — sa limite est la constante d'Euler-Mascheroni, dénotée γ.
Solution.
On a

$$x_n - x_{n+1} = -\frac{1}{n+1} + \log(n+1) - \log n = -\frac{1}{n+1} + \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} > 0.$$

De plus,

$$\begin{aligned} x_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \log n &\geq 1 + \int_2^{n+1} \frac{dt}{t} - \log n \\ &= 1 - \log 2 + \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 1 - \log 2. \end{aligned}$$

2. Déterminer toutes les fonctions $]0, +\infty, [\to]0, +\infty[$ dérivables qui satisfont l'équation fonctionnelle

$$f(xy) = f(x)f(y).$$

Solution.
Posant $g(x) = \log f(x)$, on a $g(xy) = g(x) + g(y)$. Donc $g(x) = a \log x$ pour une constante a appropriée et $f(x) = x^a$.

3. Tracer le graphe de la fonction

$$f(x) = \frac{\log x}{x}.$$

Solution.
On a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log x}{x} = -\infty$$

et

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\log x}{x} = 0.$$

De plus,

$$f'(x) = \frac{1 - \log x}{x^2} \begin{cases} > 0 & \text{si } 0 < x < e, \\ < 0 & \text{si } e < x \end{cases}$$

et

$$f''(x) = \frac{-3 + 2\log x}{x^3} \begin{cases} < 0 & \text{si } 0 < x < e^{3/2}, \\ > 0 & \text{si } e^{3/2} < x. \end{cases}$$

Ces calculs permettent de tracer le graphe de la fonction : elle croît de $-\infty$ jusqu'à $1/e$ lorsque son argument croît de 0 à e puis décroît asymptotiquement jusqu'à 0 ; elle est concave jusqu'à $e^{3/2}$ et convexe ensuite.

4. Calculer les limites suivantes :

a)

$$\lim_{x\to 0} x^a \log x$$

b)

$$\lim_{x\to 0} x^x$$

c)

$$\lim_{x\to 0} x^{1/x}$$

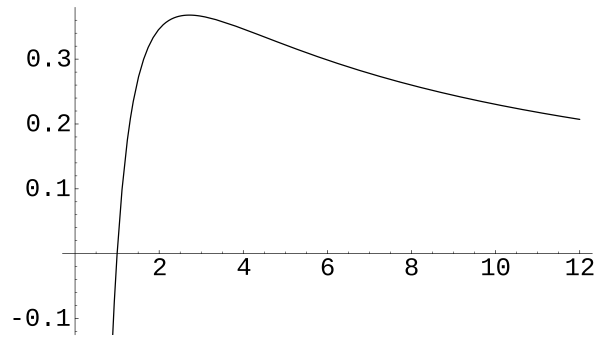

FIG. 2 – La fonction $\log x/x$

d)

$$\lim_{x\to+\infty} x^{1/x}.$$

Solution.

a) Si $a>0$,

$$\lim_{x\to 0} x^a \log x = \lim_{y\to+\infty} \frac{-\log y}{y^a} = 0$$

alors que si $a \leq 0$

$$\lim_{x\to 0} x^a \log x = \lim_{y\to+\infty} y^{-a}(-\log y) = -\infty.$$

b)

$$\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} e^{x\log x} = 1$$

c)

$$\lim_{x\to 0} x^{1/x} = \lim_{x\to 0} e^{\log x/x} = 0$$

d)

$$\lim_{x\to+\infty} x^{1/x} = \lim_{x\to+\infty} e^{\log x/x} = 1.$$

5. Soient $0<a<b$. Lequel des deux nombres suivants est le plus grand : a^b ou b^a ?

   Solution.

   L'inégalité $a^b < b^a$ est équivalente à l'inégalité $\log a/a < \log b/b$. Donc, si $b<e$, elle est vraie et si $e<a$, elle est fausse. Pour $a<e<b$, on ne peut pas conclure.

6. Calculer
$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$
Solution.
On a
$$\begin{aligned}\log\left(\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)&=\lim_{n\to+\infty}\left(\log\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)\\&=\lim_{n\to+\infty}n\,\log\left(1+\frac{x}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}x\,\frac{\log\left(1+\frac{x}{n}\right)-\log 1}{x/n}\\&=x\,\frac{d}{dx}\log x\Big|_{x=1}=x\end{aligned}$$
de telle sorte que
$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x.$$
7. Soit $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable et telle que $f''(x)\geq 0$. Montrer qu'elle satisfait **l'inégalité de convexité** suivante :
$$x_1<x_3<x_2\ \Rightarrow\ f(x_3)\leq\frac{x_2-x_3}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}f(x_2)$$
qui exprime que son graphe est situé sous n'importe laquelle de ses sécantes. (Suggestion : utiliser le théorème des accroissements finis.)
Solution.
L'inégalité à établir est équivalente à l'inégalité
$$\frac{x_2-x_3}{x_2-x_1}f(x_3)+\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}f(x_3)\leq\frac{x_2-x_3}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}f(x_2)$$
donc à
$$\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}\leq\frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}.$$
En vertu du théorème des accroissements finis, le membre de gauche est égal à $f'(y_1)$ et celui de droite à $f'(y_2)$ où $y_1<x_3<y_2$. La fonction f' étant croissante, l'inégalité est démontrée (elle sera stricte si la fonction f' est strictement croissante — fonction strictement convexe).
8. Vérifier que l'inégalité précédente peut s'écrire
$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\leq\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)$$
avec
$$\lambda_1>0,\lambda_2>0\ \text{ et }\lambda_1+\lambda_2=1$$

(une combinaison convexe de deux nombres). La généraliser à une combinaison convexe de n nombres

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

par récurrence sur n (**inégalité de Jensen**).
Solution.
En effet, on a qu'à poser

$$\lambda_1 = \frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_1} \ , \ \lambda_2 = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}.$$

De plus, par récurrence sur n,

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) &= f\left((1-\lambda_n)\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_n} x_k + \lambda_n x_n\right) \\ &\leq (1-\lambda_n) f\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_n} x_k\right) + \lambda_n f(x_n) \\ &\leq (1-\lambda_n)\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_n} f(x_k) + \lambda_n f(x_n) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k). \end{aligned}$$

9. Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable et telle que $f''(x) \geq 0$. Montrer que quel que soit $x_0 \in]a, b[$, le graphe de f est situé au dessus de sa tangente en x_0 :

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

(Suggestion : utiliser le théorème fondamental du calcul.)
Solution.
Si $x > x_0$,

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\, dt \geq f'(x_0)(x - x_0)$$

alors que si $x < x_0$,

$$f(x_0) - f(x) = \int_{x}^{x_0} f'(t)\, dt \leq f'(x_0)(x_0 - x).$$

10. Démontrer l'inégalité entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique de n nombres positifs $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

Solution.

Cette inégalité est équivalente à l'inégalité

$$\frac{1}{n}(\log x_1 + \log x_2 + \cdots + \log x_n) \leq \log \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

qui s'obtient en appliquant l'inégalité de Jensen au logarithme.

11. Démontrer l'inégalité entre la moyenne géométrique et la moyenne harmonique de n nombres strictement positifs $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\frac{n}{1/x_1 + 1/x_2 + \cdots + 1/x_n} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.$$

Solution.

Appliquer l'inégalité précédente aux nombres

$$\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}.$$

12. Montrer que

$$\log x \leq x - 1.$$

Solution.

Le logarithme est une fonction strictement concave puisque

$$\frac{d^2}{dx^2} \log x = -\frac{1}{x^2} < 0.$$

Par suite, son graphe est entièrement situé au-dessous de sa tangente au point (1,0), ce que traduit l'inégalité à démontrer.

13. Montrer que

$$e^x \geq x + 1.$$

En déduire directement (c'est-à-dire sans utiliser la règle de l'Hospital) que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0.$$

(Suggestion :
$$\frac{x}{e^x} = 2\,\frac{x/2}{e^{x/2}}\,\frac{1}{e^{x/2}};$$
raisonner par récurrence sur n.)
Solution.
L'inégalité à démontrer exprime que le graphe de l'exponentielle est situé au dessus de sa tangente au point (0,1) et résulte de la convexité de la fonction. En vertu des relations
$$0 < \frac{u}{e^u} \leq 1 \quad \text{et} \quad \lim_{u\to\infty} \frac{1}{e^u} = 0,$$
on a
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} 2\,\frac{x/2}{e^{x/2}}\,\frac{1}{e^{x/2}} = 0$$
puis, par récurrence sur n,
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} 2^n\,\frac{(x/2)^{n-1}}{e^{x/2}}\,\frac{x/2}{e^{x/2}} = 0.$$

14. Déterminer toutes les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui satisfont l'équation différentielle
$$f'(x) = -xf(x).$$
Solution.
Soit
$$g(x) = e^{x^2/2} f(x).$$
Alors
$$g'(x) = e^{x^2/2}\,(xf(x) + f'(x)) = 0$$
et
$$f(x) = ce^{-x^2/2}$$
pour une constante c appropriée.

15. Déterminer la solution de l'équation logistique :
$$f'(x) = af(x)(b - f(x))\ ,\ x > 0$$
où $a > 0$ et $b > 0$ si $0 < f(0) < b$.
Solution.
En vertu de la relation
$$\frac{1}{f(x)(b - f(x))} = \frac{1}{b}\left(\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{b - f(x)}\right),$$

on a

$$\int_0^x \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt + \int_0^x \frac{f'(t)}{b-f(t}\,dt = ab\int_0^x dt$$

donc

$$\log \frac{f(x)}{b-f(x)}\frac{b-f(0)}{f(0)} = abx$$

et

$$f(x) = \frac{bf(0)}{f(0)+(b-f(0))e^{-abx}}.$$

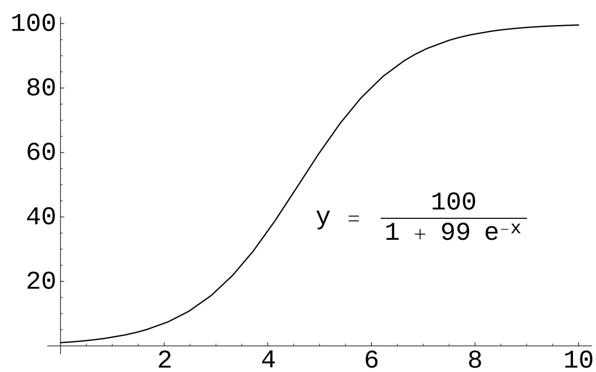

FIG. 3 – Une courbe logistique

16. Montrer que

$$\log_b y = \frac{\log y}{\log b}.$$

Solution.
Puisque, $(x = \log_b y\ ,\ \ y = b^x)$,

$$\frac{d}{dy}\log_b y = \frac{1}{\dfrac{d}{dx}b^x} = \frac{1}{b^x \log b} = \frac{1}{y\log b},$$

on a

$$\log_b y = \log_b 1 + \frac{1}{\log b}\int_1^y \frac{dt}{t} = \frac{\log y}{\log b}.$$

17. La fonction tangente hyperbolique est définie par

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

Vérifier qu'elle satisfait l'équation différentielle

$$f'(x) = 1 - f^2(x).$$

Exprimer $\tanh(x+y)$ en terme de $\tanh x$ et de $\tanh y$. Tracer le graphe.
Solution.
On a

$$\tanh' x = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$$

et

$$\tanh(x+y) = \frac{\sinh x \cosh y + \sinh y \cosh x}{\cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y} = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}.$$

La fonction $\tanh x$ est croissante, impaire et, comme

$$\tanh'' x = -2 \tanh x (1 - \tanh^2 x),$$

elle est concave si $x > 0$, convexe si $x < 0$.

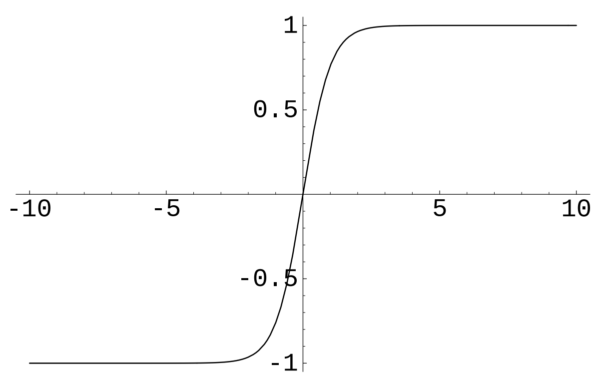

FIG. 4 – La tangente hyperbolique

18. Vérifier que la tangente hyperbolique admet une fonction inverse, l'arc-tangente hyperbolique, $\text{arctanh} :]-1, 1[\to \mathbb{R}$. Montrer que

$$\text{arctanh}\, y = \frac{1}{2} \log \frac{1+y}{1-y}.$$

Calculer la dérivée de cette fonction et tracer son graphe.
Solution.

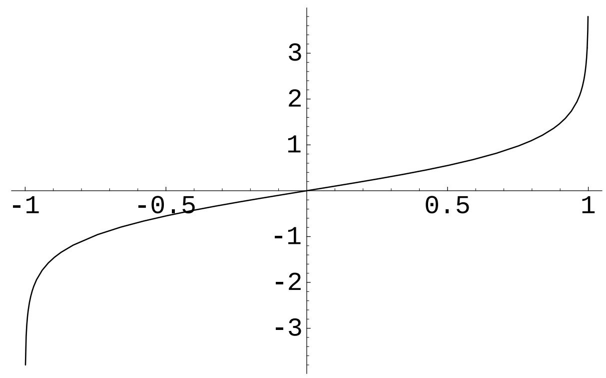

FIG. 5 – L'arctangente hyperbolique

Comme $-1 < \tanh x < 1$, $\tanh' x > 0$ et la tangente hyperbolique est strictement croissante, de -1 à 1 lorsque x croît de $-\infty$ à $+\infty$. La solution de

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

est

$$x = \frac{1}{2} \log \frac{1+y}{1-y}.$$

Comme

$$\mathrm{arctanh}' y = \frac{1}{1-y^2},$$

le graphe a l'allure de la figure (5).

5 Fonctions trigonométriques

1. Montrer que
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$
Solution.
On a tout simplement
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \cos 0 = 1.$$
2. Vérifier que la fonction sinus est concave sur l'intervalle $[0, \pi/2]$. En déduire que :
$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; \frac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq x.$$

Solution.

On a $\sin'' x = -\sin x \leq 0$ sur l'intervalle $[0, \pi/2]$. L'équation de la tangente à la courbe $y = \sin x$ à l'origine est $y = x$ et celle de la sécante passant par les points $(0,0)$ et $(\pi/2, 1)$ est $y = 2x/\pi$.

3. Est-il vrai qu'une fonction dérivable est périodique si et seulement si sa dérivée l'est ?

   Solution.

   Non. Supposons que $f(x+2p) = f(x)$. Alors $f'(x+2p) = f'(x)$ et la dérivée d'une fonction périodique est elle aussi périodique de même période. Si, réciproquement, on a $f'(x+2p) = f'(x)$, on aura

$$f(x+2p) - f(x) = \int_x^{x+2p} f'(t)\,dt = \int_0^{2p} f'(t)\,dt$$

   et la fonction n'est périodique que si

$$\int_0^{2p} f'(t)\,dt = 0.$$

4. Vérifier que la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } \ x = 0 \end{cases}$$

   est discontinue mais possède quand même la propriété des valeurs intermédiaires.

   Solution.

   La fonction est discontinue à l'origine puisque

$$\lim_{n \to +\infty} f\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = 0$$

   alors que

$$\lim_{n \to +\infty} f\left(\frac{1}{(2n+1/2)\pi}\right) = 1.$$

   L'image de tout intervalle $(-\delta, \delta)$ d'autre part est l'intervalle $[-1, 1]$ tout entier.

5. Obtenir la solution générale l'équation différentielle suivante :

$$f''(x) + \omega^2 f(x) = e^x.$$

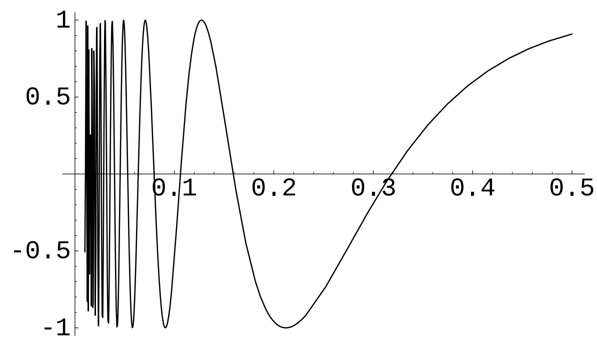

FIG. 6 – La fonction $\sin 1/x$

Solution.
Si f_1 et f_2 sont des solutions de l'équation différentielle, la fonction $f = f_1 - f_2$ est une solution de l'équation différentielle homogène

$$f''(x) + \omega^2 f(x) = 0$$

associée. Cette solution est donc nécessairement

$$f(x) = a \cos \omega x + b \sin \omega x.$$

Pour obtenir une solution particulière f de l'équation originale, on pose (la fonction exponentielle étant sa propre dérivée)

$$f(x) = ce^x$$

et on trouve que

$$c = \frac{1}{1+\omega^2}.$$

D'où la solution générale cherchée

$$f(x) = a \cos \omega x + b \sin \omega x + \frac{1}{1+\omega^2} e^x.$$

6. Montrer que la solution générale de l'équation différentielle

$$f''(x) - f(x) = 0$$

est

$$f(x) = a \cosh x + b \sinh x.$$

Solution.
Toute fonction de la forme $a\cosh x + b\sinh x$ est une solution de l'équation différentielle. Réciproquement, si f est une solution de l'équation,

$$g(x) = f(x) - f(0)\cosh x - f'(0)\sinh x$$

en sera une pour laquelle $g(0) = g'(0) = 0$. Posons

$$h(x) = g(x) + g'(x).$$

Alors

$$h'(x) = g'(x) + g''(x) = g'(x) + g(x) = h(x).$$

Donc

$$h(x) = ae^x.$$

Comme $h(0) = 0$, il faut que $a = 0$. Donc

$$g'(x) = -g(x)$$

et

$$g(x) = be^{-x}.$$

Comme $g(0) = 0$, il faut que $b = 0$.

7. Exprimer $\sin 3x$ en terme de $\sin x$. En déduire la valeur de $\sin \pi/3$. Calculer $\sin \pi/5$ par la même méthode.
Solution.
En utilisant les formules d'addition et la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$,

$$\begin{aligned}\sin 3x &= \sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x\\ &= 2\sin x\cos^2 x + \sin x\cos^2 x - \sin^3 x\\ &= 3\sin x\cos^2 x - \sin^3 x = 3\sin x - 4\sin^3 x.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\sin\pi = 0 = 3\sin\frac{\pi}{3} - 4\sin^3\frac{\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{3}\left(3 - 4\sin^2\frac{\pi}{3}\right)$$

de telle sorte que

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

De même,

$$\begin{aligned}\sin 5x &= \sin^5 x - 10\sin^3 x\cos^2 x + 5\sin x\cos^4 x\\ &= 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x\end{aligned}$$

et

$$0 = 16\sin^4\frac{\pi}{5} - 20\sin^2\frac{\pi}{5} + 5$$

entraîne

$$\sin\frac{\pi}{5} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$

8. Montrer que, quels que soient les coefficients $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$, l'équation

$$a_1\cos x + b_1\sin x + \cdots + a_n\cos nx + b_n\sin nx = 0$$

possède toujours au moins une racine dans l'intervalle $]-\pi,\pi]$.
Solution.
Soit

$$f(x) = a_1\cos x + b_1\sin x + \cdots + a_n\cos nx + b_n\sin nx.$$

On a

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx = 0.$$

Si f n'est pas identiquement nulle, elle doit donc prendre des valeurs strictement positives et des valeurs strictement négatives. En vertu de la propriété des valeurs intermédiaires, elle doit aussi s'annuler.

9. Montrer que si

$$T(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx),$$

on a

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} T(x)\cos kx\,dx\ ,\ (k = 0, 1, \ldots, n)$$

et

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} T(x)\sin kx\,dx\ ,\ (k = 1, 2, \ldots, n)$$

(formules de Fourier pour les coefficients d'un polynôme trigonométrique).
Solution.
En vertu des propriétés d'orthogonalité des fonctions trigonométriques,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} T(x)\,dx = a_0$$

et, quelque soit $j \in \{1, 2, \dots, n\}$,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} T(x)\cos jx\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} a_0 \cos jx\,dx$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos kx\cos jx\,dx + b_k\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\sin kx\cos jx\,dx\right) = a_j.$$

La formule pour b_k s'obtient de façon semblable — c'est pour obtenir la même formule pour a_0 que pour les autres coefficients a_k que l'on écrit habituellement le terme constant sous la forme $\frac{1}{2}a_0$.

10. Soient $-\pi < x_1 < x_2 < x_3 \leq \pi$ et y_1, y_2, y_3 des nombres quelconques. Déterminer un polynôme trigonométrique de degré un,

$$T(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x,$$

tel que

$$T(x_i) = y_i\ ,\ (i = 1, 2, 3).$$

Solution.
En vertu de l'identité

$$2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B),$$

$$T_{a,b}(x) = \sin\frac{x-a}{2}\sin\frac{x-b}{2}$$

est un polynôme trigonométrique de degré un. Donc

$$T(x) = y_1\frac{T_{x_2,x_3}(x)}{T_{x_2,x_3}(x_1)} + y_2\frac{T_{x_3,x_1}(x)}{T_{x_3,x_1}(x_2)} + y_3\frac{T_{x_1,x_2}(x)}{T_{x_1,x_2}(x_3)}$$

remplit toutes les conditions.
Remarque. Dans un cours d'analyse complexe, on montre qu'un polynôme trigonométrique de degré n admet au plus $2n$ zéros sur $]-\pi, \pi]$ ce qui établit l'unicité du polynôme obtenu.

11. Montrer que la fonction $f(y) = \cos(n \arccos y)$ est un polynôme de degré n en y. (Suggestion : raisonner par récurrence sur n).

Solution. En posant $y = \cos x$, il s'agit de voir que $\cos nx$ est un polynôme en $\cos x$. Cela est trivial lorsque $n = 1$. Supposons donc que $\cos nx$ et que $\sin nx \sin x$ sont des polynômes en $\cos x$ (lorsque $n = 1$, on a bien $\sin x \sin x = 1 - \cos^2 x$). Alors, on aura aussi que

$$\cos(n+1)x = \cos nx\cos x - \sin nx\sin x$$

est un polynôme en $\cos x$.

12. Montrer que la fonction arctan n'est pas une fonction rationnelle.

Solution.

La question a un sens car la dérivée de l'arctangente est une fonction rationnelle — le logarithme a aussi une dérivée rationnelle et nous savons qu'il n'est pas une fonction rationnelle parce qu'il croît plus lentement que toute puissance de son argument. Si l'on avait

$$\arctan x = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

on pourrait écrire que

$$\frac{\arctan x}{x} = \frac{P_1(x)}{Q(x)}$$

est une fonction paire pour laquelle le degré de P_1 est égal au degré de Q moins un, ce qui est impossible :

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{C}{x}(1+\phi(x)) \text{ où } \phi(x) \to 0 \text{ lorsque } x \to \pm\infty.$$

13. Si

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ et } \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

soient

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

et

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}.$$

Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$$

et discuter le cas d'égalité. Vérifier aussi la relation

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\,\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}.$$

Solution.

On a

$$0 \leq (\mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} + \lambda \mathbf{y})$$

pour tout nombre λ. Choisissant

$$\lambda = -\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|^2},$$

on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwarz (le cas où $\|y\| = 0$ est trivial). La vérification de l'identité

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\,\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$$

est directe.

14. Montrer que la somme des angles intérieurs d'un triangle est égale à π. (Suggestion : commencer par un triangle rectangle.)

Solution.

Dans le cas d'un triangle rectangle (fig(7)), on a

$$u = \arccos \frac{A}{C} = \arcsin \frac{B}{C}$$

et

$$v = \arccos \frac{B}{C} = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{B}{C} = \frac{\pi}{2} - u.$$

Dans le cas général, on aura suivant la nature de l'angle u (figure(8))

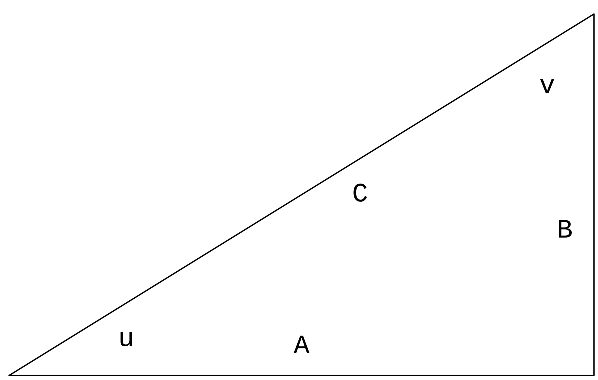

FIG. 7 – Un triangle rectangle

que

$$u + v_1 = \frac{\pi}{2}\ ,\ w + v_2 = \frac{\pi}{2}$$

de telle sorte que

$$u + v + w = \pi$$

ou que

$$V + v + w = \frac{\pi}{2}\ ,\ (\pi - u) + V = \frac{\pi}{2}$$

ce qui, par élimination de V, conduit au même résultat.

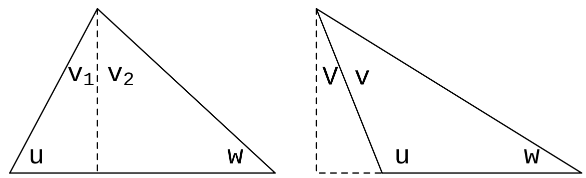

FIG. 8 – Deux triangles

15. Calculer l'aire déterminée par l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Le calcul de sa longueur est-il aussi facile ?
Solution.
L'aire de l'ellipse est, tenant compte de sa symétrie, égale à

$$4\int_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx = 4ab\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \cos^2 t}\ \sin t\,dt = \pi ab.$$

Le calcul de sa longueur est plus difficile puisque, toujours par symétrie, il s'agit d'évaluer

$$4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\,dt = 4b\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{b^2 - a^2}{b^2}\sin^2 t}\,dt$$

qui est une **intégrale elliptique**. Une telle intégrale ne peut pas être évaluée au moyen d'une des fonctions élémentaires de l'analyse et son étude dépasse le niveau de ce cours.

6 Calcul des primitives

1. Calculer

$$\int \tanh x\,dx.$$

Solution.

Directement de la définition de $\tanh x$,

$$\int \tanh x\, dx = \int \frac{\sinh x}{\cosh x}\, dx = \log\cosh x.$$

2. Calculer

$$\int \operatorname{arctanh} x\, dx.$$

Solution.
Puisque $\operatorname{arctanh}' x = 1/(1-x^2)$, une intégration par partie donne

$$\int \operatorname{arctanh} x\, dx = x \operatorname{arctanh} x + \frac{1}{2}\log(1-x^2).$$

3. Montrer que

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n\, dx = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2m+1} x \cos^{2n+1} x\, dx = \frac{m!\, n!}{(m+n+1)!}.$$

Solution.
On pose $x = \sin^2 t$ avec $t \in [0, \pi/2]$. Alors

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n\, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{2m} t\ \ \cos^{2n} t\ \ 2\sin t \cos t\, dt.$$

La première intégrale s'évalue par parties :

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n\, dx = \frac{x^m(1-x)^{n+1}}{-(n+1)}\Big|_0^1 + \int_0^1 m x^{m-1}\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\, dx$$
$$= m! \int_0^1 \frac{(1-x)^{n+m}}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}\, dx = \frac{m!\, n!}{(m+n+1)!}.$$

4. La probabilité d'observer autant de piles que de faces lors de $2n$ lancers d'une pièce de monnaie non-biaisée est

$$p_n = \binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}}.$$

Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = 0.$$

Solution.
En vertu de la formule de Wallis,

$$\lim_{n\to+\infty} p_n\sqrt{2n+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

5. Calculer
$$\int \frac{x^3\,dx}{(x-1)^4}\ ,\ x>1.$$
Solution.
On utilise directement une formule du cours :
$$\int \frac{x^3\,dx}{(x-1)^4} = \sum_{i=0}^{2} \binom{3}{i} \frac{(x-1)^{i-3}}{i-3} + \log(x-1)$$
$$= \log(x-1) - \left(\frac{1}{3(x-1)^3} + \frac{3}{2(x-1)^2} + \frac{3}{x-1} \right)$$
pour $x>1$.

6. Calculer
$$\int \frac{x^3\,dx}{(x^2+1)^2}.$$
Solution.
On utilise directement une formule du cours :
$$\int \frac{x^3\,dx}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2}{2(x^2+1)} + \frac{2}{2} \int \frac{x}{x^2+1}\,dx$$
$$= \frac{-x^2}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\log(x^2+1) = \left(\frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\log(x^2+1) - \frac{1}{2} \right).$$

7. Calculer
$$\int \frac{x^3\,dx}{(x^2+x+1)^2}.$$
Solution.
On a
$$\int \frac{x^3\,dx}{(x^2+x+1)^2} = \frac{\sqrt{3}}{9} \int \frac{(y\sqrt{3}-1)^3}{(y^2+1)^2}\,dy$$
en posant
$$y = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$
(complétion du carré). La primitive de la fonction
$$\frac{y^3 - y^2\sqrt{3} + y - \sqrt{3}/9}{(y^2+1)^2}$$

s'obtient en utilisant les formules du cours ; le résultat est :

$$\int \frac{x^3\,dx}{(x^2+x+1)^2}$$
$$= \frac{1+2x}{3(1+x+x^2)} - \frac{5}{3\sqrt{3}} \arctan\frac{1+2x}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\log(1+x+x^2)$$

8. Soit $0 < y < 1$. On considère le triangle rectangle de côtés $1-y^2$, $2y$ et $1+y^2$. Montrer que l'angle x opposé au côté $2y$ vaut $2\arctan y$. En déduire que la substitution $x = 2\arctan y$ entraîne

$$\cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2} \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{2y}{1+y^2}.$$

Solution.
Puisque $0 < x < \pi/2$,

$$x = \arctan\frac{2y}{1-y^2}.$$

Comme $0 < y < 1$, il existe $0 < z < \pi/4$ tel que $y = \tan z$. Alors

$$\frac{2y}{1-y^2} = \frac{2\tan z}{1-\tan^2 z} = \tan 2z$$

et

$$x = 2z = 2\arctan y.$$

On a alors directement du triangle que

$$\cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2} \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{2y}{1+y^2}.$$

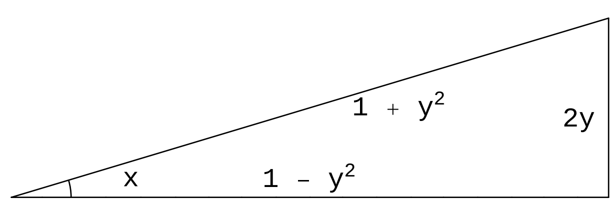

FIG. 9 – Une substitution

9. Calculer
$$\int \frac{1+\cos x}{1+\sin x}\, dx \ , \ |x| < \frac{\pi}{2}.$$
Solution.
Application de la substitution précédente :
$$\frac{dx}{dy} = \frac{2}{1+y^2}$$
et
$$\int \frac{1+\cos x}{1+\sin x}\, dx = \int \frac{1}{1+\sin x}\, dx + \int \frac{\cos x}{1+\sin x}\, dx$$
$$= \int \frac{2}{(1+y)^2}\, dy + \log(1+\sin x) = -2(1+y)^{-1} + \log(1+\sin x)$$
$$= \frac{-2}{1+\tan x/2} + \log(1+\sin x).$$

7 Intégrales impropres

1. Énoncer et démontrer la formule de changement de variable pour les intégrales impropres.
Solution.
Énoncé. Soit $\phi : (c,d) \to \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable strictement monotone et telle que $\phi((c,d)) = (a,b)$. Pour toute fonction continue $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, on a
$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_c^d f(\phi(t))|\phi'(t)|\, dt.$$
Démonstration. Chaque intervalle $[\alpha,\beta] \subseteq]a,b[$ est l'image bijective d'un intervalle $[\gamma,\delta] \subseteq]c,d[$ par ϕ et
$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\alpha\to a+,\ \beta\to b-} \int_\alpha^\beta f(x)\, dx$$
$$= \lim_{\gamma\to c+,\ \delta\to d-} \int_\gamma^\delta f(\phi(t))|\phi'(t)|\, dt = \int_c^d f(\phi(t))|\phi'(t)|\, dt.$$

2. Si $f : [0,+\infty[$ est continue et positive, pour montrer que
$$\int_0^{+\infty} f(x)\, dx = I,$$

il faut montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\beta_n} f(x)\,dx = I$$

pour toute suite $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty}\beta_n = +\infty.$$

Montrer qu'il suffit de considérer les suites $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ monotones.
Solution.
Soit $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque telle que

$$\lim_{n\to+\infty}\beta_n = +\infty.$$

Elle contient une suite partielle $\{\beta_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ strictement croissante pour laquelle, par hypothèse,

$$\lim_{k\to+\infty}\int_0^{\beta_{n_k}} f(x)\,dx = I.$$

Puisque à chaque β_m correspond un indice $n_{k(m)}$ tel que

$$\beta_{n_{k(m)}} \le \beta_m < \beta_{n_{k(m)+1}},$$

on a

$$\int_0^{\beta_{n_{k(m)}}} f(x)\,dx \le \int_0^{\beta_m} f(x)\,dx \le \int_0^{\beta_{n_{k(m)+1}}} f(x)\,dx$$

et

$$\lim_{m\to+\infty}\int_0^{\beta_m} f(x)\,dx = I.$$

3. Montrer que la convergence absolue implique la convergence simple, c'est-à-dire que la convergence de l'intégrale

$$\int_a^b |f(x)|\,dx$$

entraîne celle de l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

(Suggestion : on a $0 \leq |f| - f \leq 2|f|$).
Solution.
Puisque
$$\lim_{\alpha \to a+,\ \beta \to b-} \int_\alpha^\beta |f(x)|\,dx = A$$
et que
$$\lim_{\alpha \to a+,\ \beta \to b-} \int_\alpha^\beta (|f(x)| - f(x))\,dx = B \leq 2A$$
existent,
$$\lim_{\alpha \to a+,\ \beta \to b-} \int_\alpha^\beta f(x)\,dx = A - B$$
existe aussi.

4. Pour quelles valeurs des paramètres $p > 0$ et $q > 0$ l'intégrale suivante est-elle convergente
$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[q]{1 + x^p}}?$$
Solution.
Lorsque $x > 1$, on a
$$\frac{1}{2^{1/q}x^{p/q}} < \frac{1}{(1 + x^p)^{1/q}} < \frac{1}{x^{p/q}}$$
de telle sorte que l'intégrale est convergente si et seulement si $p > q$.

5. Montrer qu'une fonction rationnelle $R = P/Q$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si son dénominateur Q ne s'annule pas et le degré de Q excède le degré du numérateur P par au moins deux.
Solution.
Si Q s'annule en x_0, il existe un nombre $A > 0$ tel que
$$|R(x)| > \frac{A}{|x - x_0|^m}\ ,\ m \in \mathbb{N}$$
pour x dans un petit intervalle ouvert autour de x_0. De plus, il y a deux nombres $B > 0$ et $C > 0$ tels que
$$\frac{B}{|x|^k} < |R(x)| < \frac{C}{|x|^k}$$
lorsque $x \to \pm\infty$, où k est égal au degré de Q moins le degré de P. On aura donc convergence si et seulement si $m = 0$ (il n'y a aucun zéro) et $k > 1$, c'est-à-dire $k \geq 2$.

6. Montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx$$

est convergente.
Solution.
La fonction est continue à l'origine et on a

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} < +\infty.$$

7. Montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

est convergente. (Suggestion : intégrer par parties.)
Solution.
La fonction est continue à l'origine et on a

$$\int_1^{\beta} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{-\cos x}{x}\Big|_1^{\beta} - \int_1^{\beta} \frac{\cos x}{x^2}\, dx$$

de telle sorte que

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx.$$

8. Montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$$

est divergente.
Solution.
On a

$$\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geq \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx.$$

Supposons que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx < +\infty.$$

Alors, comme

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{\cos^2(x+\pi/2)}{x+\pi/2\ -\pi/2}\, dx$$
$$= \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos^2 y}{y-\pi/2}\, dy > \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos^2 y}{y}\, dy,$$

on aura

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx + \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x}\, dx = \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{dx}{x} < +\infty$$

ce qui est absurde.

9. Calculer

$$\int_0^{+\infty} e^{-px} \cos x\, dx$$

($p > 0$). (Suggestion : intégrer par parties.)
Solution.
Puisque

$$\int_0^{+\infty} |e^{-px} \cos x|\, dx \le \int_0^{+\infty} e^{-px}\, dx < +\infty,$$

l'intégrale converge absolument. En intégrant par parties deux fois

$$\int_0^{+\infty} e^{-px} \cos x\, dx = \cos x \frac{e^{-px}}{-p}\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} e^{-px} \sin x\, dx$$
$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{p} \left(-\sin x \frac{e^{-px}}{-p}\Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} e^{-px} \cos x\, dx \right)$$
$$= \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} \int_0^{+\infty} e^{-px} \cos x\, dx,$$

de telle sorte que

$$\int_0^{+\infty} e^{-px} \cos x\, dx = \frac{p}{p^2+1}.$$

De façon semblable,

$$\int_0^{+\infty} e^{-px} \sin x\, dx = \frac{1}{p^2+1}.$$

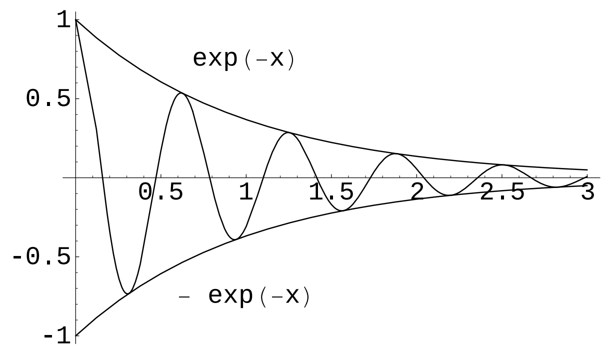

FIG. 10 – Fonctions de type $\phi(x)\cos x$

10. Déterminer les valeurs du paramètre $p > 0$ pour lesquelles la série

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^p \log k}$$

est convergente.
Solution.
La série converge si $p > 1$ car

$$\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k^p \log k} \leq \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k^p} < +\infty.$$

Elle diverge si $p < 1$ car il existe un nombre $A_p > 0$ tel que

$$\log k \leq A_p\, k^{(1-p)/2} \quad \text{pour tout} \quad k \geq 2$$

donc

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^p \log k} \geq \frac{1}{A_p} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^{(p+1)/2}} = +\infty.$$

Elle diverge aussi pour $p = 1$ en vertu du test intégral :

$$\int_2^{\beta} \frac{dx}{x \log x} = \log\log\beta - \log\log 2 \to +\infty \quad \text{lorsque} \quad \beta \to +\infty.$$

11. Calculer $\Gamma(n + \frac{1}{2})$.
Solution.

Par récurrence sur n,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

et

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}.$$

12. Calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\,dx$$

pour $k = 0, 1, 2$ ($\sigma > 0$).
Solution.
En posant $x = \mu + \sigma\, y$,

$$I_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\,dx = \sigma\int_{-\infty}^{+\infty} (\mu+\sigma\, y)^k e^{-y^2/2}\,dy.$$

D'où

$$I_0 = \sigma\sqrt{2\pi},$$
$$I_1 = \sigma\sqrt{2\pi}\,\mu$$

(le terme $y\,e^{-y^2/2}$ est impair) et

$$I_2 = \sigma\sqrt{2\pi}\,(\mu^2+\sigma^2),$$

(le terme $y\,e^{-y^2/2}$ est impair et le terme $y^2\,e^{-y^2/2}$ s'intègre par parties :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y\;ye^{-y^2/2}\,dy = y(-e^{-y^2/2})\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2}\,dy).$$

8 Suites et séries de fonctions

1. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+nx}{1+nx^2}\;, \quad x\in\mathbb{R}.$$

La convergence est-elle uniforme ?
Solution.
On a

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+nx}{1+nx^2} = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$$

où

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ \dfrac{1}{x} & \text{sinon .} \end{cases}$$

La convergence n'est pas uniforme, autrement la limite serait continue.
Directement :

$$\left| f\left(\frac{1}{n}\right) - f_n\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \frac{n-1}{1+1/n}.$$

L'écart maximum entre la $n^{ième}$ courbe et la courbe limite tend vers $+\infty$.

2. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \log\left(1+\frac{x}{n}\right) \quad , \quad x > -1.$$

La convergence est-elle uniforme ?
Solution.
On a

$$\lim_{n\to+\infty} \log\left(1+\frac{x}{n}\right) = 0$$

pour tout $x > -1$ mais la convergence n'est pas uniforme :

$$\log\left(1+\frac{n}{n}\right) \nrightarrow 0.$$

L'écart maximum entre la $n^{ième}$ courbe et la courbe limite ne tend pas vers 0.

3. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} xe^{-nx} \quad , \quad x \geq 0.$$

La convergence est-elle uniforme ?
Solution.
On a

$$\lim_{n\to+\infty} xe^{-nx} = 0$$

et la convergence est uniforme :

$$xe^{-nx} \leq \frac{1}{e\,n} \ \text{ pour tout } \ x \geq 0.$$

4. Montrer par un exemple approprié que la convergence uniforme de fonctions dérivables f_n vers une fonction dérivable f n'entraîne pas nécessairement la convergence des dérivées f_n' vers la dérivée f'.
Solution.

Les fonctions
$$f_n(x) = \frac{\sin n^2 x}{n}$$
convergent vers 0 uniformément sur $\mathbb{R}$ mais les fonctions dérivées
$$f_n'(x) = n \cos n^2 x$$
n'ont pas de limite.

5. Montrer par un exemple approprié que le théorème sur l'intégration d'une fonction limite n'est pas nécessairement vrai si l'intervalle d'intégration n'est pas compact.
Solution.
Les fonctions
$$f_n(x) = \frac{1}{n} e^{-x^2/2n^2}$$
convergent vers 0 uniformément sur $\mathbb{R}$ mais
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\, dx = \sqrt{2\pi}$$
pour tout n.

6. Montrer que la série
$$\sum_{k=1}^{+\infty} k e^{-kx} \cos kx$$
converge uniformément sur tout intervalle $[a, +\infty[$ $(a > 0)$.
Solution.
On a
$$\sum_{k=1}^{+\infty} |k e^{-kx} \cos kx| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} k e^{-ka} < +\infty$$
et la série converge uniformément en vertu du critère de Weierstrass.

7. Montrer que la série
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin kx}{k^2 + x^2}$$
converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
Solution.
On a
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|\sin kx|}{k^2 + x^2} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty$$
et la série converge uniformément en vertu du critère de Weierstrass.

8. Montrer que la série
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sin \frac{x}{k^2}$$
converge uniformément sur tout intervalle $[-M, M]$.
Solution.
On a
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left|\sin \frac{x}{k^2}\right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{M}{k^2} < +\infty$$
et la série converge uniformément en vertu du critère de Weierstrass.

9. Soient $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues. Montrer que
$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$$
et que
$$\|fg\| \leq \|f\|\|g\|.$$
Ces inégalités peuvent-elles être strictes ?
Solution.
En chaque point $x \in [0,1]$, on a
$$|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\| + \|g\|$$
donc
$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$$
et
$$|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| \leq \|f\|\|g\|$$
donc
$$\|fg\| \leq \|f\|\|g\|.$$
Chacune de ces inégalités peut être stricte, par exemple pour
$$f(x) = x \quad \text{et} \quad g(x) = 1-x,$$
on a
$$\|f+g\| = 1 < \|f\| + \|g\| = 2$$
et
$$\|fg\| = \frac{1}{4} < \|f\|\|g\| = 1.$$

10. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\int_0^1 x^n f(x)\, dx = 0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}_0.$$

Montrer qu'elle est identiquement nulle.
Solution.
Soit $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes qui converge uniformément vers f sur $[0,1]$. Alors

$$\int_0^1 f^2(x)\, dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 P_n(x) f(x)\, dx = 0.$$

Donc $f^2(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$ et $f(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$.

11. Déterminer la limite supérieure et la limite inférieure de la suite

$$\left(1 + \frac{\cos k\pi}{k}\right)^k.$$

Solution.
La suite des termes de rang $k = 2j$ pair

$$\left(1 + \frac{1}{2j}\right)^{2j}$$

converge vers e et la suite des termes de rang $k = 2j+1$ impair

$$\left(1 - \frac{1}{2j+1}\right)^{2j+1}$$

converge vers e^{-1}. Donc

$$\limsup_k \left(1 + \frac{\cos k\pi}{k}\right)^k = e$$

et

$$\liminf_k \left(1 + \frac{\cos k\pi}{k}\right)^k = e^{-1}.$$

12. Déterminer les valeurs adhérentes, la limite supérieure et la limite inférieure de la suite

$$\frac{k \cos k\frac{\pi}{2}}{k+1}.$$

Solution.

Les premiers termes de la suite sont

$$0,\ -\frac{2}{3},\ 0,\ \frac{4}{5},\ 0,\ -\frac{6}{7},\ 0,\ \frac{8}{9},\ 0,\ -\frac{10}{11},\ \ldots$$

On a une suite partielle qui converge vers 0, une autre vers -1 et une troisième vers 1. Les valeurs adhérentes sont donc $\{-1, 0, 1\}$ et

$$\limsup_k \frac{k\cos k\frac{\pi}{2}}{k+1} = 1\ ,\ \liminf_k \frac{k\cos k\frac{\pi}{2}}{k+1} = -1.$$

13. Déterminer les valeurs adhérentes, la limite supérieure et la limite inférieure de la suite

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$$

Solution.

Cette suite énumère tous le nombres rationnels entre 0 et 1 et chacun d'eux y paraît un nombre infini de fois. L'ensemble de ses valeurs adhérentes est donc l'intervalle $[0,1]$ tout entier, la limite supérieure est 1, la limite inférieure est 0.

14. Montrer, si elles sont vraies, les inégalités suivantes

$$\limsup_k (u_k + v_k) \leq \limsup_k u_k + \limsup_k v_k$$

et

$$\limsup_k u_k v_k \leq \limsup_k u_k\ \limsup_k v_k.$$

Ces inégalités peuvent-elles êtres strictes ? Restent-elles vraies si on y remplace $\limsup_k$ par $\liminf_k$?

Solution.

Donné $\epsilon > 0$, on peut trouver des indices m et n tels que $u_k < \limsup_k u_k + \epsilon$ pour tout $k \geq m$ et que $v_k < \limsup_k v_k + \epsilon$ pour tout $k \geq n$. Si donc l'indice k est plus grand que $\max\{m, n\}$, on aura

$$u_k + v_k < \limsup_k u_k + \limsup_k v_k + 2\epsilon$$

donc

$$\limsup_k (u_k + v_k) \leq \limsup_k u_k + \limsup_k v_k + 2\epsilon$$

ce qui démontre la première assertion.

La seconde est fausse. Il suffit de considérer les suites $\{1,-2,1,-2,1,-2,1,\ldots\}$ et $\{1,-2,1,-2,1,-2,1,\ldots\}$ pour le voir. On a

$$\limsup_k u_k v_k = 4$$

et

$$\limsup_k u_k = \limsup_k v_k = 1.$$

La première inégalité peut être stricte, par exemple, pour les suites $\{-1,1,-1,1,\ldots\}$ et $\{1,-1,1,-1,\ldots\}$.

L'inégalité correspondante pour les limites inférieures est inversée :

$$\liminf_k (u_k + v_k) \geq \liminf_k u_k + \liminf_k v_k,$$

elle peut être stricte et elle se démontre de façon semblable.

15. Montrer que si une suite admet un nombre infini de valeurs adhérentes, leur borne supérieure est encore une valeur adhérente de la suite.

Solution.

Soient $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ ces valeurs adhérentes et soit V leur borne supérieure. Il suffit d'exhiber une suite partielle $\{u_{k_n}\}_{n\geq 1}$ qui converge vers V. Soient U_{α_n} tels que

$$\lim_{n\to+\infty} U_{\alpha_n} = V$$

et soient u_{k_n} des termes de la suite tels que

$$|u_{k_n} - U_{\alpha_n}| < \frac{1}{n}.$$

Alors la suite partielle $\{u_{k_n}\}_{n\geq 1}$ converge vers V.

16. Soit $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres strictement positifs pour lesquels la limite

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$$

existe. Montrer qu'alors

$$\lim_{k\to+\infty} (a_k)^{1/k}$$

existe aussi et que ces deux limites sont égales. Donner un exemple où la seconde limite existe mais pas la première. (formule de d'Alembert pour le rayon de convergence).

Solution.
Soit
$$\frac{1}{A} = \lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$$
et soit $\epsilon > 0$. Il existe un indice n tel que
$$\frac{1}{A+\epsilon} < \frac{a_{k+1}}{a_k} < \frac{1}{A-\epsilon} \quad \text{si} \quad k \geq n.$$
Comme
$$a_{n+j} = \frac{a_{n+j}}{a_{n+j-1}} \frac{a_{n+j-1}}{a_{n+j-2}} \cdots \frac{a_{n+1}}{a_n} a_n,$$
on a
$$a_n \left(\frac{1}{A+\epsilon}\right)^j < a_{n+j} < a_n \left(\frac{1}{A-\epsilon}\right)^j$$
c'est-à-dire
$$a_n^{1/(n+j)} \left(\frac{1}{A+\epsilon}\right)^{j/(n+j)} < (a_{n+j})^{1/(n+j)} < a_n^{1/(n+j)} \left(\frac{1}{A-\epsilon}\right)^{j/(n+j)}$$
et, laissant $j \to +\infty$,
$$\frac{1}{A+\epsilon} < \liminf_k (a_k)^{1/k} \leq \limsup_k (a_k)^{1/k} < \frac{1}{A-\epsilon}.$$
Le nombre ϵ étant arbitraire, cela implique que
$$\frac{1}{R} = \lim_{k\to+\infty} (a_k)^{1/k}$$
existe et que
$$R = A.$$
Pour la suite $2, 3, 2, 3, 2, 3, \ldots$, on a
$$\liminf_k \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2}{3} \ , \ \limsup_k \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{3}{2}$$
et
$$\lim_{k\to+\infty} (a_k)^{1/k} = 1.$$

17. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles la série

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 x^k$$

converge et calculer sa somme.

Solution.

La série diverge si $|x| \geq 1$ (son terme général ne tend pas vers 0) et si $|x| < 1$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 x^k &= x^2 \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} + x \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} \\ &= x^2 \frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{1-x} + x \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.\end{aligned}$$

18. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles la série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

converge et calculer sa somme.

Solution.

La série diverge si $|x| \geq 1$ (son terme général ne tend pas vers 0) et si $|x| < 1$, on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^x t^k \, dt$$

$$= \int_0^x \sum_{k=0}^{+\infty} t^k \; dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} \, dt = -\log(1-x).$$

9 Séries de Taylor

1. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable. Montrer que

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq (b-a) \left| \frac{f(b) + f(a)}{2} \right| + \frac{(b-a)^2}{2} \|f'\|.$$

Solution.

En intégrant par parties,

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(b) - \int_a^b (x-a)f'(x)\,dx$$

et

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(a) + \int_a^b (b-x)f'(x)\,dx$$

donc

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\frac{f(b)+f(a)}{2} + \int_a^b \left(\frac{a+b}{2} - x\right) f'(x)\,dx$$

d'où

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| &\leq (b-a)\left|\frac{f(b)+f(a)}{2}\right| + \int_a^b \left|\frac{a+b}{2} - x\right| dx\,\|f'\| \\ &= (b-a)\left|\frac{f(b)+f(a)}{2}\right| + \frac{(b-a)^2}{2}\|f'\|.\end{aligned}$$

2. Obtenir le développement limité d'ordre 2 au point $x_0 = n$ pour la fonction

$$f(x) = x^n e^{-x}.$$

Solution.
On a

$$f(n) = \left(\frac{n}{e}\right)^n \;,\; f'(n) = 0 \;,\; f''(n) = \frac{-1}{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

et

$$f'''(x) = (-x^n + 3nx^{n-1} - 3n(n-1)x^{n-2} + n(n-1)(n-2)x^{n-3})e^{-x}.$$

Donc

$$f(x) = \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 - \frac{(x-n)^2}{2n}\right) + r_2(x)$$

où

$$r_2(x) = f'''(\xi)\frac{(x-n)^3}{3!}$$

avec ξ entre n et x ou encore

$$r_2(x) = \frac{1}{2}\int_n^x (x-t)^2 f'''(t)\,dt.$$

3. Considérons le développement limité d'une fonction f au point x_0. Soit $k > 0$ le rang du premier terme après $f(x_0)$ qui est non nul dans ce développement. Montrer que si k est pair la fonction admet un extrémum relatif (local) en x_0. Qu'arrive-t-il k est impair ?

   Solution.

   On a
$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k}{k!} + \circ(x - x_0)^k.$$
   Si k est pair, on est en présence d'un maximum relatif si $f^{(k)}(x_0) < 0$ et en présence d'un minimum relatif si $f^{(k)}(x_0) > 0$. Si k est impair, la différence $f(x) - f(x_0)$ change de signe lorsque x passe par x_0 et il n'y a pas d'extrémum relatif.

4. Obtenir le développement limité d'ordre 5 de la fonction tangente à l'origine (utiliser les notations de Landau).

   (Suggestion : $\sin x = \tan x \cos x$).

   Solution.

   On a, puisque la tangente est impaire,
$$\begin{aligned} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \circ(x^6) &= (ax + bx^3 + cx^5 + \circ(x^6))(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \circ(x^5)) \\ &= ax + \left(b - \frac{a}{2}\right) x^3 + \left(c - \frac{b}{2} + \frac{a}{24}\right) x^5 + \circ(x^6) \end{aligned}$$
   ce qui entraîne $a = 1, b = 1/3$ et $c = 2/15$:
$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \circ(x^6).$$

5. Montrer que les inégalités
$$1 + \sin x < e^x < \frac{1}{\sqrt{1 - 2x}}$$
   sont valables dans un petit intervalle ouvert autour de l'origine.

   Solution.

   On a
$$1 + \sin x = 1 + x - \frac{x^3}{6} + \circ(x^4),$$
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)$$

et, en vertu du binôme de Newton,

$$\frac{1}{\sqrt{1-2x}} = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \circ(x^2)$$

donc

$$1 + x < 1 + x + \frac{x^2}{2} < 1 + x + \frac{3}{2}x^2$$

dans un petit intervalle ouvert autour de l'origine.

6. Soit $R > 0$. Représenter la fonction

$$f(x) = \frac{1}{(R-x)^2} - \frac{1}{(R+x)^2}$$

comme la somme d'une série de puissances entières de x dans le plus grand intervalle possible autour de l'origine.
Solution.
On a

$$\frac{1}{(R-x)^2} - \frac{1}{(R+x)^2} = \frac{4Rx}{(R^2-x^2)^2} = \frac{4x}{R^3} \frac{1}{\left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right)^2}.$$

Donc, en utilisant le binôme de Newton,

$$f(x) = \frac{4}{R^3} \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) \frac{x^{2k+1}}{R^{2k}},$$

la convergence ayant lieu pour $|x| < R$.

7. Obtenir la série de Taylor à l'origine de la fonction

$$\sinh x.$$

Déterminer son rayon de convergence.
Solution.
De la définition,

$$\sinh x = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-x)^k}{k!} \right) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!},$$

la convergence ayant lieu pour tout $x \in \mathbb{R}$.

8. Mêmes questions pour la fonction

$$\operatorname{arcsinh} x.$$

Solution.
Puisque

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsinh} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

le binôme de Newton ($p = -1/2, x \mapsto x^2$) et l'intégration terme à terme donnent

$$\operatorname{arcsinh} x = x + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\ ,\ |x| < 1.$$

9. Mêmes questions pour la fonction

$$\operatorname{arctanh} x.$$

Solution.
À partir de

$$\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$$

ou à partir de

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{1-x^2},$$

on trouve

$$\operatorname{arctanh} x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\ ,\ |x| < 1.$$

10. Mêmes questions pour la fonction

$$\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}.$$

Solution.
Cette fonction n'est à priori définie que pour $x \geq 0$. Comme

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!}\ ,\ x \in \mathbb{R},$$

on a

$$\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^k}{(2k+1)!}\ ,\ x \geq 0.$$

La série convergeant pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut l'utiliser pour prolonger la fonction donnée à une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^k}{(2k+1)!}\ ,\ x \in \mathbb{R}.$$

11. Calculer

$$\int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} e^{-kx} \cos kx\, dx.$$

Solution.
On intègre terme à terme la série uniformément convergente :

$$\int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} e^{-kx} \cos kx\, dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \int_0^{2\pi} e^{-kx} \cos kx\, dx.$$

En intégrant par parties deux fois,

$$\int_0^{2\pi} e^{-kx} \cos kx\, dx = \frac{1 - e^{-2\pi k}}{2k}.$$

En utilisant la relation

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{u^k}{k} = -\log(1-u)\ ,\ |u| < 1,$$

on obtient

$$\int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} e^{-kx} \cos kx\, dx = \frac{1}{2}\left(-\log\frac{1}{2} + \log\left(1 - \frac{1}{2e^{2\pi}}\right)\right) = \frac{1}{2}\log(2 - e^{-2\pi}).$$

12. Montrer que le nombre $\cos 1$ est irrationnel.
Solution.
On a

$$\cos 1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}.$$

Si l'on avait

$$\cos 1 = \frac{p}{q}$$

avec $p, q \in \mathbb{N}$, on aurait

$$(2q)!p - \sum_{k=0}^{q} \frac{(-1)^k (2q)!}{(2k)!} = \sum_{k=q+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k (2q)!}{(2k)!}.$$

Cela est impossible parce que le membre de gauche est un entier alors que le membre de droite ne l'est pas :

$$\left| \sum_{k=q+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k (2q)!}{(2k)!} \right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{((2q+1)(2q+2))^k} = \frac{1}{(2q+1)(2q+2)-1} < 1$$

et

$$\left| \sum_{k=q+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k (2q)!}{(2k)!} \right| > \frac{1}{(2q+1)(2q+2)} \left(1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{((2q+3)(2q+4))^k} \right)$$

$$= \frac{1}{(2q+1)(2q+2)} \left(1 - \frac{1}{(2q+3)(2q+4)-1} \right) > 0.$$

10 Séries de Fourier

1. Montrer que toute fonction définie sur un intervalle symétrique par rapport à l'origine peut s'y représenter comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

   Solution.

   On a tout simplement

   $$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = f_P(x) + f_I(x).$$

2. Les coefficients $a_k(f)$ et $b_k(f)$ de Fourier d'une fonction f tendent vers 0 d'autant plus vite que la fonction est plus régulière. Montrer, par exemple, que si f admet une deuxième dérivée continue, on a

   $$a_k(f) = \circ(\frac{1}{k^2}),\ b_k(f) = \circ(\frac{1}{k^2})$$

   lorsque $k \to +\infty$.

Solution.

En intégrant par parties deux fois et en vertu de la périodicité des fonctions impliquées,

$$
\begin{aligned}
a_k(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\cos kt\,dt \\
&= f(t)\frac{\sin kt}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f'(t)\frac{\sin kt}{k}\,dt \\
&= f'(t)\frac{-\cos kt}{k^2}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f''(t)\frac{-\cos kt}{k^2}\,dt \\
&= \frac{1}{k^2}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f''(t)\cos kt\,dt = \frac{1}{k^2}a_k(f'') = \frac{1}{k^2}\circ(1) = \circ(\frac{1}{k^2}).
\end{aligned}
$$

Le raisonnement pour $b_k(f)$ est semblable.

3. Déterminer le minimum de l'expression

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}(t^2 - a - b\cos t - c\sin t)^2\,dt$$

lorsque a, b et c parcourent l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

Solution.

Les nombres cherchés sont les coefficients de Fourier de la fonction $f :]\pi,\pi] \to \mathbb{R},\ t \mapsto t^2$:

$$a = \frac{1}{2}a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} t^2\,dt = \frac{\pi^2}{3},$$

$$b = a_1(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} t^2\cos t\,dt = -4$$

et

$$c = b_1(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} t^2\sin t\,dt = 0.$$

Donc

$$
\begin{aligned}
&\inf_{a,b,c}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}(t^2 - a - b\cos t - c\sin t)^2\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(t)\,dt - \frac{1}{2}a_0^2(f) - a_1^2(f) - b_1^2(f) = \frac{8\pi^4}{45} - 16.
\end{aligned}
$$

4. Obtenir la série de Fourier de la fonction f définie par

$$f(x) = \pi^2 - x^2 \quad \text{si} \quad -\pi \leq x < \pi.$$

Étudier sa convergence.
Solution.
La fonction étant paire, la série cherchée est de la forme

$$S(f)(x) = \frac{1}{2}a_0(f) + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k(f) \cos kx$$

où

$$a_k(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos kx \, dx \ , \ (k = 0, 1, \ldots).$$

Ici,

$$a_0(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \, dx = \frac{4\pi^2}{3}$$

et

$$a_k(f) = -\frac{4(-1)^k}{k^2} \quad \text{pour} \quad k > 0$$

d'où la série

$$S(f) = \frac{2\pi^2}{3} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^k}{k^2} \cos kx.$$

En vertu du théorème de Dirichlet, on a

$$\frac{2\pi^2}{3} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^k}{k^2} \cos kx = \pi^2 - x^2 \quad \text{si} \quad -\pi \leq x < \pi.$$

En choisissant $x = 0$, on obtient en particulier

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

5. Mêmes questions pour la fonction

$$f(x) = |\sin x| \quad \text{si} \quad -\pi \leq x < \pi.$$

Solution.

Cette fonction est également paire. On a

$$a_0(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |\sin x|\,dx = \frac{4}{\pi}$$

et si $k > 1$,

$$a_k(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |\sin x|\cos kx\,dx = \begin{cases} \dfrac{-4}{\pi(k^2-1)} & \text{si } k \text{ est pair,} \\ 0 & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

D'où, toujours en vertu du théorème de Dirichlet,

$$\frac{2}{\pi} - \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi}\frac{\cos 2jx}{4j^2-1} = |\sin x| \;\; \text{si} \quad -\pi \leq x < \pi.$$

6. Mêmes questions pour la fonction

$$f(x) = x \;\; \text{si} \quad -\pi \leq x < \pi.$$

En déduire la somme de la série

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin ky}{k}.$$

Solution.
La fonction est impaire. Sa série de Fourier est donc de la forme

$$S(f)(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k(f)\sin kx,$$

avec

$$b_k(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin kx\,dx \;,\;\; (k = 1, 2, \ldots)$$

ce qui donne ici

$$b_k(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin kx\,dx = \frac{2(-1)^{k+1}}{k}.$$

En vertu du théorème de Dirichlet,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k}\sin kx = \begin{cases} x & \text{si} \quad -\pi < x < \pi, \\ 0 & \text{si} \;\; x = -\pi. \end{cases}$$

La substitution $x = \pi - y$ montre que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin ky}{k} = \frac{\pi - y}{2} \quad \text{pour} \quad 0 < y < 2\pi.$$

7. Représenter la fonction x comme une somme de cosinus sur l'intervalle $(0, A)$.

   Solution.

   Il faut se ramener à considérer une fonction paire sur l'intervalle $[-\pi, \pi[$. La fonction paire $f(y)$ égale à Ay/π lorsque $0 < y < \pi$ fera l'affaire. Ses coefficients de Fourier sont

$$a_0(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{Ay}{\pi}\, dy = A$$

   et, si $k > 0$,

$$a_k(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{Ay}{\pi} \cos ky\, dy = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est pair,} \\ \dfrac{-4A}{\pi^2 k^2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

   Ainsi,

$$f(y) = \frac{A}{2} - \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{4A}{\pi^2 (2j+1)^2} \cos ky \quad \text{si} \quad -\pi < y < \pi$$

   ce qui implique que

$$x = \frac{A}{2} - \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{4A}{\pi^2 (2j+1)^2} \cos k \frac{\pi}{A} x \quad \text{si} \quad 0 < x < A.$$

8. Montrer qu'une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique et continue est entièrement déterminée par ses coefficients de Fourier.

   Solution.

   Si deux telles fonctions f_1 et f_2 ont les mêmes coefficients de Fourier, alors en tout point x,

$$f_1(x) = \lim_{n \to +\infty} \sigma_n(f_1)(x) = \lim_{n \to +\infty} \sigma_n(f_2)(x) = f_2(x).$$

9. Montrer que

$$x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \cos 2kx \ , \ 0 < x < \pi$$

et que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Solution.
On considère la fonction f paire qui coïncide avec $x(\pi - x)$ sur $]0, \pi[$. Elle satisfait les conditions de Dirichlet et celles du théorème de Fejér. On a

$$a_0(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x)\, dx = \frac{\pi^2}{3}$$

et, si $k > 0$,

$$a_k(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \cos kx\, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est impair,} \\ -\dfrac{4}{k^2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'où, en vertu du théorème de Dirichlet,

$$x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \cos 2kx \ , \ 0 < x < \pi$$

et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

en vertu de la relation de Parseval.