Analyse 1

Solutions des exercices

André Giroux
Département de mathématiques et statistique
Université de Montréal
2009

Table des matières

Table des figures

1 INTRODUCTION

2 QUATORZE AXIOMES

1. On considère un ensemble E réduit à deux éléments 0 et 1 sur lequel une addition $+$ et une multiplication $\cdot$ sont définies par les tables suivantes.

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

   Vérifier que les axiomes **A1** à **A9** sont satisfaits. Est-il possible de définir une relation d'ordre $>$ sur E de façon à satisfaire aussi les axiomes **A10** à **A13** ?
   Solution.
   Les axiomes **A1** à **A9** se vérifient directement à partir des tables. Il est impossible de définir une relation d'ordre $>$ sur E de façon à satisfaire aussi les axiomes **A10** à **A13** parce que ces axiomes entraînent nécessairement $1+1>0$ alors qu'ici $1+1=0$.
2. Montrer que $a \neq 0$ et $b \neq 0$ impliquent $ab \neq 0$ et $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.
   Solution.
   Si $a \neq 0$ et $ab = 0$, alors $a^{-1}ab = b = 0$. Ensuite, $(ab)a^{-1}b^{-1} = aa^{-1}bb^{-1} = 1$ donc $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.
3. Montrer que si $a > b > 0$, alors $b^{-1} > a^{-1}$. L'hypothèse $b > 0$ est-elle nécessaire ? (Montrer par un exemple approprié que la conclusion est fausse si elle est omise ou présenter un raisonnement qui n'en dépend pas.)
   Solution.
   De $a > b > 0$, on tire d'abord $1 > a^{-1}b > 0$ puis $b^{-1} > a^{-1} > 0$. L'hypothèse $b > 0$ est nécessaire : $1 > -2$ mais $1 > -1/2$.
4. Montrer que si $a > b \geq 0$, alors $a^2 > b^2$. L'hypothèse $b \geq 0$ est-elle nécessaire ? (Montrer par un exemple approprié que la conclusion est fausse si elle est omise ou présenter un raisonnement qui n'en dépend pas.)
   Solution.
   On peut multiplier les inégalités $a > b$ et $a > b$ membre à membre lorsque $b > 0$ et obtenir $a^2 > b^2$. L'hypothèse $b > 0$ est nécessaire : $1 > -2$ mais $1 < 4$.

5. Montrer que si $a > b \geq 0$, alors $a^3 > b^3$. L'hypothèse $b \geq 0$ est-elle nécessaire ? (Montrer par un exemple approprié que la conclusion est fausse si elle est omise ou présenter un raisonnement qui n'en dépend pas.)

   Solution.

   On peut multiplier membre à membre des inégalités comme dans l'exercice précédent : $a > b > 0$ implique d'abord $a^2 > b^2$, ensuite $a^3 > b^3$. L'hypothèse $b > 0$ n'est toutefois pas nécessaire ici. Si $a > 0 \geq b$, $a^3 > 0 \geq b^3$ alors que si $0 \geq a > b$, on a : $-b > -a \geq 0$ donc $(-b)^3 > (-a)^3 \geq 0$, c'est-à-dire $-b^3 > -a^3 \geq 0$ et enfin $a^3 > b^3$.

6. Vérifier que l'exponentiation, $m, n \mapsto m^n$, est une opération sur $\mathbb{N}$ qui n'est ni commutative ni associative.

   Solution.

   On a par exemple $2^3 = 8 \neq 9 = 3^2$ et

$$(2^3)^4 = 2^{12} = 4096 \neq 2417851639229258349412352 = 2^{81} = 2^{(3^4)}.$$

7. Soit $E = \{p/q \mid p + q = s, \quad p, q \in \mathbb{N}\}$. Vérifier que E est borné et déterminer $\sup E$ et $\inf E$. (Justifier sa réponse.)

   Solution.

   E est fini. $\inf E = 1/(s-1)$ est atteint lorsque $p = 1$ et $\sup E = s - 1$ est atteint lorsque $p = s - 1$ comme il est facile de le vérifier.

8. Soit $E = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Vérifier que E est borné et déterminer $\sup E$ et $\inf E$. (Justifier sa réponse.)

   Solution.

   1 est une borne supérieure pour E et c'est la plus petite possible puisqu'elle appartient à E. 0 est une borne inférieure. C'est la plus grande possible. Si en effet $a > 0$, il existe, en vertu de la propriété d'Archimède, $n \in \mathbb{N}$ tel que $1/n < a$ et donc a ne peut pas être une borne inférieure pour E.

9. Soit $E = \{x \mid x > 0\}$. Vérifier que E est borné inférieurement mais pas supérieurement et déterminer $\inf E$. (Justifier sa réponse.)

   Solution.

   $E \supseteq \mathbb{N}$ n'est pas borné supérieurement mais il l'est inférieurement par 0. On a $\inf E = 0$. Si en effet $a > 0$, $a/2 \in E$ et donc a ne saurait être une borne inférieure pour E.

10. Soit $E = \{n/(n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Vérifier que E est borné et déterminer $\sup E$ et $\inf E$. (Justifier sa réponse.)

Solution.

On a

$$\frac{1}{2} \leq \frac{n}{n+1} < 1.$$

La borne de gauche est atteinte pour $n = 1$, c'est donc la plus grande borne inférieure possible. Pour vérifier que $\sup E = 1$, il suffit de voir que quel que soit $b < 1$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n/(n+1) > b$ c'est-à-dire tel que $1/n < 1/b - 1$, ce qui suit de la propriété d'Archimède.

11. Soit $E = \{n+(-1)^n/n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Vérifier que E est borné inférieurement mais pas supérieurement et déterminer $\inf E$. (Justifier sa réponse.)

    Solution.

    Pour $n = 2m$, on a $n + (-1)^n/n > 2m$ qui peut être arbitrairement grand puisque $\mathbb{N}$ n'est pas borné supérieurement. D'autre part, $n + (-1)^n/n \geq 0$ et l'égalité est atteinte pour $n = 1$, donc $\inf E = 0$.

12. Montrer que si $\emptyset \subsetneq F \subseteq E \subseteq \mathbb{R}$ sont deux ensembles bornés,

    $$\inf E \leq \inf F \leq \sup F \leq \sup E.$$

    Solution.

    Toute borne supérieure pour E est aussi une borne supérieure pour F. En particulier, $\sup E$ est une borne supérieure pour F donc $\sup F \leq \sup E$. L'inégalité $\inf E \leq \inf F$ se démontre de la même manière.

13. Soient E et F deux ensembles non vides tels que $x \in E$ et $y \in F$ impliquent $x \leq y$. Montrer que E est borné supérieurement, que F est borné inférieurement et que

    $$\sup E \leq \inf F.$$

    Solution.

    Tout élément de F est une borne supérieure pour E et tout élément de E est une borne inférieure pour F. On a donc $\sup E \leq y$ quel que soit $y \in F$ de telle sorte que $\sup E \leq \inf F$.

14. Soient $\emptyset \subsetneq F, E \subseteq \mathbb{R}$ deux ensembles bornés supérieurement. Montrer que leur réunion $E \cup F$ l'est aussi et que

    $$\sup(E \cup F) = \sup\{\sup E, \sup F\}.$$

    Solution.

    Si $x \in E$, alors $x \leq \sup E \leq \sup\{\sup E, \sup F\}$ et de même, si $x \in F$, $x \leq \sup F \leq \sup\{\sup E, \sup F\}$. Ceci montre que $E \cup F$ est borné supérieurement et que $\sup(E \cup F) \leq \sup\{\sup E, \sup F\}$. D'autre part, toute borne supérieure pour $E \cup F$ étant aussi une borne supérieure pour E, on a $\sup E \leq \sup\{E \cup F\}$. Semblablement, $\sup F \leq \sup\{E \cup F\}$. Ceci montre que $\sup(E \cup F) \geq \sup\{\sup E, \sup F\}$.

15. Soient $\emptyset \subsetneq F, E \subseteq \mathbb{R}$ deux ensembles bornés inférieurement. Montrer que leur réunion $E \cup F$ l'est aussi et que

$$\inf(E \cup F) = \inf\{\inf E, \inf F\}.$$

Solution.
Analogue à celle de l'exercice précédent.

16. Soient $\emptyset \subsetneq F, E \subseteq \mathbb{R}$ deux ensembles bornés et considérons leur intersection $E \cap F = EF$. Est-il vrai que

$$\sup(EF) = \inf\{\sup E, \sup F\}?$$

que

$$\inf(EF) = \sup\{\inf E, \inf F\}?$$

(Justifier sa réponse).
Solution.
Les deux équations sont fausses. Considérer par exemple les ensembles $E = \{1, 3, 5\}$ et $F = \{2, 3, 4\}$. On a $EF = \{3\}$ alors que $\inf\{\sup E, \sup F\} = \inf\{4, 5\} = 4$ et que $\sup\{\inf E, \inf F\} = \sup\{1, 2\} = 2$.

17. Soient $\emptyset \subsetneq F, E \subseteq \mathbb{R}$ deux ensembles bornés supérieurement. Soit

$$E + F = \{x + y \mid x \in E, y \in F\}.$$

Montrer que $E + F$ est borné supérieurement et que

$$\sup(E + F) = \sup E + \sup F.$$

Solution.
Quel que soit $z \in E + F$, on a $z = x + y \leq \sup E + \sup F$ donc

$$\sup(E + F) \leq \sup E + \sup F.$$

Réciproquement, quels que soient $x \in E$ et $y \in F$, $x + y \in E + F$ donc $x + y \leq \sup(E + F)$ c'est-à-dire que $x \leq \sup(E + F) - y$ et par suite

$$\sup E \leq \sup(E + F) - y.$$

D'où $y \leq \sup(E + F) - \sup E$ pour tout $y \in F$ et

$$\sup F \leq \sup(E + F) - \sup E.$$

18. Montrer que, quels que soient $x, y \in \mathbb{R}$, $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

    Solution.

    On a $|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$ et $|y| = |y - x + x| \leq |x - y| + |x|$ de telle sorte que $\pm(|x| - |y|) \leq |x - y|$.

19. Soit $a < b$. Montrer que l'inégalité $|x - a| < |x - b|$ est équivalente à l'inégalité $x < (a + b)/2$.

    Solution.

    Si $x \leq a$, $|x-a| < |x-b|$ si et seulement si $a-x < b-x$ si et seulement si $a < b$: les deux inégalités sont satisfaites.

    Si $a < x < b$, $|x - a| < |x - b|$ si et seulement si $x - a < b - x$ si et seulement si $x < (a + b)/2$.

    Si $x \geq b$, $|x-a| < |x-b|$ si et seulement si $x-a < x-b$ si et seulement si $a > b$: aucune des deux inégalités n'est satisfaite.

20. Vérifier les relations suivantes :

$$\sup\{a, b\} = \frac{(a + b) + |a - b|}{2} \ , \ \inf\{a, b\} = \frac{(a + b) - |a - b|}{2}.$$

    Solution.

    Si $a \geq b$,

$$\sup\{a, b\} = a = \frac{(a + b) + (a - b)}{2} = \frac{(a + b) + |a - b|}{2}$$

    et

$$\inf\{a, b\} = b = \frac{(a + b) - (a - b)}{2} = \frac{(a + b) - |a - b|}{2}.$$

    Si $a < b$,

$$\sup\{a, b\} = b = \frac{(a + b) + (b - a)}{2} = \frac{(a + b) + |a - b|}{2}$$

    et

$$\inf\{a, b\} = a = \frac{(a + b) - (b - a)}{2} = \frac{(a + b) - |a - b|}{2}.$$

3 NOMBRES IRRATIONNELS

1. Montrer que l'énoncé suivant est équivalent au principe d'induction : *Soit $E \subseteq \mathbb{N}$ un ensemble tel que $1 \in E$ et tel que $n \in E$ dès que $1, 2, \ldots, n-1 \in E$. Alors $E = \mathbb{N}$.*
   Solution.
   L'énoncé entraîne trivialement le principe d'induction : si $n \in E$ dès que $n-1 \in E$, alors $n \in E$ dès que $1, 2, \ldots, n-1 \in E$ et donc $E = \mathbb{N}$. Réciproquement, si $1 \in E$ et $n \in E$ dès que $1, 2, \ldots, n-1 \in E$, soit
   $$F = \{k \mid 1, 2, \ldots, k \in E\}.$$
   Alors $1 \in F$ et $k \in F$ implique $k+1 \in F$. Donc $F = \mathbb{N}$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$
   Solution.
   Par récurrence sur n. La formule est triviale si $n = 1$. En supposant que
   $$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{(n-1)n}{2},$$
   on a
   $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{(n-1)n}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
   Solution.
   Par récurrence sur n. La formule est triviale si $n = 1$. En supposant que
   $$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6},$$
   on a
   $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2.$$

Solution.
Il s'agit de montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Par récurrence sur n. L'égalité est triviale si $n = 1$. Supposant que

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^3 = \frac{(n-1)^2 n^2}{4},$$

on aura

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = n^3 + \frac{(n-1)^2 n^2}{4} = \frac{n^2(4n + (n-1)^2)}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

quel que soit $x \geq -1$.
Solution.
Par récurrence sur n. L'inégalité est triviale si $n = 1$. Supposant que

$$(1+x)^{n-1} > 1 + (n-1)x$$

quel que soit $x > -1$, on aura pour les mêmes valeurs de x que

$$(1+x)^n = (1+x)^{n-1}(1+x) > (1+(n-1)x)(1+x) = 1+nx+(n-1)x^2 > 1+nx.$$

(Inégalité de Bernoulli. Le théorème du binôme ne donne l'inégalité que pour $x > 0$.)

6. Montrer que si, pour $1 \leq k \leq n$, $0 < a_k < b_k < 1$ et $b_k - a_k < c$, alors

$$b_1 b_2 \cdots b_n - a_1 a_2 \cdots a_n < nc.$$

Solution.

Par récurrence sur n. L'inégalité est triviale si $n = 1$. Supposant que

$$b_1 b_2 \cdots b_{n-1} - a_1 a_2 \cdots a_{n-1} < (n-1)c,$$

on aura

$$\begin{gathered} b_1 b_2 \cdots b_n - a_1 a_2 \cdots a_n \\ = b_1 b_2 \cdots b_{n-1}(b_n - a_n) + (b_1 b_2 \cdots b_{n-1} - a_1 a_2 \cdots a_{n-1}) a_n \\ < (b_n - a_n) + (b_1 b_2 \cdots b_{n-1} - a_1 a_2 \cdots a_{n-1}) < c + (n-1)c = nc. \end{gathered}$$

7. Montrer que si $n \geq 4$,

$$n^2 \leq 2^n.$$

Solution.

Par récurrence sur n. L'inégalité est vraie si $n = 1, 2$ mais fausse si $n = 3$. Elle est vraie si $n = 4$ et en supposant que

$$(n-1)^2 \leq 2^{n-1} \text{ et que } n - 1 \geq 4,$$

on aura

$$\begin{aligned} n^2 = (n-1+1)^2 = (n-1)^2 + 2(n-1) + 1 &\leq 2^{n-1} + 2 \cdot 2^{n-3} + 1 \\ &\leq 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-2} = 2^n. \end{aligned}$$

8. Montrer, par récurrence sur n, la proposition suivante :

$$\mathsf{P}_n : \text{Pour } \; k = 0, 1, \ldots, n \; , \; \binom{n}{k} \in \mathbb{N}.$$

Solution.

La proposition P_1 est triviale. Supposant que P_{n-1} est vraie, les relations

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

montrent que les nombres $\binom{n}{k}$ sont des entiers si $1 \leq k \leq n-1$. Évidemment, $\binom{n}{0}$ et $\binom{n}{n}$ sont des entiers.

9. Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}, \quad \sum_{k \text{ pair}} \binom{n}{k} x^k.$$

Solution.
On utilise le théorème du binôme. Avec $a = b = 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Avec $a = -1, b = 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

Avec $a = x, b = 1$ puis avec $a = -x, b = 1$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$$

et

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k x^k = (1-x)^n.$$

En additionnant,

$$\sum_{k \text{ pair}} \binom{n}{k} x^k = \frac{1}{2}((1+x)^n + (1-x)^n).$$

10. Soient $p, q \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\binom{p+q}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} \binom{q}{n-k}$$

pour tout $0 \leq n \leq p+q$.
Solution.
On a $(1+x)^{p+q} = (1+x)^p(1+x)^q$. En vertu du théorème du binôme,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{p+q} \binom{p+q}{n} x^n &= \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} x^i \sum_{j=0}^{q} \binom{q}{j} x^j \\ &= \sum_{n=0}^{p+q} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} \binom{q}{n-k} \right) x^n\end{aligned}$$

pour tout x. Mais, si

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_N x^N = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_N x^N = B(x)$$

pour tout x, il faut que $(x = 0)$ $a_0 = b_0$ puis (considérant $(A(x) - a_0)/x$ et $(B(x) - b_0)/x$) il faut que $a_1 = b_1$, etc...

11. Montrer que si $a \neq 0$ et $b^2 - 4ac > 0$, l'équation quadratique en x

$$ax^2 + bx + c = 0$$

admet deux solutions.

Solution.

La relation

$$ax^2 + bx + c = 0$$

est équivalente à la relation

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

ou encore à

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}.$$

Le membre de droite de cette équation étant strictement positif, elle implique

$$\pm\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \left(-\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}\right)^{1/2}$$

c'est-à-dire

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

la formule de Viète habituelle.

12. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a > b > 0$ implique $a^{1/n} > b^{1/n}$.

Solution.

Si l'on avait $a^{1/n} \leq b^{1/n}$, on en déduirait $a \leq b$ en multipliant l'inégalité précédente par elle-même n fois.

13. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $(n > 1)$, $0 < a < 1$ implique $a^{1/n} > a$ alors que $a > 1$ implique $a^{1/n} < a$.

Solution.

Si l'on avait $a^{1/n} \leq a$ dans le premier cas, on en déduirait $a \leq a^n$ donc $1 \leq a^{n-1}$ et $1 \leq a$ et si l'on avait $a^{1/n} \geq a$ dans le second, $a \geq a^n$ d'abord, $1 \geq a^{n-1}$ ensuite, $1 \geq a$ enfin.

14. Montrer que

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots a_{n-1}a_n + a_na_1 \leq a_1^2 + a_2^2 + \cdots a_n^2.$$

Solution.

On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz sous la forme

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{1/2}$$

avec

$$b_1 = a_2, b_2 = a_3, \ldots, b_{n-1} = a_n, b_n = a_1$$

de telle sorte que

$$\sum_{k=1}^{n} b_k^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

15. Déduire « l'inégalité du triangle » de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{1/2}.$$

Solution.
On a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{1/2}.$$

D'où

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 &= \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{1/2} + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \\
&= \left(\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{1/2}\right)^2.
\end{aligned}$$

16. Montrer que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.
Solution.
Tout entier $n \in \mathbb{N}$ est de la forme $3m$ ou $3m+1$ ou $3m+2$ avec $m \geq 0$.
Si $\sqrt{3}$ était rationnel, on pourrait l'écrire sous la forme

$$\sqrt{3} = \frac{p}{q}$$

$p, q \in \mathbb{N}$ n'étant pas tous les deux de la forme $3m$. Comme l'on aurait $p^2 = 3q^2$, il faudrait que p soit de la forme $3m$ lui aussi (théorème du binôme). Alors on aurait $q^2 = 3m^2$ donc q serait de la forme $3m$ également !

17. Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.
    Solution.
    On a
    $$\sqrt{3} - \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}.$$
    Si $\sqrt{2} + \sqrt{3} = r$ était rationnel, on aurait
    $$\sqrt{3} = \sqrt{2} + \frac{1}{r}$$
    donc
    $$3 = 2 + 2\frac{1}{r}\sqrt{2} + \frac{1}{r^2}$$
    et $\sqrt{2}$ serait rationnel !
18. Montrer que $(a + b\sqrt{2})^n \notin \mathbb{Q}$ quels que soient $a, b, n \in \mathbb{N}$.
    Solution.
    Le nombre $a + b\sqrt{2}$ est lui-même irrationnel. En vertu du théorème du binôme,
    $$(a + b\sqrt{2})^n = \sum_{k \text{ pair}} \binom{n}{k} a^{n-k} (b\sqrt{2})^k + \sum_{k \text{ impair}} \binom{n}{k} a^{n-k} (b\sqrt{2})^k$$
    $$= \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2j} \; a^{n-2j} \; b^{2j} \; 2^j + \sum_{j=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{2j+1} \; a^{2j+1} \; b^{2j+1} \; 2^j \; \sqrt{2} = A + B\sqrt{2}.$$
19. Montrer que, lorsque n est impair, quelque soit $a \in \mathbb{R}$, il existe un et un seul nombre $b \in \mathbb{R}$ tel que $b^n = a$.
    Solution.
    Lorsque a est strictement négatif,
    $$a = -\alpha = (-1)^n \beta^n = (-\beta)^n = b^n.$$
20. Montrer que $\sqrt[3]{-3} \notin \mathbb{Q}$.
    Solution.
    Puisque $\sqrt[3]{-3} = -\sqrt[3]{3}$, il s'agit de montrer que $\sqrt[3]{3}$ est irrationnel. La démonstation est semblable à celle de l'irrationnalité de $\sqrt{3}$.

4 SUITES NUMÉRIQUES

1. Pour chacune des suites suivantes, vérifier à partir de la définition de limite que
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 1;$$
$$a_n = \frac{n}{n+1};\ a_n = \frac{n+\sqrt{n}}{n+1};\ a_n = \frac{n+(-1)^n}{n+1}.$$
Solution.
On a
$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \epsilon$$
dès que $n > 1/\epsilon$;
$$\left|\frac{n+\sqrt{n}}{n+1} - 1\right| = \frac{\sqrt{n}-1}{n+1} < \frac{\sqrt{n}}{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n}+1/\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} < \epsilon$$
pourvu que $n > 1/\epsilon^2$;
$$\left|\frac{n+(-1)^n}{n} - 1\right| = \frac{1}{n} < \epsilon$$
si $n > 1/\epsilon$.

2. Montrer, à partir de la définition de limite, que
–
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3\sqrt{n}}{4\sqrt{n}+5} = \frac{3}{4};$$
–
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2n^2-100} = \frac{1}{2};$$
–
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{an}{bn+1} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0);$$
–
$$\lim_{n\to+\infty} 2^{n/(n+1)} = 2.$$
Solution.
– On a
$$\left|\frac{3\sqrt{n}}{4\sqrt{n}+5} - \frac{3}{4}\right| = \frac{15}{4(4\sqrt{n}+5)} < \epsilon$$

dès que

$$n > \left(\frac{15-20\epsilon}{16\epsilon}\right)^2.$$

– On a

$$\left|\frac{n^2}{2n^2-100} - \frac{1}{2}\right| = \frac{50}{|2n^2-100|} < \epsilon$$

dès que

$$n > \sqrt{\frac{25+50\epsilon}{\epsilon}}.$$

– On peut évidemment supposer que $a \neq 0$. On a

$$\left|\frac{an}{bn+1} - \frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b||bn+1|} < \epsilon$$

dès que

$$n > \frac{1}{|b|}\left(1 + \frac{|a|}{|b|\epsilon}\right).$$

– On a

$$|2^{n/(n+1)} - 2| = 2^{n/(n+1)}(2^{1/(n+1)} - 1) \leq 2(2^{1/(n+1)} - 1).$$

On aura donc

$$|2^{n/(n+1)} - 2| < \epsilon$$

dès que

$$2 < \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right)^{n+1} = 1 + (n+1)\frac{\epsilon}{2} + \cdots$$

c'est-à-dire dès que

$$n > \frac{2}{\epsilon} - 1.$$

3. Montrer que si la suite $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge, la suite $\{|a_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi et

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n| = |\lim_{n\to+\infty} a_n|.$$

Solution.
Il suffit de choisir $a = \lim_{n\to+\infty} a_n$ dans $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$.

4. Montrer que si $a_n \leq b_n \leq c_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = L$, alors $\lim_{n\to+\infty} b_n = L$.

   Solution.

   On a $b_n - L \leq c_n - L \leq |c_n - L|$ et $-b_n + L \leq -a_n + L \leq |a_n - L|$. Par conséquent,
$$|b_n - L| \leq \sup\{|a_n - L|, |c_n - L|\}.$$
   Si $n > n_\epsilon$ implique $|a_n - L| < \epsilon$ et si $n > m_\epsilon$ implique $|c_n - L| < \epsilon$, on aura $|b_n - L| < \epsilon$ dès que $n > \sup\{n_\epsilon, m_\epsilon\}$.

5. Pour chacune des suites suivantes, utiliser les règles du calcul des limites pour évaluer
$$\lim_{n\to+\infty} a_n;$$
$$a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+2}};\ a_n = \sqrt[3]{\frac{(-1)^n n}{(-1)^{n+1}n+1}};\ a_n = \frac{(n+5)(n+7)}{n^2+n+35}.$$
   Solution.

   On a
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+2/n^2}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1,$$
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[3]{\frac{(-1)^n n}{(-1)^{n+1}n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[3]{\frac{-1}{1+(-1)^{n+1}/n}} = \sqrt[3]{-1} = -1,$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+5)(n+7)}{n^2+n+35} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(1+5/n)(1+7/n)}{1+1/n+35/n^2} = 1.$$

6. Calculer
   –
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n}+\sqrt[n]{2}};$$
   –
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} \quad (a > 0, b > 0);$$
   –
$$\lim_{n\to+\infty} (\sqrt[k]{n+p} - \sqrt[k]{n}) \quad (k, p \in \mathbb{N});$$
   –
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2^n}.$$

(Justifier son calcul).
Solution.
– On a
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n}+\sqrt[n]{2}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$
– On peut supposer $a \neq b$. Si $a > b$, on a
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-(b/a)^n}{1+(b/a)^n} = 1.$$
Si $a < b$,
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(a/b)^n - 1}{(a/b)^n + 1} = -1.$$
– On a
$$\begin{aligned} &\sqrt[k]{n+p} - \sqrt[k]{n} \\ &= \frac{p}{(n+p)^{(k-1)/k} + (n+p)^{(k-2)/k} n^{1/k} + \cdots + n^{(k-1)/k}} \\ &\leq \frac{p}{kn^{(k-1)/k}} \end{aligned}$$
de telle sorte que
$$\lim_{n\to+\infty} (\sqrt[k]{n+p} - \sqrt[k]{n}) = 0.$$
– On a
$$2^n = (1+1)^n = 1+n+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}+\cdots \geq \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$
de telle sorte que
$$0 \leq \frac{n^2}{2^n} \leq \frac{6n}{(n-1)(n-2)}$$
et
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0.$$

7. Montrer que $a_n \to a > 0$ et $b_n \to +\infty$ impliquent $a_n b_n \to +\infty$ et que $a_n \to a < 0$ et $b_n \to +\infty$ impliquent $a_n b_n \to -\infty$.
Solution.

Soit $M > 0$. Si $a > 0$, soit n_1 tel que $n > n_1$ implique $|a_n - a| < a/2$ et soit n_M tel que $n > n_M$ implique $b_n > 2M/a$. Soit $m_M = \sup\{n_1, n_M\}$. Alors, si $n > m_M$,

$$a_n b_n > \frac{a}{2}\frac{2M}{a} = M.$$

Si $a < 0$, on a $-(-a_n b_n) < -M$ dès que n est assez grand.

8. Montrer par des exemples appropriés qu'il est impossible d'attribuer un sens à une limite de la forme $0 \cdot +\infty$.

   Solution.

   Si $a_n = 1/n$ et $b_n = n^2$, n ou $\sqrt{n}$, $a_n b_n$ tend vers $+\infty$, 1 ou 0 respectivement. Si $a_n = (-1)^n/n$ et $b_n = n^2$ ou n, la suite des produits $a_n b_n$ n'admet pas de limite.

9. Soit $\{[a_n, b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'intervalles fermés bornés emboîtés, c'est-à-dire tels que $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et dont les longueurs $b_n - a_n$ tendent vers 0. Montrer que leur intersection

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$$

   se réduit à un point.

   Solution.

   La suite des extrémités gauches $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et bornée donc convergente, celle des extrémités droites $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et bornée donc convergente. On a

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) + \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} a_n.$$

   Si $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$, il faut que $\lim_{n\to+\infty} a_n \leq x \leq \lim_{n\to+\infty} b_n$.

10. Soient $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'intervalles ouverts dont la réunion recouvre l'intervalle fermé borné $[a, b]$:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \supseteq [a, b].$$

    Montrer qu'il existe un entier N tel que la réunion des N premiers intervalles recouvre déjà $[a, b]$:

$$\bigcup_{n=1}^{N} I_n \supseteq [a, b].$$

(Théorème de Borel-Lebesgue. Suggestion : supposant le contraire, obtenir une suite d'intervalles emboîtés dont les longueurs décroissent vers 0 et qui ne peuvent jamais être recouverts par un nombre fini des intervalles donnés.)

Solution.

Supposant le contraire, l'un au moins des deux intervalles $[a, (a+b)/2]$, $[(a+b)/2, b]$ ne pourrait être recouvert par un nombre fini des intervalles donnés. Donc, l'un au moins des quatre intervalles $[a, (3a+b)/4]$, $[(3a+b)/4, (a+b)/2]$, $[(a+b)/2, (a+3b)/4]$, $[(a+3b)/4, b]$ ne pourrait l'être, etc ... On obtient ainsi une suite d'intervalle fermés bornés emboîtés J_k, la longueur de J_k étant $(b-a)/2^k$. Soit x le point commun à tous les J_k. Il est la limite des extrémités gauches et des extrémités droites des J_k. Comme $x \in [a, b]$, il existe un intervalle ouvert I_n tel que $x \in I_n$. Mais alors les deux extrémités des intervalles J_k sont dans cet intervalle I_n pour tout k assez grand !

11. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^n = e^2.$$

Solution.

La suite $\{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (cela se vérifie comme dans la démonstration du théorème sur le nombre e) :

$$\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = 3 + \sum_{k=2}^{n} \frac{2^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

$$\leq 3 + \sum_{k=2}^{n} \frac{2^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) + \left(\frac{2}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$= \left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Pour la suite partielle des termes de rang pair, $n = 2m$, on a

$$\lim_{m\to+\infty} \left(\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right)^2 = e^2$$

donc la suite toute entière tend vers e^2.

12. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{2}{3n}\right)^n = e^{2/3}.$$

Solution.
Toute suite partielle d'une suite convergeant vers une limite L converge aussi vers L. Donc
$$\left(1+\frac{2}{3n}\right)^{3n} \to e^2$$
et
$$\left(1+\frac{2}{3n}\right)^{n} \to e^{2/3}.$$

13. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} = e^{-1}.$$

Solution.
On a
$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n-1} \to e^{-1}.$$

14. Soit $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. Vérifier que les suites
$$B_k = \sup\{a_n \mid n \geq k\}$$
et
$$b_k = \inf\{a_n \mid n \geq k\}$$
sont décroissante et croissante respectivement. La limite de nombres B_k est la **limite supérieure** de la suite $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et la limite des nombres b_k est la **limite inférieure** de la suite $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, dénotées respectivement par
$$\limsup_{n\to+\infty} a_n$$
et par
$$\liminf_{n\to+\infty} a_n.$$
Calculer la limite supérieure et la limite inférieure de la suite $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si
$$a_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}.$$

Solution.
Puisque les ensembles $\{a_n \mid n \geq k\}$ décroissent lorsque k croît, leurs bornes supérieures décroissent et leurs bornes inférieures croissent. Pour la suite
$$-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$$

on a $B_k = 1$ et $b_k = -1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1} = 1$$

et

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1} = -1.$$

15. Calculer $\lim_{n\to+\infty} a_n$ lorsque
–
$$a_n = \frac{a_{n-1}}{1+a_{n-1}}\ ,\ a_1 > 0;$$
–
$$a_n = \frac{(a_{n-1}+1)}{2}\ ,\ a_1 = e;$$
–
$$a_n = \frac{(a_{n-1}^2+1)}{2}\ ,\ a_1 = 0.$$
(Justifier son calcul).
Solution.
– On a
$$0 < a_n = \frac{a_{n-1}}{1+a_{n-1}} < a_{n-1}.$$
La suite $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante et bornée, elle converge et en posant $a = \lim_{n\to+\infty} a_n$, il faut que
$$a = \frac{a}{1+a}$$
c'est-à-dire
$$a = 0.$$
– On a $1 < a_2 < a_1$ et, par récurrence sur n,
$$1 < a_n = \frac{a_{n-1}+1}{2} < a_{n-1}.$$
La suite $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante et bornée, elle converge et en posant $a = \lim_{n\to+\infty} a_n$, il faut que
$$a = \frac{a+1}{2}$$
c'est-à-dire
$$a = 1.$$

– On a $a_1 < a_2 < 1$ et, par récurrence sur n,

$$a_{n-1} < a_n = \frac{a_{n-1}^2 + 1}{2} < 1$$

(la première inégalité est équivalente à $(a_{n-1} - 1)^2 > 0$). La suite $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante et bornée, elle converge et en posant $a = \lim_{n\to+\infty} a_n$, il faut que

$$a = \frac{a^2 + 1}{2}$$

c'est-à-dire

$$a = 1.$$

16. Montrer que la suite $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la récurrence d'ordre 2

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2},\ 0 < a_1 < a_2 \ \text{ donnés,}$$

converge vers

$$\frac{a_1 + 2a_2}{3}.$$

(Suggestion : poser $b_n = a_n - a_{n-1}$).
Solution.
Posons $b_n = a_n - a_{n-1}$ de telle sorte que

$$a_n = a_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n.$$

La relation

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$$

équivaut à

$$b_n = -\frac{1}{2} b_{n-1}$$

dont la solution est

$$b_n = \frac{(-1)^{n-2}}{2^{n-2}} b_2.$$

D'où

$$a_n = a_1 + \frac{2}{3} b_2 \left(1 - \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\right)$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{a_1 + 2a_2}{3}.$$

17. Montrer que toute suite de points d'un intervalle fermé borné $[a, b]$ contient une suite partielle convergeant vers un point de $[a, b]$.

Solution.

En vertu du théorème de Bolzano-Weierstrass, une telle suite, étant bornée, contient une suite partielle convergente. L'intervalle étant défini par des inégalités larges et le processus de limite préservant ce type d'inégalités, la limite est encore dans l'intervalle.

18. Soit $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique telle que

$$|a_n - a_{n+1}| < c^n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $0 < c < 1$. Montrer qu'elle converge.

Solution.

On a

$$\begin{aligned}|a_n - a_{n+p}| &\leq |a_n - a_{n+1}| + |a_{n+1} - a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+p-1} - a_{n+p}| \\ &\leq c^n + c^{n+1} + \cdots + c^{n+p} = c^n \frac{1 - c^{p+1}}{1 - c} < \frac{c^n}{1 - c}\end{aligned}$$

ce qui tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$. En vertu du critère de Cauchy, la suite donnée est convergente.

19. La suite des moyennes arithmétiques des termes d'une suite $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$m_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Montrer que la suite $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si la suite $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Solution.

Puisque

$$a_{n+1} \geq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n},$$

on a

$$\begin{aligned}m_{n+1} - m_n &= \frac{n}{n+1}\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} + \frac{a_{n+1}}{n+1} \\ &= -\frac{1}{n+1}\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} + \frac{a_{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{-(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + na_{n+1}}{(n+1)n} \geq 0.\end{aligned}$$

20. Montrer que la suite $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 si la suite $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Solution.

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on peut écrire

$$|m_n| \leq \frac{|a_1 + a_2 + \cdots + a_m|}{n} + \frac{|a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \cdots + |a_n|}{n}.$$

Donné $\epsilon > 0$, choisissons m tel que

$$n > m \text{ implique } |a_n| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Alors, pour tout

$$n > \sup\{m, \frac{2(|a_1 + a_2 + \cdots + a_m|)}{\epsilon},$$

on aura

$$|m_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{n-m}{n}\frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

5 SÉRIES NUMÉRIQUES

1. Déterminer si les séries suivantes sont convergentes et, le cas échéant, calculer leur somme :
   –
   $$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^k};$$
   –
   $$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{1+a}\right)^k;$$
   –
   $$\sum_{k=0}^{+\infty} (1-x^2)^k.$$
   Solution.
   – Il s'agit d'une série géométrique de raison $r = -1/2$. Comme $|r| < 1$, elle converge et sa somme est $2/3$.
   – Série géométrique de raison $r = a/(1+a)$. Elle converge si et seulement si $|a| < |1+a|$, c'est-à-dire si et seulement si $a > -1/2$. Sa somme est alors $1 + a$.
   – Série géométrique de raison $r = (1-x^2)$. Elle converge si et seulement si $|1-x^2| < 1$, c'est-à-dire si et seulement si $x \in]0, \sqrt{2}[\cup]-\sqrt{2}, 0[$. Sa somme est alors $1/x^2$.
2. Soient S_n et S la $n^{ième}$ somme partielle et la somme respectivement de la série géométrique convergente de raison r. Montrer que
   $$|S - S_n| = \frac{|r|^{n+1}}{1-r}.$$
   Solution.
   On a
   $$S - S_n = \frac{1}{1-r} - \frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \frac{r^{n+1}}{1-r}.$$
3. Soient $u_k > 0$ des nombres tels que
   $$\lim_{k\to+\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = L$$
   existe et que $L < 1$. Montrer qu'alors
   $$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k < +\infty$$

(critère de d'Alembert).

Solution.

Soit N tel que $n \geq N$ implique

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{L+1}{2} \quad (< 1).$$

Alors

$$u_{N+j} \leq u_N \left(\frac{L+1}{2}\right)^j$$

pour tout $j \geq 0$ c'est-à-dire que

$$u_k \leq u_N \left(\frac{L+1}{2}\right)^{-N} \left(\frac{L+1}{2}\right)^k$$

pour tout $k \geq N$ et la série donnée est majorée par une série géométrique convergente et est, de ce fait, convergente.

4. Montrer que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} 1/k!$ est convergente et que sa somme est comprise entre 2 et 3.

   Solution.

   On a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = 3.$$

5. Montrer que la série $\sum_{k=1}^{+\infty} 1/k(k+p)$ est convergente et calculer sa somme — $p \in \mathbb{N}$ est donné.

   Solution.

   Puisque

$$\frac{1}{k(k+p)} \leq \frac{1}{k^2},$$

la série est convergente. On a, en utilisant les « fractions partielles » , que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+p)} = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+p}\right)$$

$$= \frac{1}{p} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=p+1}^{p+n} \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{p} \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k}\right) \to \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k}$$

car

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} \leq \frac{p}{n+1} \to 0.$$

6. Déterminer si les séries suivantes sont convergentes et, le cas échéant, calculer leur somme :
   –
   $$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1};$$
   –
   $$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2-1};$$
   –
   $$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$$

   Solution.
   – On a
   $$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$$
   donc la série est divergente.
   – On a
   $$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right)$$
   $$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \to \frac{3}{4}.$$
   – Cette série est convergente car
   $$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} \leq \frac{1}{k^3}.$$
   Écrivant
   $$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} + \frac{C}{k+2}$$
   $$= \frac{(A+B+C)k^2 + (3A+2B+C)k + 2A}{k(k+1)(k+2)},$$

et résolvant $A+B+C=3A+2B+C=0$ et $2A=1$, on obtient la décomposition en fractions partielles suivante

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{2}{k+1}+\frac{1}{k+2}\right)$$

d'où

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}&=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=2}^{n+1}\frac{2}{k}+\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)\to\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

7. Montrer que si $u_k\geq 0$ pour tout $k\in\mathbb{N}_0$, les séries

$$\sum_{k=0}^{+\infty}u_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{u_k}{1+u_k}$$

convergent ou divergent simultanément.
Solution.
On a

$$\frac{u_k}{1+u_k}\leq u_k$$

donc la convergence de $\sum_{k=0}^{+\infty}u_k$ implique celle de $\sum_{k=0}^{+\infty}u_k/(1+u_k)$. Réciproquement, si $\sum_{k=0}^{+\infty}u_k/(1+u_k)$ converge, $u_k/(1+u_k)\to 0$ donc $u_k\to 0$ et, en particulier, il existe $M>0$ tel que $u_k<M$ pour tout $k\in\mathbb{N}_0$. Alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty}u_k\leq\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{u_k}{1+u_k}(1+M)<+\infty.$$

8. Déterminer si les séries suivantes sont convergentes :
–
$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{1+1/k}};$$
–
$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k!}{k^k};$$

–
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k k}{k+1}.$$

Solution.

– Puisque $k^{1/k} \to 1$, il existe $M > 0$ tel que $k^{1/k} < M$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et alors
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{1+1/k}} \geq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\,M} = +\infty.$$

– Puisque
$$\frac{k!}{k^k} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k}{k \cdot k \cdot k \cdots k} \leq \frac{2}{k^2},$$
la série $\sum_{k=0}^{+\infty} k!/k^k$ est convergente.

– La série $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k k/(k+1)$ est divergente car son terme général ne tend pas vers 0.

9. Montrer que la convergence des séries
$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k^2 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} v_k^2$$
entraîne la convergence absolue de la série
$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k v_k.$$

Solution.

En vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz,
$$\sum_{k=0}^{n} |u_k v_k| \leq \sqrt{\sum_{k=0}^{n} u_k^2}\sqrt{\sum_{k=0}^{n} v_k^2} \leq \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} u_k^2}\sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} v_k^2}.$$

10. Soient S_n et S la $n^{ième}$ somme partielle et la somme respectivement de la série alternée convergente
$$v_0 - v_1 + v_2 - v_3 + \cdots$$
où
$$v_0 \geq v_1 \geq v_2 \geq v_3 \geq \cdots \geq 0$$

Montrer que « l'erreur » $S - S_n$ est du même signe $(-1)^{n+1}$ que le premier terme négligé et que

$$|S - S_n| \leq v_{n+1}.$$

Solution.
On a

$$\begin{aligned} S - S_n &= (-1)^{n+1}v_{n+1} + (-1)^{n+2}v_{n+2} + (-1)^{n+3}v_{n+3} + (-1)^{n+4}v_{n+4} + \cdots \\ &= (-1)^{n+1}(v_{n+1} - (v_{n+2} - v_{n+3}) - (v_{n+4} - v_{n+5}) - \cdots) \\ &= (-1)^{n+1}((v_{n+1} - v_{n+2}) + (v_{n+3} - v_{n+4}) + \cdots) \end{aligned}$$

de telle sorte que

$$\begin{aligned} &|S - S_n| = |v_{n+1} - (v_{n+2} - v_{n+3}) - (v_{n+4} - v_{n+5}) - \cdots| \\ &= (v_{n+1} - (v_{n+2} - v_{n+3}) - (v_{n+4} - v_{n+5}) - \cdots) \leq v_{n+1}. \end{aligned}$$

Ainsi l'erreur $S - S_n$ est du même signe $(-1)^{n+1}$ que le premier terme négligé et est inférieure, en valeur absolue, à la valeur absolue de ce terme.

11. Soient u_k des nombres positifs. Montrer que si

$$\prod_{k=0}^{+\infty}(1 + u_k) = \lim_{n\to+\infty}\prod_{k=0}^{n}(1 + u_k)$$

existe, alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Solution.
On a

$$\lim_{n\to+\infty}(1 + u_n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(1 + u_k)}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(1 + u_k)} = 1.$$

12. Calculer

$$\prod_{k=0}^{+\infty}\left(1 + \frac{1}{2^{2^k}}\right).$$

Solution.
Par récurrence sur n,

$$\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^{2^k}}\right)=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{2^n-1}}\right)\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)$$
$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{2^{n+1}-1}}\right).$$

D'où

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^{2^k}}\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k}=2.$$

13. Établir une correspondance biunivoque entre les nombres réels positifs et les développements binaires infinis de la forme

$$\sum_{k=0}^{N}a_k\,2^k+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{b_k}{2^k}$$

où $a_k, b_k \in \{0,1\}$. Calculer le développement binaire de $22/7$.
Solution.
La correspondance s'établit comme dans le cours. Pour l'exemple, on a

$$\frac{1}{7}=\frac{1}{2^3}\frac{1\cdot 7+1}{7}=\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6}\frac{1\cdot 7+1}{7}=\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^9}+\cdots$$

de telle sorte que

$$\frac{22}{7}=2^1+2^0+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^9}+\cdots$$

14. Montrer que $k<2^k$ pour tout $k\in\mathbb{N}$. En déduire que la série

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k}{10^k}$$

est convergente. Sa somme est-elle rationnelle ou irrationnelle ?
Solution.
Par récurrence sur k,

$$k+1<2^k+1<2^k+2=2^{k+1}.$$

On a donc
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{10^k} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{5^k} < +\infty.$$
On a
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10^k} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{10^k} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{10^k} + \cdots + \frac{1}{10^n}$$
$$= \frac{1}{10} \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}} + \frac{1}{100} \frac{1 - \frac{1}{10^{n-1}}}{1 - \frac{1}{10}} + \frac{1}{1000} \frac{1 - \frac{1}{10^{n-2}}}{1 - \frac{1}{10}} + \cdots + \frac{1}{10^n} \frac{1 - \frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}}$$
$$= \frac{10}{9} \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{10^{n+1}} + \frac{1}{100} - \frac{1}{10^{n+1}} + \frac{1}{1000} - \frac{1}{10^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{10^n} - \frac{1}{10^{n+1}} \right)$$
$$= \frac{10}{9} \left(\frac{1}{10} \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}} - \frac{n}{10^n} \right) \to \frac{10}{81}.$$
La somme est rationnelle (il ne s'agit *pas* d'un développement décimal).

15. Montrer que l'ensemble des nombres algébriques de degré deux, c'est-à-dire l'ensemble des nombres qui satisfont une équation du type
$$ax^2 + bx + c = 0$$
avec $a, b, c \in \mathbb{Z}$, est dénombrable.
Solution.
Les équations en question sont dénombrables parce que $\mathbb{Z}$ est dénombrable. Puisque chacune d'elle admet au plus deux racines, ces racines sont elles aussi dénombrables.

6 FONCTIONS CONTINUES

1. Soient $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ et $x_0 \in]a,b[$. Montrer que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

si et seulement si

$$\lim_{x\to x_0,\ x<x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0-} f(x) = L$$

(lire : f tend vers L par la gauche en x_0) et

$$\lim_{x\to x_0,\ x>x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0+} f(x) = L$$

(lire : f tend vers L par la droite en x_0).
Solution.
Si

$$\lim_{x\to x_0,\ x<x_0} f(x) = L,$$

à chaque $\epsilon > 0$ correspond $\delta_- > 0$ tel que $0 < x_0 - x < \delta_-$ et $x \in]a,b[$ impliquent $|f(x) - L| < \epsilon$ et si

$$\lim_{x\to x_0,\ x>x_0} f(x) = L,$$

à chaque $\epsilon > 0$ correspond $\delta_+ > 0$ tel que $0 < x - x_0 < \delta_+$ et $x \in]a,b[$ impliquent $|f(x) - L| < \epsilon$. Si $\delta = \inf\{\delta_-, \delta_+\}$, $0 < |x - x_0| < \delta$ et $x \in]a,b[$ impliquent donc $|f(x) - L| < \epsilon$.
Réciproquement,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

entraîne bien évidemment

$$\lim_{x\to x_0,\ x<x_0} f(x) = L$$

et

$$\lim_{x\to x_0,\ x>x_0} f(x) = L.$$

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = L \text{ si et seulement si } \lim_{x\to 0+} f\left(\frac{1}{x}\right) = L.$$

Solution.
On a simplement

$$|f(x) - L| < \epsilon \quad \text{pour} \quad x > M > 0$$

si et seulement si

$$\left| f\left(\frac{1}{y}\right) - L \right| < \epsilon \quad \text{pour} \quad 0 < y < \frac{1}{M}.$$

3. Soient $f, g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ des fonctions telles que

$$\lim_{x \to 0} f(x) = L \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} g(x) = +\infty.$$

Montrer que dans ce cas

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Solution.
Donné $\epsilon > 0$, soit $\delta_f > 0$ tel que $0 < x < \delta_f$ implique $|f(x) - L| < 1$, donc que $|f(x)| < |L| + 1$ et soit $\delta_g > 0$ tel que $0 < x < \delta_g$ implique $g(x) > (|L| + 1)/\epsilon$. Alors si $0 < x < \inf\{\delta_f, \delta_g\}$, on a

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \frac{(|L| + 1)\,\epsilon}{(|L| + 1)} = \epsilon.$$

4. On considère la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}.$$

Vérifier qu'elle est continue et calculer (si possible)

$$\lim_{x \to 0} f(x).$$

Solution.
La fonction est continue sur $]0, +\infty[$ comme étant composée de fonctions continues strictement positives sur cet intervalle au moyen des opérations de l'arithmétique et de l'extraction de racines. On a

$$\frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}} = \frac{x^{3/4} + x^{1/4}}{x^{1/12} + 1} \to 0$$

lorsque $x \to 0$.

5. Montrer que l'enveloppe supérieure $\sup\{f, g\}$ et l'enveloppe inférieure $\inf\{f, g\}$ de deux fonctions continues $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ sont continues.
Solution.
On a
$$\sup\{f, g\} = \frac{(f + g) + |f - g|}{2}$$
et
$$\inf\{f, g\} = \frac{(f + g) - |f - g|}{2}.$$
6. Déterminer l'ensemble des points x où la fonction $x \mapsto x\,\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x)$ est continue.
Solution.
La fonction est continue au point $x_0 = 0$ puisque
$$|x\,\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x)| \leq |x|$$
et seulement en ce point puisque si elle était continue en $x_0 \neq 0$, la fonction
$$\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x) = \frac{x\,\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x)}{x}$$
l'y serait aussi.
7. Montrer que toute fonction rationnelle peut s'écrire comme la somme d'un polynôme et d'une fonction rationnelle dans laquelle le degré du numérateur est strictement plus petit que le degré du dénominateur.
Solution.
Soit
$$R_{n,m} = \frac{P_n}{Q_m},$$
P_n étant un polynôme de degré n et Q_m, un polynôme de degré m. Si $n \geq m$, on peut diviser P_n par Q_m,
$$P_n = Q_m D_{n-m} + R_k,$$
où R_k est un polynôme de degré $k < m$ et écrire
$$R_{n,m} = D_{n-m} + \frac{R_k}{Q_m}.$$
8. Montrer qu'une équation rationnelle,
$$\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m} = a,$$

admet au plus $\sup\{n, m\}$ solutions.
Solution.
L'équation en question peut être réécrite sous la forme

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = a(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m)$$

qui est une équation polynomiale de degré au plus $\sup\{n, m\}$.

9. Montrer que l'ensemble des nombres algébriques, c'est-à-dire l'ensemble des nombres qui satisfont une équation du type

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0$$

avec $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$, est dénombrable.
Solution.
Pour chaque n, l'ensemble des équations possibles est dénombrable et chacune d'elle admet au plus n racines.

10. Diviser le polynôme $x^6 + 2x^2 - x - 4$ par le polynôme $x^3 - x + 1$.
Solution.

$$\begin{gathered} x^6 + 2x^2 - x - 4 = (x^3 - x + 1)x^3 - x^3(-x + 1) + 2x^2 - x - 4 \\ = (x^3 - x + 1)x^3 + (x^3 - x + 1)x - x(-x + 1) - x^3 + 2x^2 - x - 4 \\ = (x^3 - x + 1)(x^3 + x) - (x^3 - x + 1) + (-x + 1) + 3x^2 - 2x - 4 \\ = (x^3 - x + 1)(x^3 + x - 1) + 3x^2 - 3x - 3 \end{gathered}$$

11. Factoriser le polynôme $x^7 - 4x^6 + 5x^5 - 2x^4 + x^3 - 4x^2 + 5x - 2$.
Solution.
Soit $P_7(x) = x^7 - 4x^6 + 5x^5 - 2x^4 + x^3 - 4x^2 + 5x - 2$. Puisque $P_7(1) = 0$,

$$P_7(x) = (x - 1)(x^6 - 3x^5 + 2x^4 + x^2 - 3x - 2) = (x - 1)D_6(x).$$

Comme $D_6(1) = 0$,

$$P_7(x) = (x - 1)^2(x^5 - 2x^4 + x - 2) = (x - 1)^2D_5(x).$$

Puisque $D_5(1) \neq 0$ et que $D_5(2) = 0$,

$$P_7(x) = (x - 1)^2(x - 2)(x^4 + 1).$$

12. Déterminer le polynôme de degré minimal qui passe par les points $(0,1)$, $(1,-1)$, $(2,1)$ et $(3,-1)$.
Solution.
Un polynôme de degré au plus 3 suffira.

$$P_3(x) = 1 \cdot L_1(x) - 1 \cdot L_2(x) + 1 \cdot L_3(x) - 1 \cdot L_4(x)$$

où

$$L_1(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{-1 \cdot -2 \cdot -3} = -\frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3),$$

$$L_2(x) = \frac{x(x-2)(x-3)}{1 \cdot -1 \cdot -2} = \frac{1}{2}x(x-2)(x-3),$$

$$L_3(x) = \frac{x(x-1)(x-3)}{2 \cdot 1 \cdot -1} = -\frac{1}{2}x(x-1)(x-3)$$

et

$$L_4(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1}{6}x(x-1)(x-2)$$

donc

$$P_3(x) = -\frac{4}{3}x^3 + 6x^2 - \frac{20}{3}x + 1.$$

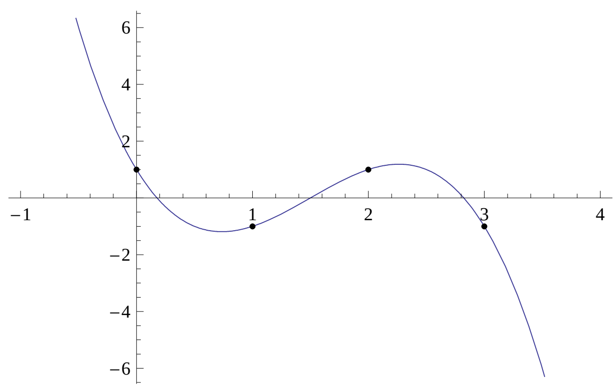

FIG. 1 – Un polynôme d'interpolation

13. Déterminer le polynôme de degré au plus 3, P_3, qui coïncide avec la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ aux points $1/2, 3/2, 5/2, 7/2$.
Solution.
On veut

$$P_3\left(x + \frac{1}{2}\right) = \left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}$$

pour $x = 0, 1, 2, 3$. Il suffit donc de prendre

$$P_3(x) = x - \frac{1}{2}.$$

14. Soient $x_1 < x_2 < x_3$. Déterminer une fonction spline

$$S(x) = A_0 + A_1(x - x_1)_+ + A_2(x - x_2)_+ + A_3(x - x_3)_+$$

qui s'annule si $x \notin [x_1, x_3]$ et prend la valeur 1 au point x_2.
Solution.
Si $x < x_1$, $S(x) = A_0 = 0$ implique $A_0 = 0$.
Si $x > x_3$, $S(x) = (A_1 + A_2 + A_3)x - (A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3) \equiv 0$ implique $A_1 + A_2 + A_3 = 0$ et $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 = 0$.
Enfin, $S(x_2) = A_1(x_2 - x_1) = 1$ implique $A_1 = 1/(x_2 - x_1)$.
D'où

$$S(x) = \frac{(x_3 - x_2)(x - x_1)_+ - (x_3 - x_1)(x - x_2)_+ + (x_2 - x_1)(x - x_3)_+}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

15. Soient $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ et $y_1, y_2, \ldots, y_n$ quelconques. Montrer qu'il existe une et une seule fonction spline

$$S(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k(x - x_k)_+$$

qui est bornée et qui prend les valeurs y_k aux noeuds x_k.
Solution.
On a

$$\begin{gathered}
A_0 = y_1 \\
A_0 + A_1(x_2 - x_1) = y_2 \\
A_0 + A_1(x_3 - x_1) + A_2(x_3 - x_2) = y_3 \\
\cdots \\
A_0 + A_1(x_n - x_1) + \cdots + A_{n-1}(x_n - x_{n-1}) = y_n
\end{gathered}$$

ce qui détermine uniquement $A_0, A_1, \cdots, A_{n-1}$. Le coefficient A_n quant à lui est déterminé par la condition

$$A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-1} + A_n = 0$$

qui traduit le fait que pour rester bornée, la fonction doit avoir une pente nulle pour $x > x_n$.

7 PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS CONTINUES

1. Montrer que l'intersection de deux ensembles ouvert est un ensemble ouvert.

   Solution.

   Soient E_1 et E_2 deux ensembles ouverts et $x_0 \in E_1 \cap E_2$. Il existe $\delta_1 > 0$ et $\delta_2 > 0$ tels que $]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1[\subseteq E_1$ et que $]x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2[\subseteq E_2$. Posant $\delta = \inf\{\delta_1, \delta_2\}$, on a

   $$]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subseteq E_1 \cap E_2.$$

2. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues qui coïncident sur les nombres rationnels. Montrer qu'elles coïncident partout.

   Solution.

   La fonction $f - g$ est continue et s'annule sur les rationnels. Tout nombre étant une limite de nombres rationnels, elle s'annule partout. Ou encore : si l'on avait $f(x_0) - g(x_0) > 0$, on aurait $f(x) - g(x) > 0$ dans un intervalle ouvert centré en x_0 ce qui est impossible puisqu'un tel intervalle contient des nombres rationnels. De façon similaire, l'inégalité $f(x_0) - g(x_0) < 0$ est impossible.

3. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et x_0 un point où $f(x_0) > g(x_0)$. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert centré en x_0 dans lequel f est strictement plus grande que g.

   Solution.

   La fonction $f - g$ est continue et strictement positive en x_0 ; elle doit rester strictement positive dans un intervalle ouvert centré en x_0.

4. Déterminer toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui ne prennent que des valeurs rationnelles.

   Solution.

   Ces fonctions sont des constantes car si l'intervalle $f(\mathbb{R})$ n'est pas réduit à un point, il contient des nombres irrationnels.

5. Montrer que l'équation polynomiale $x^n + x + 1 = e$ admet exactement une solution dans l'intervalle $]0, 1[$.

   Solution.

   Le polynôme $P_n(x) = x^n + x + 1 - e$ est strictement négatif si $x = 0$ et strictement positif si $x = 1$. Il admet donc au moins un zéro dans $]0, 1[$. Il n'y en a qu'un parce que P_n est strictement croissant sur $[0, +\infty[$.

6. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. Montrer que son graphe G_f coupe la droite d'équation $y = x$.

   Solution.

   La fonction continue $f(x) - x$ est positive si $x = 0$ et négative si $x = 1$. Si ces deux inégalités sont strictes, elle admet au moins un zéro dans l'intervalle $]0, 1[$.

7. Montrer que l'équation $x^3 + px + q = 0$ admet exactement une racine si $p > 0$.

   Solution.

   L'équation admet au moins une racine parce qu'elle est de degré impair. Elle en admet exactement une parce que la fonction $x \mapsto x^3 + px + q$ est strictement croissante :

$$x_1^3 + px_1 + q - x_2^3 - px_2 - q = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + p) = 0$$

   n'a pas de solution si $x_1 \neq x_2$ (équation quadratique en x_1). (Une fonction de type $(x-A)^3$ n'est pas de la forme x^3+px+q avec $p > 0$.)

8. Montrer que l'équation $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ admet exactement une racine si $b - a^2/3 > 0$.

   Solution.

   En posant $x = y - a/3$, l'équation devient

$$y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right) y + \left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c\right) = 0.$$

9. En convenant que 0 est pair, montrer qu'une équation polynomiale de degré n, $P_n(x) = 0$, admet un nombre pair de solutions si n est pair et un nombre impair si n est impair.

   Solution.

   Soit $P_n(x) = 0$ l'équation. Si $n = 1$, elle admet une racine. Si $n = 2$, elle en admet deux ou aucune, donc un nombre pair. Supposons que toute équation de degré plus petit que n satisfait l'énoncé. Si n est impair, on aura au moins une racine donc $P_n = Q_1 R_{n_1}$. Par hypothèse de récurrence, l'équation $R_{n_1}(x) =$ admettra un nombre pair de racines et l'équation $P_n(x) = 0$ en admettra un nombre impair. Si n est pair et si l'équation $P_n(x) =$ admet au moins une racine, on aura encore une décomposition $P_n = Q_1 R_{n_1}$ où R_{n_1} admettra un nombre impair de zéros, donc P_n en aura un nombre pair.

10. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, il existe un point x_n tel que

$$f(x_n) = f\left(x_n + \frac{1}{n}\right).$$

(Suggestion : considérer $g(0) + g(1/n) + g(2/n) + \cdots + g(1 - 1/n)$ avec $g(x) = f(x) - f(x + 1/n)$).

Solution.

On a

$$g(0) + g(1/n) + g(2/n) + \cdots + g(1 - 1/n) = 0.$$

S'il existe k tel que $g(k/n) = 0$ alors on peut prendre $x_n = k/n$. Sinon, il existe k et j tels que

$$g\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{j}{n}\right) < 0.$$

En vertu de la continuité de g, il existe x_n entre k/n et j/n tel que

$$g(x_n) = 0.$$

11. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que quels que soient $a < b$, il existe un nombre $0 < C < 1$ tel que

$$\frac{f^2(x)}{1 + f^2(x)} \leq C \quad \text{si} \quad a \leq x \leq b.$$

Solution.

Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\frac{f^2(x_0)}{1 + f^2(x_0)} < 1.$$

Soit donc $x_0 \in [a, b]$ un point où $f^2(x)/(1 + f^2(x))$ atteint son maximum sur $[a, b]$ et soit C ce maximum. Alors $0 < C < 1$ et

$$\frac{f^2(x)}{1 + f^2(x)} \leq C \quad \text{pour tout} \quad a \leq x \leq b.$$

12. Montrer qu'un polynôme de la forme

$$P_{2n}(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{2n-1} x^{2n-1} - x^{2n}$$

atteint son maximum sur $\mathbb{R}$.

Solution.
On a

$$\lim_{x\to\pm\infty} P_{2n}(x) = \lim_{x\to\pm\infty} -x^{2n}\left(1 - \frac{a_{2n-1}}{x} - \cdots - \frac{a_0}{x^{2n}}\right) = -\infty.$$

Il existe donc $A > 0$ tel que $|x| > A$ implique $P_{2n}(x) < P_{2n}(0)$. Le polynôme atteint son maximum sur l'intervalle $[-A, A]$ et

$$\sup\{P_{2n}(x) \mid -A \leq x \leq A\} = \sup\{P_{2n}(x) \mid -\infty < x < \infty\}.$$

13. Montrer qu'une fonction f de la forme $f(x) = |P_n(x)|$ (P_n étant un polynôme) atteint son minimum sur $\mathbb{R}$.
Solution.
On a

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} |x|^n \left|a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}\right| = +\infty.$$

Il existe donc $A > 0$ tel que $|x| > A$ implique $f(x) > f(0)$. La fonction f atteint son minimum sur l'intervalle $[-A, A]$ et

$$\inf\{f(x) \mid -A \leq x \leq A\} = \inf\{f(x) \mid -\infty < x < \infty\}.$$

14. Montrer que la fonction $f(x) = a + bx^n + 1/x$ atteint son minimum sur l'intervalle $]0, 1]$.
Solution.
On a

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty.$$

Il existe donc $1 > \delta > 0$ tel que $0 < x < \delta$ implique $f(x) > f(1)$. La fonction f atteint son minimum sur l'intervalle $[\delta, 1]$ et

$$\inf\{f(x) \mid \delta \leq x \leq 1\} = \inf\{f(x) \mid 0 < x \leq 1\}.$$

15. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ un point quelconque du plan. Montrer qu'il existe (au moins) un point du graphe G_f de f plus près de (u, v) que tous les autres.(La distance entre (u, v) et (x, y) est $\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}$).
Solution.
La fonction

$$g(x) = \sqrt{(x-u)^2 + (f(x)-v)^2}$$

est continue et

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = +\infty$$

puisque

$$g(x) \geq |x-u|.$$

Il existe donc $A > 0$ tel que $|x| > A$ implique $g(x) > g(0)$. La fonction g atteint son minimum sur l'intervalle $[-A, A]$ et

$$\inf\{g(x) \mid -A \leq x \leq A\} = \inf\{g(x) \mid -\infty < x < \infty\}.$$

16. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$f(x) > ax^2$$

pour un nombre $a > 0$ approprié. Montrer qu'elle atteint son minimum sur $\mathbb{R}$.
Solution.
On a

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty.$$

Il existe donc $A > 0$ tel que $|x| > A$ implique $f(x) > f(0)$. La fonction f atteint son minimum sur l'intervalle $[-A, A]$ et

$$\inf\{f(x) \mid -A \leq x \leq A\} = \inf\{f(x) \mid -\infty < x < \infty\}.$$

17. Vérifier qu'une fonction rationnelle du type

$$R(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

est inversible si et seulement si $ad-bc \neq 0$. Vérifier que son inverse est une fonction rationnelle du même type. Vérifier enfin que la composition de deux fonctions rationnelles de ce type est encore une fonction rationnelle de ce type.
Solution.
On considére le cas générique — celui où $abcd \neq 0$. Si $ad-bc = 0$, $d = bc/a$ et

$$R(x) = \frac{ax+b}{cx+bc/a} = \frac{a}{c}.$$

Si $ad-bc \neq 0$, la relation

$$\frac{ax_1+b}{cx_1+d} = \frac{ax_2+b}{cx_2+d}$$

qui est équivalente à

$$(ad-bc)(x_1-x_2)=0$$

implique $x_1=x_2$ et R est injective, définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-d/c\}$ et l'équation

$$\frac{ax+b}{cx+d}=X$$

admet pour solution

$$x=\frac{-dX+b}{cX-a}$$

quel que soit $X\in\mathbb{R}\setminus\{a/c\}$. On a aussi

$$\frac{a\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}+b}{c\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}+d}=\frac{(a\alpha+b\gamma)x+(a\beta+b\delta)}{(c\alpha+d\gamma)x+(c\beta+d\delta)}$$

et

$$(a\alpha+b\gamma)(c\beta+d\delta)-(a\beta+b\delta)(c\alpha+d\gamma)=(ad-bc)(\alpha\delta-\beta\gamma)\neq 0.$$

18. Montrer que la fonction $f(x)=x\,\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x)+(1-x)\,(1-\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x))$ est injective. Où est-elle continue ? (Justifier sa réponse).
Solution.
On a
$$f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x \text{ est rationnel} \\ 1-x & \text{sinon.}\end{cases}$$
Donc $f(x_1)=f(x_2)$ implique $x_1=x_2$. Si f est continue au point $x=\lim_{n\to+\infty} r_n=\lim_{n\to+\infty} i_n$ avec r_n rationnels et i_n irrationnels, on doit avoir
$$f(x)=x=1-x$$
donc $x=1/2$. La fonction est effectivement continue au point $1/2$ puisque
$$|f(x)-f(1/2)|=|x-1/2|.$$
(figure 2)

19. Montrer que la fonction $f(x)=x+\lfloor x\rfloor,\ x>0$, est inversible. La fonction inverse est-elle continue ? (Justifier sa réponse.)
Solution.

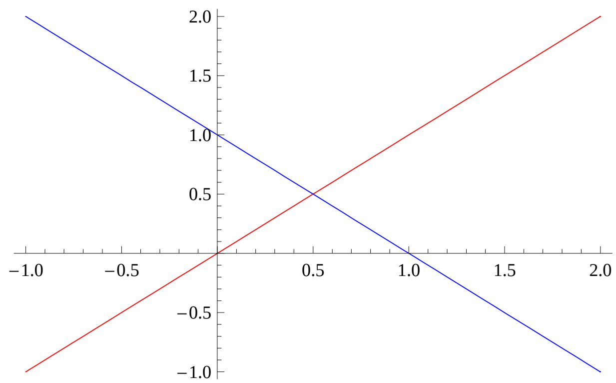

FIG. 2 – La fonction indicatrice

En écrivant que $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$, la relation

$$x_1 + \lfloor x_1 \rfloor = x_2 + \lfloor x_2 \rfloor$$

est équivalente à la relation

$$2(\lfloor x_1 \rfloor - \lfloor x_2 \rfloor) = \{x_2\} - \{x_1\}.$$

Le membre de gauche est un entier relatif, le membre de droite est dans l'intervalle $]-1, 1[$. Ils sont donc nuls tous les deux et la fonction f est injective. Elle est discontinue aux entiers,

$$\lim_{x \to n-} x + \lfloor x \rfloor = 2n - 1 < 2n = \lim_{x \to n+} x + \lfloor x \rfloor,$$

satisfait les relations

$$f(x+1) = f(x) + 2$$

et

$$f(k) = 2k \ , \ k \in \mathbb{N}$$

et elle applique

$$]0,1[\ \cup\ ]1,2[\ \cup\ ]2,3[\ \cup\ \cdots$$

sur

$$E =]0,1[\ \cup\ ]2,3[\ \cup\ ]4,5[\ \cup\ \cdots$$

Si $x + \lfloor x \rfloor = X$, alors $2\lfloor x \rfloor = \lfloor x + \lfloor x \rfloor \rfloor = \lfloor X \rfloor$, $x = X - \lfloor x \rfloor = X - \lfloor X \rfloor / 2$ et la fonction inverse est

$$g(X) = X - \frac{\lfloor X \rfloor}{2}.$$

Cette fonction est définie pour tout $X > 0$, discontinue aux entiers et, sur $f(\ ]0, +\infty[\ )$, on a

$$g(f(x)) = g(x + \lfloor x \rfloor) = x.$$

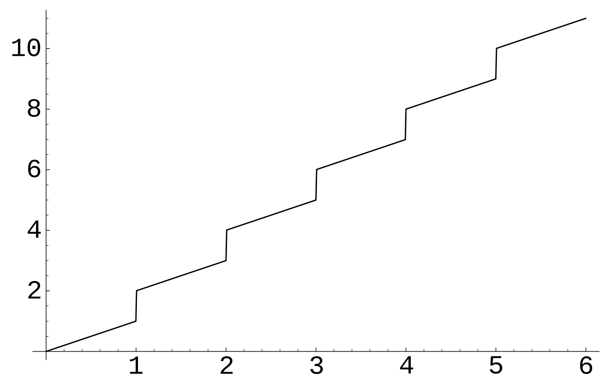

FIG. 3 – La fonction x + $\lfloor x \rfloor$

20. Soit $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Vrai ou faux ? (Justifier sa réponse.)
   – L'image directe d'un intervalle ouvert par f est un intervalle ouvert.
   – L'image directe d'un intervalle fermé par f est un intervalle fermé.
   – L'image directe d'un intervalle borné par f est un intervalle borné.

   Solution.

   - Faux. Considérer une fonction constante.
   - Faux. L'image de $[0, +\infty[$ par la fonction $x \mapsto x/(x + 1)$ est $[0, 1[$.
   - Faux. L'image de $]0, 1]$ par la fonction $x \mapsto 1/x$ est $[1, +\infty[$.

8 FONCTIONS DÉRIVABLES

1. Déterminer a et b pour que la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \; x \geq 1, \\ x^2 + ax + b & \text{si } \; x < 1 \end{cases}$$

soit dérivable au point $x = 1$.
Solution.
Pour que la fonction soit continue, il faut que $f(1-) = 1 + a + b = 1$ et pour qu'elle soit dérivable, il faut en plus que

$$\lim_{x \to 1-} \frac{f(x) - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1-} \frac{x^2 + ax - a - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1-} (x+1+a) = 2+a = 0.$$

D'où $a = -2$ et $b = 2$.

2. Déterminer celles des fonctions suivantes qui sont dérivables : $x \mapsto \operatorname{sgn} x$, $x \mapsto |x|$, $x \mapsto x|x|$.
Solution.
La fonction $x \mapsto \operatorname{sgn} x$ est discontinue donc non dérivable en $x = 0$. La fonction $x \mapsto |x|$ est continue partout mais n'est pas dérivable en $x = 0$. La dérivée par la gauche y est -1, la dérivée par la droite y est +1. La fonction $f(x) = x|x|$ est partout dérivable. Si $x > 0$, $f(x) = x^2$ et $f'(x) = 2x$. Si $x < 0$, $f(x) = -x^2$ et $f'(x) = -2x$. En $x = 0$, on a

$$\lim_{x \to 0-} \frac{f(x)}{x} = 0 = \lim_{x \to 0+} \frac{f(x)}{x}.$$

Donc

$$\frac{d}{dx}(x|x|) = 2|x|.$$

3. Déterminer l'ensemble des points x où la fonction $f(x) = x^2 \, \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x)$ est dérivable.
Solution.
La fonction est dérivable en x_0 si et seulement si $x_0 = 0$. En 0, on a

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} x \, \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x) = 0$$

et si f était dérivable en un point $x_0 \neq 0$, la fonction discontinue

$$\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x) = \frac{f(x)}{x^2}$$

l'y serait aussi.

4. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. Déterminer l'ensemble des points où leur enveloppe supérieure

$$h(x) = \sup\{f(x), g(x)\}$$

est dérivable.
Solution.
La fonction h est certainement dérivable aux points où $f(x) \neq g(x)$. Si, par exemple, $f(x_0) > g(x_0)$, on aura $f(x) > g(x)$ dans un voisinage ouvert de x_0 en vertu de la continuité des fonctions dérivables et donc

$$h'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Aux point où $f(x) = g(x)$, on ne peut rien conclure comme le montrent les fonctions $f(x) = x_+$ et $g(x) = (-x)_+$ pour lesquelles $h(x) = |x|$ et $f(x) = x_+^2 = h(x)$, $g(x) = 0$.

5. Vérifier que la dérivée d'une fonction dérivable paire est impaire, que la dérivée d'une fonction dérivable impaire est paire.
Solution.
Si f est paire,

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(-x) - f(-x_0)}{x - x_0} \\ &= -\lim_{y \to -x_0} \frac{f(y) - f(-x_0)}{y + x_0} = -f'(-x_0). \end{aligned}$$

Le cas impair est semblable.

6. Montrer que si la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable en x_0,

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}.$$

Montrer par un exemple approprié que la limite ci-dessus peut exister sans que la fonction ne soit dérivable en x_0.
Solution.
On a

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h}$$

et

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

donc
$$2f'(x_0) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{h}.$$
La fonction $f(x) = |x|$ n'est pas dérivable en $x = 0$ bien que la limite en question existe (elle vaut 0) pour cette fonction.

7. Montrer que l'unique polynôme de degré au plus n, P_n, qui est tel que
$$P_n(x_k) = y_k, \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots, n+1$$
peut se mettre sous la forme
$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n+1} y_k \, \frac{L(x)}{L'(x_k)(x - x_k)}$$
avec
$$L(x) = \prod_{k=1}^{n+1} (x - x_k).$$
Solution.
Considérons le polynôme
$$L_j(x) = \frac{L(x)}{L'(x_j)(x - x_j)}.$$
On a $L_j(x_k) = 0$ si $k \neq j$ et
$$L_j(x_j) = \lim_{x\to x_j} \frac{L(x) - L(x_j)}{L'(x_j)(x - x_j)} = 1.$$
Donc
$$\sum_{k=1}^{n+1} y_k \, \frac{L(x_j)}{L'(x_k)(x_j - x_k)} = y_j$$
pour $j = 1, 2, \ldots, n+1$ et le résultat suit de l'unicité du polynôme d'interpolation.

8. Montrer que si $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ sont n fois dérivables, leur produit l'est aussi et
$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$
Solution.

Par récurrence sur n. La formule est vraie si $n = 1$:

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Si on suppose que

$$(fg)^{(n-1)} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} f^{(k)} g^{(n-1-k)},$$

on aura

$$(fg)^{(n)} = \left((fg)^{(n-1)}\right)' = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(f^{(k)} g^{(n-1-k)}\right)'$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (f^{(k+1)} g^{(n-(k+1))} + f^{(k)} g^{(n-k)}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-1-k)}$$

en utilisant les propriétés des coefficients binomiaux comme dans la démonstration du théorème du binôme.

9. Montrer qu'un polynôme P admet un zéro de multiplicité k en $x = a$ si et seulement si

$$P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(k-1)}(a) = 0, \ P^{(k)}(a) \neq 0.$$

Solution.
Si $P(x) = (x-a)^k Q(x)$ avec $Q(a) \neq 0$, on a effectivement, en vertu de l'exercice précédent,

$$P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(k-1)}(a) = 0, \ P^{(k)}(a) \neq 0.$$

Réciproquement, toujours en vertu de l'exercice précédent, $P(a) = 0$ implique $P(x) = (x-a)Q_1(x)$ puis $P'(a) = 0$ implique $Q_1(a) = 0$ donc $P(x) = (x-a)^2 Q_2(x)$, ainsi de suite. Le raisonnement s'arrête lorsque $P^{(k)}(a) \neq 0$, c'est-à-dire lorsque $P(x) = (x-a)^k Q_k(x)$.

10. Montrer que si l'on a, identiquement en x,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k = \sum_{k=0}^{n} b_k (x-b)^k,$$

alors

$$a_k = \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} b_j (a-b)^{j-k}.$$

Solution.
En vertu de la formule de Taylor,

$$a_k = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}\left(\sum_{k=0}^{n} b_k(x-b)^k\right)\Bigg|_a$$

(la $k^{ième}$ évaluée au point $x = a$). En utilisant la formule pour la $k^{ième}$ dérivée d'un produit, on obtient le résultat recherché.

9 PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS DÉRIVABLES

1. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction dérivable. Supposons que $f'(x) \neq 1$. Montrer que son graphe G_f coupe la droite d'équation $y = x$ exactement une fois.
   Solution.
   On sait que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution. Supposant que $f(x_1) - x_1 = f(x_2) - x_2 = 0$, on aura, pour un point x_3 approprié,
   $$x_2 - x_1 = f(x_2) - f(x_1) = f'(x_3)(x_2 - x_1)$$
   ce qui implique ici $x_2 - x_1 = 0$.
2. Montrer que, quel que soit c, l'équation $x^3 - 3x + c = 0$ admet au plus une racine dans l'intervalle $[-1, 1]$.
   Solution.
   Si l'on avait $x_1^3 - 3x_1 + c = x_2^3 - 3x_2 + c = 0$ avec $-1 \leq x_1 < x_2 \leq 1$, on aurait, en vertu du théorème de Rolle que $3x_3^2 - 3 = 0$ pour un certain point x_3 strictement entre x_1 et x_2 ce qui est impossible puisque $x_3 = \pm 1$.
3. Montrer que si une fonction n fois dérivable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet $n + 1$ zéros distincts, sa $n^{ième}$ dérivée $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois.
   Solution.
   Entre chaque paire de zéros consécutifs d'une fonction se trouve au moins un zéro de sa dérivée (théorème de Rolle). Ainsi, f' possède au moins n zéros distincts, f'' en possède au moins $n - 1$, ... , $f^{(n)}$ en possède au moins un.
4. Montrer que si l'équation
   $$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0$$
   admet N racines, l'équation
   $$a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} = 0$$
   en admet au moins $N - 1$.
   Solution.
   Un zéro de multiplicité n_1 pour un polynôme est un zéro de multiplicité $n_1 - 1$ pour sa dérivée : si
   $$P(x) = (x - x_1)^{n_1} Q(x),$$

alors

$$P'(x) = (x - x_1)^{n_1 - 1}(n_1\, Q(x) + (x - x_1)Q'(x)).$$

Si donc $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sont les zéros distincts de P, de multiplicité respective $n_1, n_2, \ldots, n_k$ ($n_1 + n_2 + \cdots + n_k = N$), P' aura au moins

$$k - 1 + n_1 - 1 + n_2 - 1 + \cdots + n_k - 1 = n_1 + n_2 + \cdots + n_k - 1 = N - 1$$

zéros.

5. Montrer que
$$\left| \frac{x}{1 + x^2} - \frac{y}{1 + y^2} \right| \leq |x - y|.$$

   Solution.
   En vertu du théorème des accroissements finis, il existe z tel que
$$\left| \frac{x}{1 + x^2} - \frac{y}{1 + y^2} \right| = \left| \frac{1 - z^2}{(1 + z^2)^2} \right| |x - y| \leq \frac{1}{1 + z^2}\ |x - y| \leq |x - y|.$$

6. Montrer que si $0 < p$ et $x, y > 1$, on a
$$\left| \frac{x^p}{1 + x^p} - \frac{y^p}{1 + y^p} \right| \leq \frac{p}{2}\ |x - y|.$$

   Solution.
   En vertu du théorème des accroissements finis, il existe $z > 1$ tel que
$$\left| \frac{x^p}{1 + x^p} - \frac{y^p}{1 + y^p} \right| = \frac{p\, z^{p-1}}{(1 + z^p)^2}\ |x - y| \leq \frac{p}{2\, z}\ |x - y| \leq \frac{p}{2}\ |x - y|.$$

7. Montrer que l'inégalité de Bernoulli
$$(1 + x)^p \geq 1 + px\ ,\ \ x > -1$$
   est valable quel que soit $p \geq 1$.
   Solution.
   Cas $x > 0$. On considère la fonction $f(x) = (1 + x)^p$ sur l'intervalle $[0, x]$. Il existe $c \in]0, x[$ tel que $(1 + x)^p - 1 = p(1 + c)^{p-1}x \geq px$.
   Cas $x < 0$. On considère la fonction $f(x) = (1 + x)^p$ sur l'intervalle $[x, 0]$. Il existe $c \in]x, 0[$ tel que $1 - (1 + x)^p = p(1 + c)^{p-1}(-x) \leq -px$ puisque $1 + c < 1$.

8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$|f(x) - f(y)| \leq A|x - y|^p \quad \text{avec } p > 1.$$

Montrer qu'elle est constante.
Solution.
La fonction admet une dérivée identiquement nulle car

$$\left| \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| = \lim_{x \to x_0} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq \lim_{x \to x_0} A|x - x_0|^{p-1} = 0.$$

Elle est donc constante.

9. Montrer que si $0 \leq u \leq v + w$, alors

$$\frac{u}{1+u} \leq \frac{v}{1+v} + \frac{w}{1+w}.$$

Solution.
Puisque

$$\left(\frac{x}{1+x} \right)' = \frac{1}{(1+x)^2} > 0,$$

la fonction $x \mapsto x/(1+x)$ est croissante et

$$\frac{u}{1+u} \leq \frac{v+w}{1+v+w} \leq \frac{v}{1+v} + \frac{w}{1+w}.$$

10. Déterminer toutes les fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui satisfont l'équation fonctionnelle

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Solution.
Dérivant la relation par rapport à y puis posant $y = 0$, on obtient $f'(x) = f'(0)$ pour tout x. Alors, en vertu du théorème des accroissements finis, il existe z tel que

$$f(x) - f(0) = f'(z)\,x = f'(0)\,x.$$

Puisque $f(0) = 2f(0)$, $f(0) = 0$ et $f(x) = ax$.

11. Déterminer les extrémums relatifs et absolus de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-1|}$$

sur l'intervalle $[-1, 2]$ (figure 4).

Solution.

On a

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{2-x} & \text{si} \quad -1 < x < 0, \\ \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{2-x} & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad 1 < x < 2. \end{cases}$$

En calculant ses dérivées, on constate que la fonction est croissante sur $]-1, 0[$, décroissante sur $]0, 1/2[$, croissante sur $]1/2, 1[$ et décroissante sur $]1, 2[$. Le seul point critique est $x = 1/2$ et il s'agit d'un minimum relatif. Comme

$$f(-1) = \frac{5}{6},\ f(0) = \frac{3}{2},\ f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3},\ f(1) = \frac{3}{2} \ \text{ et } \ f(2) = \frac{5}{6},$$

le maximum absolu de f sur l'intervalle est $3/2$, atteint en 0 et en 1 et le minimum absolu de f sur l'intervalle est $5/6$, atteint en -1 et en 2.

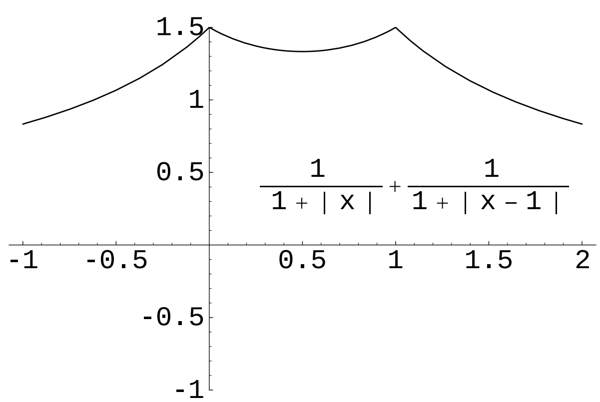

FIG. 4 – Extremums absolus et relatifs

12. Soit $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f'(x) \neq 0$. Montrer qu'alors ou bien $f'(x) > 0$ pour tout $x \in (a, b)$ ou bien $f'(x) < 0$ pour tout $x \in (a, b)$.

Solution.

La fonction f', admettant une primitive, possède la propriété des valeurs intermédiaires.

13. Soient f, g deux fonctions deux fois dérivables dans un voisinage ouvert de x_0 et s'annulant en x_0. Donner des conditions suffisantes pour que leur produit fg admette un extremum relatif en x_0.

Solution.

On a $(fg)'(x_0) = 0$ et $(fg)''(x_0) = 2f'(x_0)g'(x_0)$. On aura un minimum relatif si $f'(x_0)g'(x_0) > 0$ (les deux fonctions sont alors strictement monotones de même sens en x_0) et un maximum relatif si $f'(x_0)g'(x_0) < 0$ (elles sont strictement monotones de sens contraire en x_0).

14. Soient P et Q deux polynômes admettant chacun un zéro de multiplicité k en x_0. Montrer que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P^{(k)}(x_0)}{Q^{(k)}(x_0)}.$$

Solution.

Soient

$$P(x) = (x - x_0)^k P_1(x),\ \ P_1(x_0) \neq 0$$

et

$$Q(x) = (x - x_0)^k Q_1(x),\ \ Q_1(x_0) \neq 0.$$

Alors

$$\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x_0)}{Q_1(x_0)}.$$

Or

$$P^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{d^j}{dx^j}(x - x_0)^k \frac{d^{k-j}}{dx^{k-j}} P_1(x)$$

donc

$$P^{(k)}(x_0) = k! P_1(x_0)$$

et, de façon semblable,

$$Q^{(k)}(x_0) = k! Q_1(x_0).$$

15. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction admettant une deuxième dérivée continue et telle que $g(0) = g'(0) = 0$. Soit

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer $f'(0)$.
Solution.
En vertu de la règle de l'Hospital,

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{g'(x)}{2x} = \frac{1}{2} g''(0).$$

16. Appliquer la méthode de Newton à la fonction $f(x) = x^2 - 3$ pour déterminer les premières décimales de $\sqrt{3}$.
Solution.
On a $f(3/2)f(2) < 0$. Choisissons $x_0 = 1,75$. On veut que $2|x| \geq M$ et que $2|x-y| \leq M/2$ sur l'intervalle d'extrémités $7/4 - 1/8M$ et $7/4 + 1/8M$. La première condition sera satisfaite si $2(7/4 - 1/8M) \geq M$ et la seconde si $1/2M \leq M/2$. On peut donc prendre $M = 1$. Les trois premières itérations donnent 1,73214 , 1,73205 et 1,73205 .

17. Appliquer la méthode de Newton à la fonction $f(x) = x^3 - 2$ pour déterminer les premières décimales de $\sqrt[3]{2}$.
Solution.
On a $f(1)f(1,5) < 0$. Choisissons $x_0 = 1,25$. Les hypothèses garantissant la convergence de la suite des itérés sont satisfaites si

$$\left(\frac{5}{4} - \frac{3}{32M}\right)^2 \geq \frac{M}{3} \;, \left(\frac{5}{4} + \frac{3}{32M}\right) \leq \frac{4M^2}{9}$$

donc si $M = 3$. Les trois premières itérations donnent 1,26 , 1,25992 et 1,25992 .

18. Soit $\overline{x}$ un **point fixe attractif** d'une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admettant une dérivée continue (une **fonction continûment dérivable**), c'est-à-dire un point $\overline{x}$ tel que $g(\overline{x}) = \overline{x}$ et que $|g'(\overline{x})| < 1$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ et $c < 1$ tels que

$$|x - \overline{x}| \leq \delta \text{ implique } |g'(x)| \leq c.$$

En déduire que si $|x_0 - \overline{x}| \leq \delta$, la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ définie récursivement par

$$x_{n+1} = g(x_n) \text{ pour } n \geq 0$$

converge vers $\overline{x}$.
Solution.
Par continuité, on a $|g'(x)| < 1$ dans un intervalle ouvert centré en $\overline{x}$. Toujours par continuité (propriété des valeurs extrêmes), il existe

$\delta > 0$ et $c < 1$ tels que dans l'intervalle fermé borné centré en $\overline{x}$ et de longueur 2δ, on ait $|g'(x)| \leq c$. Vérifions par récurrence sur n que les points x_n restent tous dans l'intervalle fermé borné centé en $\overline{x}$ et de longueur 2δ et satisfont

$$|x_n - \overline{x}| \leq \delta c^n.$$

Si $n = 0$, cela est trivial. Si $n = 1$, en vertu du théorème des accroissements finis,

$$|x_1 - \overline{x}| = |g(x_0) - g(\overline{x})| \leq c\ |x_0 - \overline{x}| \leq \delta c.$$

Par hypothèse de récurrence,

$$|x_n - \overline{x}| = |g(x_{n-1}) - g(\overline{x})| \leq c\ |x_{n-1} - \overline{x}| \leq \delta c^n.$$

19. Obtenir les premières décimales de l'unique solution de l'équation

$$x = \frac{1}{1+x^2}$$

par la méthode de l'exercice précédent — observer d'abord que cette solution est comprise entre 1/2 et 1.
Solution.
Soit

$$g(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Puisque

$$|g'(x)| = \left|\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\right| < 1$$

quelque soit x (la fonction est **contractante**), le point fixe cherché sera attractif. Choisissant $x_0 = 0,75$, il faut itérer dix-huit fois avant de trouver $x = 0,6823$ (avant d'obtenir $x = g(x)$ à la quatrième décimale).

20. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction admettant une deuxième dérivée continue. Supposons que $f(\overline{x}) = 0$ et que $f'(\overline{x}) \neq 0$. Montrer l'existence d'un nombre $\delta > 0$ tel que quel que soit le point $x_0 \in [\overline{x} - \delta, \overline{x} + \delta]$, la suite des nombres $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\ ,\ n \geq 0$$

converge vers $\overline{x}$.

Solution.
La fonction

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

admet une dérivée continue

$$g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

dans un voisinage ouvert de $\overline{x}$ et ses points fixes sont les zéros de f.

10 FONCTIONS CONVEXES

1. Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et concave est nécessairement linéaire.
   Solution.
   On montre qu'elle admet une dérivée constante : on a en effet
   $$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$
   quels que soient $x_1 < x < x_2$ donc
   $$f'(x_1) = f'(x_2)$$
   quels que soient $x_1 < x_2$. La fonction $f(x) - f'(0)x$, admettant une dérivée nulle, est constante : $f(x) = f'(0)x + f(0)$.
2. Montrer qu'une combinaison convexe de fonctions convexes, $\sum_{k=1}^n \lambda_k f_k$ avec $\lambda_k \in [0, 1]$ pour tout k et $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$, est une fonction convexe.
   Solution.
   Soient u, v deux points de l'intervalle de définition commun des fonctions et $0 \leq \lambda \leq 1$. On a
   $$f_k(\lambda u + (1 - \lambda)v) \leq \lambda f_k(u) + (1 - \lambda)f_k(v)$$
   pour tout k donc
   $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \lambda_k\, f_k(\lambda u + (1 - \lambda)v) &\leq \sum_{k=1}^n \lambda_k\, (\lambda f_k(u) + (1 - \lambda)f_k(v)) \\ &= \lambda \sum_{k=1}^n \lambda_k\, f_k(u) + (1 - \lambda) \sum_{k=1}^n \lambda_k\, f_k(v).\end{aligned}$$
3. Montrer qu'une fonction spline du type
   $$S(x) = \sum_{k=1}^n A_k(x - x_k)_+$$
   où $A_k \geq 0$ pour tout k est convexe.
   Solution.
   Chaque fonction $(x - x_k)_+$ est convexe comme combinaison convexe des fonctions convexes $x \mapsto x - x_k$ et $x \mapsto |x - x_k|$
   $$(|\lambda x + (1 - \lambda)y - x_k| = |\lambda(x - x_k) + (1 - \lambda)(y - x_k)|)$$

et est donc convexe. La fonction S est elle-même un multiple positif d'une combinaison convexe de ces fonctions

$$S(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{\sum_{k=1}^{n} A_k}\ (x - x_k)_+\right).$$

4. Montrer qu'une fonction convexe croissante d'une fonction convexe est convexe.

   Solution.

   Soient $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe croissante. Si $u, v \in (a,b)$ et $0 \leq \lambda \leq 1$, on a

$$f(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda f(u) + (1-\lambda) f(v)$$

   donc

$$g(f(\lambda u+(1-\lambda)v)) \leq g(\lambda f(u)+(1-\lambda) f(v)) \leq \lambda g(f(u))+(1-\lambda) g(f(v)).$$

5. Étudier la convexité d'une fonction rationnelle du type

$$R(x) = \frac{ax+b}{cx+d}\ , \quad (ad - bc > 0).$$

   Tracer le graphe. En déduire l'inégalité suivante : si $x_k < -1$ pour tout k,

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n + \sum_{k=1}^{n} x_k} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{1+x_k}.$$

   Solution.

   On considère le cas générique — celui où $abcd \neq 0$. On a

$$R'(x) = \frac{ad - bc}{(cx+d)^2}$$

   et

$$R''(x) = \frac{-2c(ad-bc)}{(cx+d)^3}.$$

   La fonction est définie sur $]-\infty, -d/c[\cup]-d/c, +\infty[$. Elle est croissante sur chacun de ces deux intervalles. Si $c > 0$, elle est convexe sur le premier intervalle et concave sur le second, le contraire si $c < 0$. La fonction

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

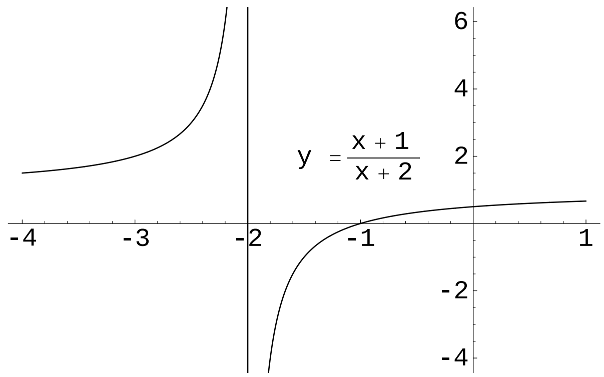

FIG. 5 – Cas $ad - bc > 0$ et $c > 0$

est convexe sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ et l'inégalité à démontrer s'écrit

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k).$$

6. Étudier la convexité d'un polynôme cubique

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c.$$

Tracer le graphe.

Solution.

On a

$$P'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

et

$$P''(x) = 6x + 2a.$$

La fonction est concave si $x < -a/3$ et convexe si $x > -a/3$. Si $a^2 - 3b \leq 0$, elle est toujours croissante, si $a^2 - 3b > 0$, elle est décroissante lorsque

$$\frac{-a - \sqrt{a^2 - 3b}}{3} < x < \frac{-a + \sqrt{a^2 - 3b}}{3}$$

et croissante ailleurs.

7. Étudier la convexité de la fonction

$$f(x) = \frac{1 + x|x|}{1 + x^2}.$$

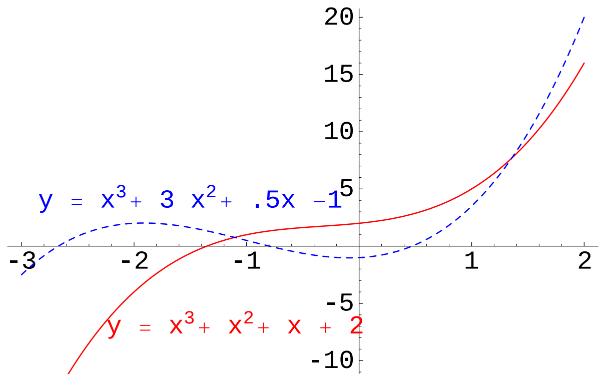

FIG. 6 – Polynômes cubiques

Tracer le graphe.

Solution.

La fonction est constante sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et si $x < 0$, on a

$$f'(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$

et

$$f''(x) = \frac{4(-1+3x^2)}{(1+x^2)^3}.$$

La fonction est donc convexe si et seulement si $x < -1/\sqrt{3}$.

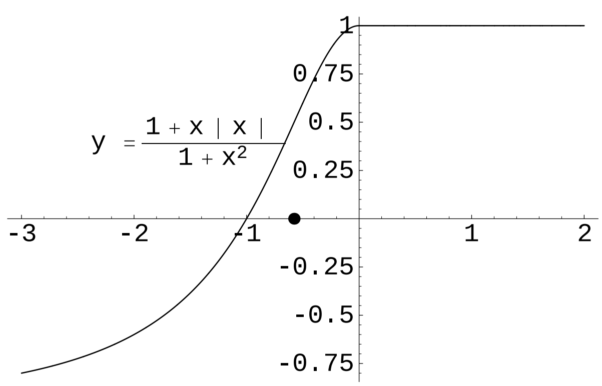

FIG. 7 – Point d'inflexion en $-1/\sqrt{3}$

8. Montrer que la fonction $f(x) = (1 - x^p)^{1/p}$ $(p \geq 1)$ est concave sur l'intervalle $[0,1]$.
Solution.
On a
$$f'(x) = -x^{p-1}(1 - x^p)^{1/p-1}$$
et
$$f''(x) = -(p-1)x^{p-2}(1 - x^p)^{1/p-2}.$$

9. Vérifier que la fonction $f(x) = (1 + |x|^p)^{1/p}$ est convexe quel que soit $p \geq 1$. En déduire l'inégalité suivante (Minkowski) :
$$\left(\sum_{k=1}^n {x_k}^{1/p}\right)^p + \left(\sum_{k=1}^n {y_k}^{1/p}\right)^p \leq \left(\sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^{1/p}\right)^p$$
si tous les nombres x_k et y_k sont positifs.
Solution.
La fonction est composée des fonctions $x \mapsto |x|$ et $y \mapsto (1 + y^p)^{1/p}$. La première est convexe, la seconde est convexe croissante :
$$\left((1 + y^p)^{1/p}\right)' = y^{p-1}(1 + y^p)^{1/p-1}$$
et
$$\left((1 + y^p)^{1/p}\right)'' = (p-1)y^{p-2}(1 + y^p)^{1/p-2}.$$
Dans la démonstration de l'inégalité de Minkowski, on peut supposer que tous les y_k sont strictement positifs (par continuité). Elle est donc équivalente à l'inégalité
$$1 + \left(\sum_{k=1}^n \frac{x_k^{1/p}}{\sum_{j=1}^n y_j^{1/p}}\right)^p \leq \left(\sum_{k=1}^n \frac{(x_k + y_k)^{1/p}}{\sum_{j=1}^n y_j^{1/p}}\right)^p$$
c'est-à-dire à l'inégalité
$$\left\{1 + \left(\sum_{k=1}^n \frac{y_k^{1/p}(x_k/y_k)^{1/p}}{\sum_{j=1}^n y_j^{1/p}}\right)^p\right\}^{1/p} \leq \sum_{k=1}^n \frac{{y_k}^{1/p}(1 + x_k/y_k)^{1/p}}{\sum_{j=1}^n y_j^{1/p}}.$$
Elle découle alors de l'inégalité de Jensen
$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k u_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(u_k)$$

appliquée avec

$$u_k = \left(\frac{x_k}{y_k}\right)^{1/p} \quad \text{et} \quad \lambda_k = \frac{y_k^{1/p}}{\sum_{j=1}^n y_j^{1/p}}.$$

10. Soit $p \geq 1$. Déduire l'inégalité de Minkowski suivante :

$$\left(\sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n {x_k}^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n {y_k}^p\right)^{1/p}$$

a) de l'inégalité de Hölder ;

b) de la concavité de la fonction $f(x) = (1 + x^{1/p})^p$.

Solution.

En vertu de l'inégalité de Hölder, on a

$$\sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^p = \sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^{p-1} x_k + \sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^{p-1} y_k$$
$$\leq \left(\left(\sum_{k=1}^n {x_k}^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n {y_k}^p\right)^{1/p}\right) \left(\sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^p\right)^{1-1/p}.$$

La démonstration directe à partir de la concavité de la fonction est semblable à celle de l'exercice précédent.