

# MESURE ET INTÉGRATION

Notes de cours

André Giroux  
Département de Mathématiques et Statistique  
Université de Montréal  
Décembre 2009

## Table des matières

<b>1</b>	<b>INTRODUCTION</b>	<b>3</b>
1.1	Exercices . . . . .	5
<b>2</b>	<b>PARTIES MESURABLES DE <math>\mathbb{R}</math></b>	<b>6</b>
2.1	Mesure extérieure . . . . .	6
2.2	Ensembles mesurables . . . . .	9
2.3	Mesure . . . . .	14
2.4	Exercices . . . . .	16
<b>3</b>	<b>FONCTIONS MESURABLES DE <math>\mathbb{R}</math> VERS <math>\mathbb{R}</math></b>	<b>19</b>
3.1	Exercices . . . . .	23
<b>4</b>	<b>INTÉGRATION SUR <math>\mathbb{R}</math></b>	<b>25</b>
4.1	Exercices . . . . .	37
<b>5</b>	<b>MESURE ET INTÉGRATION ABSTRAITES</b>	<b>41</b>
5.1	Ensembles mesurables . . . . .	41
5.2	Fonctions mesurables . . . . .	43
5.3	Mesures positives . . . . .	49
5.4	Intégration . . . . .	53
5.5	Exercices . . . . .	63
<b>6</b>	<b>CONSTRUCTION DE MESURES</b>	<b>67</b>
6.1	Exercices . . . . .	77
<b>7</b>	<b>CONVERGENCE EN MESURE</b>	<b>79</b>
7.1	Exercices . . . . .	87
<b>8</b>	<b>ESPACES DE LEBESGUE</b>	<b>88</b>
8.1	Exercices . . . . .	95
<b>9</b>	<b>DÉRIVATION</b>	<b>98</b>
9.1	Fonctions à variation bornée . . . . .	98
9.2	Fonctions absolument continues . . . . .	107
9.3	Exercices . . . . .	112
<b>10</b>	<b>MESURES SIGNÉES</b>	<b>115</b>
10.1	Exercices . . . . .	128

<b>11 MESURES PRODUITS</b>	<b>130</b>
11.1 Exercices . . . . .	143
<b>12 APPLICATIONS</b>	<b>146</b>
12.1 Série de Fourier . . . . .	146
12.2 Transformée de Fourier . . . . .	155
12.3 Exercices . . . . .	165

### Table des figures

1	Image inverse des générateurs . . . . .	43
2	Une fonction de test . . . . .	94

# 1 INTRODUCTION

L'aire d'un rectangle  $R$  de côtés  $a$  et  $b$  est  $ab$ , par définition. Lorsque  $a$  et  $b$  sont des entiers, cette aire est égale au nombre de carrés de côté unité nécessaires pour recouvrir  $R$ . L'aire du triangle rectangle de base  $a$  et de hauteur  $b$  est bien évidemment  $ab/2$ . On en déduit l'aire d'un triangle quelconque puis, par triangulation, celle d'un polygone arbitraire.

Le calcul de l'aire d'un domaine  $D$  délimité par des courbes plus complexes, par exemple des arcs de cercle ou des segments de parabole, nécessite un passage à la limite. Dans le cas où  $D$  est déterminé par le graphe d'une fonction  $f$  continue et positive sur un intervalle compact  $[a, b]$ <sup>1</sup>,

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\},$$

considérons avec Riemann une partition  $\mathcal{P}$  de l'intervalle  $[a, b]$  :

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\} \text{ où } a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

Alors la somme supérieure

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^n \sup\{f(x) \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k\}(x_k - x_{k-1})$$

fournit une borne supérieure pour l'aire requise et la somme inférieure

$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^n \inf\{f(x) \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k\}(x_k - x_{k-1})$$

en fournit une borne inférieure. En utilisant les propriétés des fonctions continues sur les intervalles compacts, on montre que

$$\inf\{S(f, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P}\} = \sup\{s(f, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P}\}$$

et c'est cette valeur commune que l'on prend pour mesure de l'aire du domaine  $D$ . On exprime ceci en disant que la fonction  $f$  est intégrable au sens de Riemann sur l'intervalle  $[a, b]$ , d'intégrale

$$\int_a^b f(x) dx = \inf\{S(f, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P}\} = \sup\{s(f, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P}\}.$$

---

<sup>1</sup> $[a, b]$  désigne un intervalle contenant ses extrémités,  $]a, b[$  désigne un intervalle ne contenant pas ses extrémités et  $(a, b)$  désigne un intervalle contenant peut-être ses extrémités.

Lorsque la fonction  $f$  n'est pas continue, il n'est plus certain qu'elle soit intégrable au sens de Riemann, même si elle est positive et bornée. Un exemple d'une telle fonction est fourni par la fonction indicatrice des nombres rationnels  $f = \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}$ , introduite par Dirichlet et définie par

$$\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

qui n'est intégrable sur aucun intervalle  $[a, b]$  puisque l'on a toujours

$$S(\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}, \mathcal{P}) = b - a, \quad s(\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}, \mathcal{P}) = 0.$$

On peut essayer d'élargir la classe des fonctions intégrables, et ceci est l'objet de notre cours, en considérant avec Lebesgue des partitions de l'axe des ordonnées plutôt que des partitions de l'axe des abscisses. Nous étendrons d'abord la notion de longueur d'un intervalle,

$$\lambda([a, b]) = b - a,$$

à une classe plus vaste d'ensembles (nous les nommerons : **ensembles mesurables** et la longueur généralisée : **mesure**). Nous considérerons alors la somme

$$\sigma_m(f) = \sum_{k=0}^m \frac{k}{m} \lambda(E_k)$$

où

$$E_k = \left\{ x \mid \frac{k}{m} \leq f(x) < \frac{k+1}{m} \right\}$$

et  $\lambda(E_k)$  est la mesure de  $E_k$ . ( Pour alléger l'exposé, nous avons supposé ici que  $0 \leq f(x) \leq 1$ . ) Cette somme d'aires de rectangles généralisés constitue une bonne approximation de l'aire du domaine  $D$  cherchée : lorsque  $m$  est grand en effet,  $f$  est presque constante sur  $E_k$ . La complexité de la fonction se traduit par la complexité des ensembles  $E_k$ . Si  $f$  est monotone par exemple, les ensembles  $E_k$  sont des intervalles et la somme  $\sigma_m(f)$  se réduit à la somme  $s(f, \mathcal{P})$  correspondante. Pour une classe très vaste de fonctions (nous les appellerons : **fonctions mesurables**), nous verrons que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sigma_m(f)$$

existe et généralise effectivement la notion d'aire précédemment obtenue. Une telle fonction sera dite intégrable au sens de Lebesgue, d'intégrale

$$\int_0^1 f = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sigma_m(f).$$

La propriété de la mesure qui permettra ces développements est la **propriété d'additivité** : désignant par  $\sum_n E_n$  la réunion d'une suite finie ou infinie d'ensembles mesurables deux à deux disjoints<sup>2</sup>, nous aurons

$$\lambda \left( \sum_n E_n \right) = \sum_n \lambda(E_n)$$

et c'est sur cette propriété fondamentale que reposera toute la théorie.

### 1.1 Exercices

1. Vérifier que la fonction

$$x \mapsto \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x)$$

est partout discontinue.

2. Déterminer l'ensemble des points de continuité de la fonction

$$x \mapsto x \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x).$$

3. Déterminer les ensembles  $E_k$  associés à la fonction  $\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}$ .
4. Montrer que

$$\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} (\cos m! \pi x)^n \right).$$

5. Calculer

$$\int_0^1 (\cos m! \pi x)^n dx$$

puis

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (\cos m! \pi x)^n dx \right).$$

---

<sup>2</sup>et par  $E_1 + E_2$  la réunion de deux ensembles disjoints.

## 2 PARTIES MESURABLES DE $\mathbb{R}$

Dans ce chapitre, nous allons généraliser la notion de longueur en deux étapes. Nous associerons d'abord à tout ensemble  $E \subseteq \mathbb{R}$  un élément  $\lambda^*(E)$  de  $[0, +\infty]$ <sup>3</sup> appelé mesure extérieure de  $E$  qui, lorsque  $E$  est un intervalle, se réduit à sa longueur. Nous restreindrons ensuite la fonction  $E \mapsto \lambda^*(E)$  ainsi définie sur l'ensemble  $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$  de toutes les parties de  $\mathbb{R}$  à une famille  $\mathfrak{L}_{\mathbb{R}}$  appropriée d'ensembles de façon à avoir la propriété d'additivité. Ces ensembles seront les ensembles mesurables et la fonction restreinte sera la mesure. Nous verrons ensuite des exemples d'ensembles mesurables et étudierons des propriétés supplémentaires de la mesure.

### 2.1 Mesure extérieure

La **mesure extérieure**  $\lambda^*(E)$  d'un ensemble  $E \subseteq \mathbb{R}$  est définie par l'équation

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \sum_k (b_k - a_k) \mid E \subseteq \bigcup_k ]a_k, b_k[ \right\},$$

la borne inférieure étant calculée sur la famille des suites finies ou infinies d'intervalles ouverts  $\{ ]a_k, b_k[ \}_k$  recouvrant  $E$ . Pour étudier ses propriétés, nous nous appuierons sur le théorème suivant.

**Théorème 1 (Borel-Lebesgue)** *Tout recouvrement d'un intervalle compact  $[a, b]$  par des intervalles ouverts  $\{ ]a_\alpha, b_\alpha[ \}_{\alpha \in A}$  contient un sous-recouvrement fini.*

Démonstration.

Supposons le contraire. Alors au moins l'un des deux intervalles

$$\left[ a, \frac{a+b}{2} \right], \left[ \frac{a+b}{2}, b \right]$$

ne pourrait être recouvert par un nombre fini des intervalles  $]a_\alpha, b_\alpha[$ . Donc au moins l'un des quatre intervalles

$$\left[ a, \frac{3a+b}{4} \right], \left[ \frac{3a+b}{4}, \frac{a+b}{2} \right], \left[ \frac{a+b}{2}, \frac{a+3b}{4} \right], \left[ \frac{a+3b}{4}, b \right]$$

---

<sup>3</sup>On convient que si  $a \in [0, +\infty]$ ,  $a + (+\infty) = +\infty$ , que si  $a \in ]0, +\infty]$ ,  $a \times (+\infty) = +\infty$  et enfin que  $0 \times (+\infty) = 0$ .

ne pourrait l'être. Ainsi de suite. On obtiendrait de cette façon une suite d'intervalles emboîtés,

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \cdots,$$

dont le  $n^{\text{ième}}$  aurait pour longueur  $(b - a)/2^n$ . L'intersection de tous ces intervalles se réduirait à un point  $x$  de  $[a, b]$ . Il existerait donc un intervalle  $]a_\alpha, b_\alpha[$  contenant ce point et, par suite, tous les intervalles  $I_n$  à partir d'un certain rang, contredisant leur définition. C.Q.F.D.

Dans le théorème suivant,  $E + x_0$  désigne le translaté de  $E$  par  $x_0$  :

$$E + x_0 = \{y \mid y = x + x_0, x \in E\}.$$

(Ne pas confondre  $E + x_0$  avec  $E + \{x_0\}$ .)

**Théorème 2** *La mesure extérieure  $\lambda^* : \mathfrak{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, +\infty]$  possède les propriétés suivantes :*

1.  $E \subseteq F$  implique que  $\lambda^*(E) \leq \lambda^*(F)$  ;
2. quel que soit  $x_0$ ,  $\lambda^*(E + x_0) = \lambda^*(E)$  ;
3. pour tout intervalle  $(a, b)$ ,  $\lambda^*((a, b)) = b - a$  ;
4. pour toute suite finie ou infinie d'ensembles  $\{E_k\}_k$ ,

$$\lambda^*\left(\bigcup_k E_k\right) \leq \sum_k \lambda^*(E_k).$$

Démonstration.

La première propriété (monotonie) suit de ce que tout recouvrement de  $F$  est aussi un recouvrement de  $E$  et la deuxième (invariance sous translation) découle de ce que la longueur d'un intervalle est invariante sous translation.

Pour démontrer la troisième, considérons d'abord le cas d'un intervalle compact  $[a, b]$ . Soit  $\epsilon > 0$  arbitraire. La relation

$$[a, b] \subseteq ]a - \epsilon, b + \epsilon[$$

montre que

$$\lambda^*([a, b]) \leq b - a + 2\epsilon$$

donc,  $\epsilon > 0$  étant arbitraire, que

$$\lambda^*([a, b]) \leq b - a.$$



Pour obtenir l'inégalité opposée, il suffit, en vertu du théorème de Borel-Lebesgue, de montrer que, si

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{k=1}^N ]a_k, b_k[,$$

on a

$$b - a \leq \sum_{k=1}^N (b_k - a_k).$$

Pour ce faire, on peut supposer que les intervalles du recouvrement fini sont énumérés de telle sorte que

$$a_1 < a < a_2 < b_1 < a_3 < b_2 < \cdots < a_{N-1} < b_{N-2} < a_N < b_{N-1} < b < b_N.$$

Alors

$$\begin{aligned} & (b_N - a_N) + (b_{N-1} - a_{N-1}) + \cdots + (b_2 - a_2) + (b_1 - a_1) \\ &= b_N + (b_{N-1} - a_N) + (b_{N-2} - a_{N-1}) + \cdots + (b_1 - a_2) - a_1 \\ &> b_N - a_1 > b - a. \end{aligned}$$

Si l'intervalle  $(a, b)$  est borné, les inclusions

$$[a + \epsilon, b - \epsilon] \subseteq (a, b) \subseteq [a, b]$$

entraînent

$$b - a - 2\epsilon \leq \lambda^*((a, b)) \leq b - a.$$

Enfin, si l'intervalle  $(a, b)$  n'est pas borné, il contient des intervalles bornés de mesure extérieure arbitrairement grande et, par monotonie,

$$\lambda^*((a, b)) = +\infty = b - a.$$

Pour démontrer la quatrième propriété (sous-additivité), considérons pour chaque  $k$  une suite d'intervalles ouverts  $\{ ]a_j^k, b_j^k[ \}_j$  tels que

$$E_k \subseteq \bigcup_j ]a_j^k, b_j^k[, \quad \sum_j (b_j^k - a_j^k) \leq \lambda^*(E_k) + \frac{\epsilon}{2^k}.$$

Alors les intervalles  $\{ ]a_j^k, b_j^k[ \}_{j,k}$  forment une famille au plus dénombrable (c'est-à-dire peuvent être rangés en une suite finie ou infinie) telle que

$$\bigcup_k E_k \subseteq \bigcup_k \bigcup_j ]a_j^k, b_j^k[,$$

d'où

$$\lambda^* \left( \bigcup_k E_k \right) \leq \sum_k \sum_j (b_j^k - a_j^k) \leq \sum_k \lambda^*(E_k) + \epsilon.$$

C.Q.F.D.

## 2.2 Ensembles mesurables

La fonction  $\lambda^*$  que l'on vient d'introduire ne devient additive que si on la restreint à la classe des ensembles mesurables. Un ensemble  $E \subseteq \mathbb{R}$  est un **ensemble mesurable** si

$$\text{quel que soit } A \subseteq \mathbb{R}, \lambda^*(A) = \lambda^*(AE) + \lambda^*(AE^c).$$

Puisque, par sous-additivité, on a toujours

$$\text{quel que soit } A \subseteq \mathbb{R}, \lambda^*(A) \leq \lambda^*(AE) + \lambda^*(AE^c),$$

il suffit, pour démontrer qu'un ensemble  $E$  est mesurable, de vérifier l'inégalité

$$\text{quel que soit } A \subseteq \mathbb{R}, \lambda^*(A) \geq \lambda^*(AE) + \lambda^*(AE^c)$$

et, pour ce faire, on peut bien sûr supposer que

$$\lambda^*(A) < +\infty.$$

**Théorème 3** *Pour toute suite finie ou infinie d'ensembles mesurables  $\{E_k\}_k$  deux à deux disjoints, on a*

$$\lambda^* \left( \sum_k E_k \right) = \sum_k \lambda^*(E_k).$$

Démonstration.

Considérons un ensemble  $A \subseteq \mathbb{R}$  quelconque et vérifions d'abord, par récurrence sur  $N$ , que

$$\lambda^* \left( \sum_{k=1}^N AE_k \right) = \sum_{k=1}^N \lambda^*(AE_k). \quad (1)$$

Cet énoncé est en effet trivial pour  $N = 1$  et, s'il est vrai pour  $N$ ,

$$\begin{aligned}\lambda^* \left( \sum_{k=1}^{N+1} AE_k \right) &= \lambda^* \left( \left( \sum_{k=1}^{N+1} AE_k \right) E_{N+1} \right) + \lambda^* \left( \left( \sum_{k=1}^{N+1} AE_k \right) E_{N+1}^c \right) \\ &= \lambda^*(AE_{N+1}) + \lambda^* \left( \sum_{k=1}^N AE_k \right) = \sum_{k=1}^{N+1} \lambda^*(AE_k).\end{aligned}$$

Dans le cas d'une suite finie,  $\{E_k\}_{1 \leq k \leq N}$ , on a donc bien, en prenant  $A = \mathbb{R}$ , que

$$\lambda^* \left( \sum_{k=1}^N E_k \right) = \sum_{k=1}^N \lambda^*(E_k).$$

Dans le cas d'une suite infinie,  $\{E_k\}_{1 \leq k \leq +\infty}$ , on a, pour chaque  $N$ , que

$$\sum_{k=1}^N \lambda^*(E_k) = \lambda^* \left( \sum_{k=1}^N E_k \right) \leq \lambda^* \left( \sum_{k=1}^{+\infty} E_k \right)$$

donc que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda^*(E_k) \leq \lambda^* \left( \sum_{k=1}^{+\infty} E_k \right).$$

La sous-additivité de la mesure extérieure implique l'inégalité opposée. C.Q.F.D.

Nous dénoterons par  $\mathfrak{L}_{\mathbb{R}}$  la famille des ensembles mesurables. Le théorème suivant peut s'énoncer en disant que cette famille forme ce que l'on appelle une **tribu**.

**Théorème 4** *La famille  $\mathfrak{L}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R})$  des ensembles mesurables possède les propriétés suivantes :*

1.  $\mathbb{R}$  est mesurable ;
2. le complémentaire  $E^c$  d'un ensemble mesurable  $E$  est mesurable ;
3. la réunion d'une suite finie ou infinie d'ensembles mesurables  $\{E_k\}_k$  est mesurable ;
4. l'intersection d'une suite finie ou infinie d'ensembles mesurables  $\{E_k\}_k$  est mesurable.

Démonstration.

Les deux premières propriétés sont évidentes de la définition et la quatrième découle, par complémentarité, de la deuxième et de la troisième.

Pour démontrer cette dernière, considérons d'abord le cas de deux ensembles mesurables  $E_1$  et  $E_2$ . Alors, quel que soit  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \lambda^*(A(E_1 \cup E_2)) + \lambda^*(A(E_1 \cup E_2)^c) &= \lambda^*(AE_1 \cup AE_2) + \lambda^*(AE_1^c E_2^c) \\ &= \lambda^*(AE_1 E_2^c + AE_2) + \lambda^*(AE_1^c E_2^c) \leq \lambda^*(AE_1 E_2^c) + \lambda^*(AE_2) + \lambda^*(AE_1^c E_2^c) \\ &= \lambda^*(AE_2^c) + \lambda^*(AE_2) = \lambda^*(A). \end{aligned}$$

Par récurrence sur  $N$ , la réunion de toute suite finie d'ensembles mesurables  $\{E_k\}_{1 \leq k \leq N}$  est donc mesurable et, par complémentarité, ainsi en est-il de leur intersection.

Considérons maintenant une suite infinie d'ensembles mesurables deux à deux disjoints  $\{E_k\}_k$ . En vertu de l'équation (1) page (9), on a, quel que soit  $A \subseteq \mathbb{R}$  et quel que soit  $N$ ,

$$\begin{aligned} \lambda^*(A) &= \lambda^* \left( A \sum_{k=1}^N E_k \right) + \lambda^* \left( A \left( \sum_{k=1}^N E_k \right)^c \right) \\ &= \sum_{k=1}^N \lambda^*(AE_k) + \lambda^* \left( A \left( \sum_{k=1}^N E_k \right)^c \right) \\ &\geq \sum_{k=1}^N \lambda^*(AE_k) + \lambda^* \left( A \left( \sum_{k=1}^{+\infty} E_k \right)^c \right) \end{aligned}$$

de telle sorte que

$$\begin{aligned} \lambda^*(A) &\geq \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda^*(AE_k) + \lambda^* \left( A \left( \sum_{k=1}^{+\infty} E_k \right)^c \right) \\ &\geq \lambda^* \left( A \sum_{k=1}^{+\infty} E_k \right) + \lambda^* \left( A \left( \sum_{k=1}^{+\infty} E_k \right)^c \right) \end{aligned}$$

ce qui montre que  $\sum_k E_k = \bigcup_k E_k$  est mesurable.

Envisageons enfin le cas d'une suite infinie quelconque  $\{E_k\}_k$ . Posons

$$F_1 = E_1, \quad F_2 = E_2 E_1^c, \quad F_3 = E_3 E_1^c E_2^c, \dots, \quad F_n = E_n E_1^c E_2^c \dots E_{n-1}^c, \dots$$

Ces ensembles  $F_k$  sont mesurables et deux à deux disjoints de telle sorte que leur réunion est mesurable. Or

$$\sum_k F_k = \bigcup_k E_k$$

puisque, si  $x \in \bigcup_k E_k$ , il existe un premier indice  $k_x$  tel que  $x \in E_{k_x}$  et alors  $x \in F_{k_x}$ . C.Q.F.D.

**Théorème 5** *Tout intervalle  $I$  est mesurable.*

Démonstration.

Considérons d'abord le cas où  $I = ]a, +\infty[$ . Soit  $A \subseteq \mathbb{R}$  un ensemble quelconque et soient  $]a_k, b_k[$  des intervalles tels que

$$A \subseteq \bigcup_k ]a_k, b_k[ , \quad \sum_k (b_k - a_k) \leq \lambda^*(A) + \epsilon.$$

Considérons les intervalles

$$I'_k = ]a_k, b_k[ \cap I , \quad I''_k = ]a_k, b_k[ \cap I^c.$$

On a

$$\lambda^*(AI) \leq \lambda^* \left( \bigcup_k I'_k \right) \leq \sum_k \lambda^*(I'_k)$$

et

$$\lambda^*(AI^c) \leq \lambda^* \left( \bigcup_k I''_k \right) \leq \sum_k \lambda^*(I''_k)$$

donc

$$\lambda^*(AI) + \lambda^*(AI^c) \leq \sum_k (\lambda^*(I'_k) + \lambda^*(I''_k)) = \sum_k (b_k - a_k) \leq \lambda^*(A) + \epsilon.$$

Les autres cas se ramènent à celui qui vient d'être étudié. Par exemple,

$$]a, b[ = \bigcup_{k=1}^{+\infty} ]a, b - \frac{1}{k}[ = \bigcup_{k=1}^{+\infty} ( ]a, +\infty[ \cap ]b - \frac{1}{k}, +\infty[^c ).$$

C.Q.F.D.

**Théorème 6** *Tout ensemble ouvert  $O$  est mesurable.*

Démonstration.

Si  $x \in O$ , soient

$$a_x = \inf\{a \mid ]a, x[ \subseteq O\} \geq -\infty , \quad b_x = \sup\{b \mid ]x, b[ \subseteq O\} \leq +\infty$$

et  $I_x = ]a_x, b_x[$ . Alors, ou bien  $I_x = I_y$  ou bien  $I_x I_y = \emptyset$ . Les intervalles  $I_x$  distincts sont donc au plus dénombrables (chacun d'eux contient un nombre rationnel différent). Dénnotant ces intervalles par  $J_1, J_2, J_3, \dots$ ,  $O = \sum_n J_n$  peut s'écrire comme réunion d'une suite finie ou infinie d'intervalles ouverts deux à deux disjoints (appelés composantes connexes de  $O$ ). C.Q.F.D.

**Théorème 7** *Tout translaté  $E + x_0$  d'un ensemble mesurable  $E$  est mesurable.*

Démonstration.

Observons d'abord les identités :

$$ST + x_0 = (S + x_0)(T + x_0), \quad (S + x_0)^c = S^c + x_0.$$

Soit  $A \subseteq \mathbb{R}$  un ensemble quelconque. Alors, en vertu des identités précédentes,

$$A(E + x_0) = (A - x_0)E + x_0, \quad A(E + x_0)^c = (A - x_0)E^c + x_0.$$

Par suite, la mesure extérieure étant invariante sous translation,

$$\begin{aligned} \lambda^*(A(E + x_0)) + \lambda^*(A(E + x_0)^c) &= \lambda^*((A - x_0)E) + \lambda^*((A - x_0)E^c) \\ &= \lambda^*(A - x_0) = \lambda^*(A). \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

**Théorème 8** *Tout ensemble  $N$  de mesure extérieure nulle est mesurable.*

Démonstration.

Soit  $A \subseteq \mathbb{R}$  un ensemble quelconque. On a

$$\lambda^*(AN) + \lambda^*(AN^c) = \lambda^*(AN^c) \leq \lambda^*(A).$$

C.Q.F.D.

L'exercice 10, page 17, fournit une description des ensembles qui sont mesurables en utilisant cette notion d'ensemble de mesure nulle.

## 2.3 Mesure

La **mesure**  $\lambda$  est la restriction de la mesure extérieure  $\lambda^*$  à la tribu des ensembles mesurables  $\mathfrak{L}_{\mathbb{R}}$  :

$$\lambda = \lambda^* / \mathfrak{L}_{\mathbb{R}}.$$

**Théorème 9** La mesure  $\lambda : \mathfrak{L}_{\mathbb{R}} \rightarrow [0, +\infty]$  possède les propriétés suivantes :

1.  $\lambda(E + x_0) = \lambda(E)$  ;
2.  $\lambda((a, b)) = b - a$  ;
3. pour toute suite disjointe  $\{E_k\}_k$ ,  $\lambda(\sum_k E_k) = \sum_k \lambda(E_k)$  ;
4. pour toute suite croissante  $E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 \subseteq \dots$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda(E_n) = \lambda \left( \bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k \right).$$

Démonstration.

Seule la quatrième propriété (continuité) n'a pas encore été démontrée. Considérons à nouveau les ensembles

$$F_1 = E_1, F_2 = E_2 E_1^c, F_3 = E_3 E_2^c, \dots, F_n = E_n E_{n-1}^c, \dots$$

Ils sont disjoints et tels que, pour chaque  $n$ ,

$$E_n = \sum_{k=1}^n F_k.$$

Par suite,

$$\lambda(E_n) = \sum_{k=1}^n \lambda(F_k)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda(E_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda(F_k) = \lambda \left( \sum_{k=1}^{+\infty} F_k \right) = \lambda \left( \bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k \right).$$

C.Q.F.D.

Une propriété vraie partout sauf aux points d'un ensemble de mesure nulle est dite vraie **presque partout**. Par exemple, la fonction  $\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}$  est égale à 0 presque partout. Un ensemble dénombrable est toujours de mesure nulle

mais un ensemble peut être de mesure nulle sans être dénombrable. Ainsi en est-il de l'ensemble de Cantor  $K$ .

Exemple. Soit  $K$  l'ensemble des points  $x$  de  $[0, 1]$  dont le développement triadique,

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{3^k}, \quad a_k \in \{0, 1, 2\},$$

ne contient que des 0 ou des 2. Lorsque deux développements sont possibles, il y en a un qui est fini et c'est lui que l'on retient s'il se termine par un 2 :

$$\frac{1}{3^n} = \frac{2}{3^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+2}} + \frac{2}{3^{n+3}} + \dots$$

Par exemple,

$$0, 1a_2a_3a_4\dots \notin K \quad \text{mais} \quad 0, 1 = 0, 0222\dots \in K \quad \text{et} \quad 0, 2 = 0, 1222\dots \in K.$$

Contenant  $2^{\mathbb{N}}$  points, l'ensemble  $K$  n'est pas dénombrable. D'autre part, il est clair que

$$[0, 1]K^c = ]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[ + ]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}[ + ]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}[ + ]\frac{1}{27}, \frac{2}{27}[ + \dots$$

Par suite,

$$\lambda([0, 1]K^c) = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots = 1$$

et  $\lambda(K) = 0$ .

L'axiome du choix affirme que le produit cartésien  $\prod_{\alpha \in A} B_\alpha$  d'une famille d'ensembles non vides  $B_\alpha$  est non vide, c'est-à-dire qu'il est possible de choisir un élément  $x_\alpha$  de chaque ensemble de la famille :  $x_\alpha \in B_\alpha$  pour tout  $\alpha \in A$ . En l'utilisant, on peut obtenir un ensemble non mesurable.

Exemple. Introduisons une relation d'équivalence sur l'intervalle  $[0, 1]$  en posant, pour  $x, y \in [0, 1]$ ,  $x \equiv y$  si  $x - y \in \mathbb{Q}$ . Choisissons, en vertu de l'axiome du choix, un nombre  $x$  dans chaque classe d'équivalence  $[x]$ . Alors, l'ensemble  $E$  des nombres ainsi obtenus n'est pas mesurable. Supposons en effet le contraire. Soit

$$\mathbb{Q} \cap [-1, +1] = \{r_1, r_2, r_3, \dots\}$$

et considérons les ensembles translats  $E_k = E + r_k$ . Ils sont disjoints car si  $x \in E_k E_j$ ,  $x = a + r_k = b + r_j$  avec  $a, b \in E$ . Comme

$$a = b + (r_j - r_k) \equiv b,$$



il faut que  $a = b$ , donc que  $r_k = r_j$ , c'est-à-dire que  $k = j$ . Les relations

$$[0, 1] \subseteq \sum_{k=1}^{+\infty} E_k \subseteq [-1, 2]$$

(chaque  $x \in [0, 1]$  appartient à  $[x']$  pour un  $x' \in E$  approprié, donc à  $E_k$  pour un  $k$  approprié) entraînent donc

$$1 \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda(E_k) \leq 3$$

ce qui est absurde puisque  $\lambda(E_k) = \lambda(E)$  pour tout  $k$ .

L'axiome du choix a une place à part dans la théorie des ensembles à cause, entre autres, de certaines de ses conséquences pour le moins curieuses (voir [7]).

## 2.4 Exercices

1. Montrer que tout recouvrement d'un ensemble  $K \subseteq \mathbb{R}$  compact (fermé et borné) par des ensembles ouverts contient un sous-recouvrement fini.
2. Si  $E \subseteq \mathbb{R}$  et  $k \in \mathbb{R}$ ,

$$kE = \{y \mid y = kx, x \in E\}.$$

Montrer que  $\lambda^*(kE) = |k|\lambda^*(E)$ .

3. Soit  $\mu^* : \mathfrak{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, +\infty]$  la fonction définie par

$$\mu^*(E) = \sup\{(b - a) \mid ]a, b[ \subseteq E\}.$$

Cette fonction est-elle monotone ? invariante sous translation ? Préserve-t-elle la longueur des intervalles ? Est-elle sous-additive ?

4. Répondre aux mêmes questions si la fonction  $\mu^*$  est définie par

$$\mu^*(E) = \text{card}(E\mathbb{Z}).$$

5. Montrer que, si  $E \subseteq \mathbb{R}$  est mesurable et  $k \in \mathbb{R}$ , l'ensemble  $kE$  est mesurable.
6. Montrer que tout ensemble mesurable borné est de mesure finie. La réciproque est-elle vraie ?

7. Un ensemble de mesure nulle peut-il être ouvert ? Doit-il être fermé ?
8. Soit  $\epsilon > 0$  donné. Construire un ensemble ouvert  $E$  de mesure  $\lambda(E) < \epsilon$  qui soit dense dans  $\mathbb{R}$  (c'est-à-dire tel que tout nombre réel puisse s'écrire comme la limite d'une suite de nombres appartenant à  $E$ ).
9. Montrer qu'un ensemble  $E \subseteq \mathbb{R}$  est mesurable si et seulement si à chaque  $\epsilon > 0$  correspond un ensemble ouvert  $O_\epsilon \subseteq \mathbb{R}$  tel que  $E \subseteq O_\epsilon$  et que  $\lambda^*(O_\epsilon E^c) < \epsilon$ .  
Suggestion : considérer d'abord le cas où  $\lambda^*(E) < +\infty$  puis les ensembles  $E_m = E \cap ]-m, +m[$ .
10. Montrer qu'un ensemble  $E \subseteq \mathbb{R}$  est mesurable si et seulement si on peut l'écrire comme la réunion disjointe d'un ensemble de mesure nulle  $N$  et d'un ensemble qui est une réunion au plus dénombrable d'ensembles fermés  $F_k$  :

$$E = N + \bigcup_k F_k.$$

11. Soit  $\mu : \mathfrak{L}_{\mathbb{R}} \rightarrow [0, +\infty]$  une fonction additive. Montrer qu'elle est nécessairement croissante et sous-additive.
12. Soit  $\mu : \mathfrak{L}_{\mathbb{R}} \rightarrow [0, +\infty]$  la fonction définie par

$$\mu(E) = \begin{cases} +\infty & \text{si } E \text{ est infini} \\ \text{card}(E) & \text{si } E \text{ est fini.} \end{cases}$$

Montrer que  $\mu$  est additive et invariante sous translation.

13. Soit  $\{E_k\}_k$  une suite décroissante,

$$E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \supseteq \dots,$$

d'ensembles de mesure finie. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda(E_n) = \lambda \left( \bigcap_{k=1}^{+\infty} E_k \right).$$

L'hypothèse « de mesure finie » est-elle essentielle ?

14. Une fonction  $\mu : \mathfrak{L}_{\mathbb{R}} \rightarrow [0, +\infty]$  possède la propriété d'additivité finie si, pour toute suite disjointe finie  $\{E_k\}_{1 \leq k \leq N}$ ,

$$\mu \left( \sum_{k=1}^N E_k \right) = \sum_{k=1}^N \mu(E_k).$$

Montrer qu'une fonction

$$\mu : \mathfrak{L}_{\mathbb{R}} \rightarrow [0, +\infty]$$

est additive si et seulement si elle continue et possède la propriété d'additivité finie.

### 3 FONCTIONS MESURABLES DE $\mathbb{R}$ VERS $\mathbb{R}$

Dans ce chapitre, nous allons introduire la classe des fonctions mesurables, étudier ses principales propriétés et considérer quelques exemples.

Une fonction  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  est un **fonction mesurable** si, quel que soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ , l'ensemble

$$f^{-1}(] \alpha, +\infty[) = \{x \mid f(x) > \alpha\}$$

est mesurable. En particulier, le domaine de définition  $E$  de  $f$  doit lui-même être un ensemble mesurable puisque

$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \mid f(x) > -n\}.$$

En vertu des identités

$$\{x \mid f(x) < \alpha\} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \{x \mid f(x) > \alpha - \frac{1}{k}\}^c$$

et

$$\{x \mid f(x) > \alpha\} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \{x \mid f(x) < \alpha + \frac{1}{k}\}^c,$$

il revient au même de vérifier que les ensembles de type

$$\{x \mid f(x) < \alpha\}, \{x \mid f(x) \leq \alpha\} \text{ ou } \{x \mid f(x) \geq \alpha\}$$

sont tous mesurables. L'image inverse d'un intervalle quelconque  $(c, d)$  par une fonction mesurable,

$$f^{-1}((c, d)),$$

est donc toujours un ensemble mesurable.

Exemple. Une fonction indicatrice  $f = \mathbb{I}_E$ , définie par

$$\mathbb{I}_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

est mesurable si et seulement si l'ensemble  $E$  l'est.

**Théorème 10** *Toute fonction continue  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  est mesurable.*

Démonstration.

En vertu de la continuité de  $f$ , l'ensemble

$$\{x \mid f(x) > \alpha\}$$

est relativement ouvert dans  $(a, b)$  (c'est-à-dire de la forme  $O \cap (a, b)$  avec  $O$  ouvert) donc mesurable. C.Q.F.D.

**Théorème 11** Soient  $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions mesurables et  $h : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Alors la fonction composée  $h \circ f$  (si elle est définie) et les fonctions  $f + g$  et  $fg$  sont mesurables.

Démonstration.

L'ensemble

$$\{x \mid h(f(x)) > \alpha\} = f^{-1}(h^{-1}(] \alpha, +\infty[))$$

est mesurable parce que l'ensemble  $h^{-1}(] \alpha, +\infty[)$  est relativement ouvert dans  $(a, b)$ , donc de la forme

$$h^{-1}(] \alpha, +\infty[) = \sum_k ]a_k, b_k[ \cap (a, b),$$

ce qui entraîne que

$$f^{-1}(h^{-1}(] \alpha, +\infty[)) = \sum_k f^{-1}(]a_k, b_k[ \cap (a, b)).$$

La fonction  $f + g$  est mesurable en vertu de la relation

$$\{x \mid f(x) + g(x) > \alpha\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (\{x \mid f(x) > r\} \cap \{x \mid g(x) > \alpha - r\}).$$

Finalement, la relation

$$fg = \frac{(f + g)^2 - f^2 - g^2}{2}$$

et la continuité des fonctions  $u \mapsto u^2$  et  $u \mapsto cu, c \in \mathbb{R}$ , entraînent la mesurabilité de la fonction  $fg$ . C.Q.F.D.

Exemple. Une **fonction étagée** est une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dont l'ensemble des valeurs est fini. Si

$$\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_N\}$$

est l'ensemble de ses valeurs non nulles et

$$E_k = f^{-1}(\{a_k\}) = \{x \mid f(x) = a_k\},$$

on a

$$f = \sum_{k=1}^N a_k \mathbb{I}_{E_k}$$

(représentation canonique). La fonction  $f$  est donc mesurable si et seulement si chacun des ensembles  $E_k$  l'est.

Exemple. Si une fonction mesurable  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  ne s'annule pas, la fonction  $1/f$  est mesurable.

Exemple. Si  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  est mesurable, sa valeur absolue  $|f|$ , sa partie positive

$$f^+ = \frac{|f| + f}{2} = \sup\{f, 0\}$$

et sa partie négative

$$f^- = \frac{|f| - f}{2} = \sup\{-f, 0\}$$

le sont aussi et l'on a

$$f = f^+ - f^-, \quad |f| = f^+ + f^-.$$

Exemple. Si  $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$  sont mesurables, les fonctions

$$\sup\{f, g\} = \frac{(f + g) + |f - g|}{2}$$

et

$$\inf\{f, g\} = \frac{(f + g) - |f - g|}{2}$$

le sont aussi.

**Théorème 12** Soient  $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions mesurables. Alors, sur leur domaine de définition respectif, les fonctions

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n, \quad \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n, \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} f_n, \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$$

sont mesurables.

Démonstration.

Considérons par exemple l'enveloppe supérieure  $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ . Son domaine de définition est l'ensemble

$$\{x \mid \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) < +\infty\}.$$

Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , l'ensemble

$$\{x \mid \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) > \alpha\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \mid f_n(x) > \alpha\}$$

est mesurable. Le raisonnement est symétrique pour l'enveloppe inférieure  $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$ . Le théorème découle alors des relations

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} f_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sup_{n \geq k} f_n = \inf_{k \in \mathbb{N}} \sup_{n \geq k} f_n$$

et

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} \inf_{n \geq k} f_n = \sup_{k \in \mathbb{N}} \inf_{n \geq k} f_n$$

sur les domaines de définition appropriés et des équations

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} f_n = \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n$$

sur l'ensemble

$$\{x \mid \limsup_{n \rightarrow +\infty} f_n = \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n\}.$$

C.Q.F.D.

**Théorème 13** Soient  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction mesurable et  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction coïncidant presque partout avec  $f$ . Alors  $g$  est mesurable.

Démonstration.

L'ensemble

$$N = \{x \mid g(x) \neq f(x)\}$$

est de mesure nulle et

$$\{x \mid g(x) > \alpha\} = (\{x \mid g(x) > \alpha\} \cap N) + (\{x \mid f(x) > \alpha\} \cap N^c).$$

Le premier ensemble est mesurable parce que de mesure nulle et le second est mesurable parce que  $f$  l'est. C.Q.F.D.

**Théorème 14** Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction mesurable positive. Il existe une suite de fonctions mesurables positives étagées  $\varphi_n : E \rightarrow \mathbb{R}$  qui croît vers  $f$ .

Démonstration.

Considérons les ensembles

$$E_{n,k} = \left\{ x \mid \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n} \right\}$$

et

$$F_n = \{x \mid n \leq f(x)\}.$$

Alors la fonction étagée

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \mathbb{I}_{E_{n,k}} + n \mathbb{I}_{F_n}$$

est mesurable. Puisque

$$E_{n,k} = E_{n+1,2k-1} + E_{n+1,2k}$$

et que

$$F_n = \sum_{k=n2^{n+1}+1}^{(n+1)2^{n+1}} E_{n+1,k} + F_{n+1},$$

on a

$$\varphi_n \leq \varphi_{n+1}.$$

D'autre part, en chaque point  $x \in E$ , on a, pour  $n$  assez grand, que

$$f(x) - \frac{1}{2^n} \leq \varphi_n(x) \leq f(x).$$

C.Q.F.D.

### 3.1 Exercices

1. Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. Montrer qu'elle est mesurable si et seulement si les ensembles

$$\{x \mid f(x) > r\}$$

le sont pour tout  $r \in \mathbb{Q}$ .



2. Vérifier les relations suivantes :

$$\mathbb{I}_{EF} = \mathbb{I}_E \mathbb{I}_F, \mathbb{I}_{E+F} = \mathbb{I}_E + \mathbb{I}_F, \mathbb{I}_{E \cup F} = \mathbb{I}_E + \mathbb{I}_F - \mathbb{I}_{EF}, \mathbb{I}_{\bigcup_n E_n} = \sup \mathbb{I}_{E_n}.$$

3. Soit  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction monotone. Montrer qu'elle est mesurable.
4. Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction mesurable et  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Montrer que la fonction  $x \mapsto f(x + x_0)$  est mesurable.
5. Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction mesurable et  $k \in \mathbb{R}$ . Montrer que la fonction  $x \mapsto f(kx)$  est mesurable.
6. Soit  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction admettant une primitive (c'est-à-dire telle qu'il existe une fonction  $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  dont elle est la dérivée :  $f = F'$ ). Montrer qu'elle est mesurable.
7. Soient  $E \subseteq \mathbb{R}$  un ensemble de mesure finie et  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction mesurable. Montrer qu'à chaque  $\epsilon > 0$  correspond  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$\lambda\{x \mid |f(x)| > N\} < \epsilon.$$

8. Montrer que toute fonction mesurable est limite simple d'une suite de fonctions mesurables étagées.
9. Montrer que toute fonction mesurable bornée est limite uniforme d'une suite de fonctions mesurables étagées.

## 4 INTÉGRATION SUR $\mathbb{R}$

Dans ce chapitre, nous allons définir l'intégrale d'une fonction mesurable  $f$  sur un ensemble mesurable  $E$ ,

$$\int_E f,$$

et établir ses trois propriétés fondamentales qui sont la linéarité, la positivité et l'additivité. Pour ce faire, nous utiliserons beaucoup le fait que l'équation

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n = \int_E \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$$

est valable sous des hypothèses très générales dans la théorie de Lebesgue (théorème de la convergence monotone, théorème de la convergence dominée et lemme de Fatou). Nous terminerons par un théorème justifiant la dérivation sous le signe intégral.

Soit  $E \subseteq \mathbb{R}$  un ensemble mesurable. L'intégrale sur  $E$  d'une fonction mesurable est définie en trois étapes.

Soit d'abord

$$\varphi = \sum_{k=1}^N a_k \mathbb{I}_{E_k}$$

une fonction mesurable positive étagée représentée sous sa forme canonique (c'est-à-dire que les  $a_k$  sont les valeurs distinctes non nulles de  $\varphi$ ). L'intégrale de  $\varphi$  sur  $E$  est définie par l'équation

$$\int_E \varphi = \sum_{k=1}^N a_k \lambda(E E_k).$$

On a donc à priori que

$$0 \leq \int_E \varphi \leq +\infty.$$

Un moment de réflexion montre que l'équation

$$\int_E \varphi = \sum_{k=1}^{N'} a'_k \lambda(E E'_k)$$

est vraie dès que, dans une représentation

$$\varphi = \sum_{k=1}^{N'} a'_k \mathbb{I}_{E'_k},$$

les ensembles mesurables  $E'_k$  sont deux à deux disjoints, même si les  $a'_k$  associés ne sont pas tous distincts. En effet, chaque valeur non nulle  $a'_k$  est alors nécessairement égale à l'une des valeurs  $a_j$ , les ensembles  $E'_k$  correspondant à l'une de ces valeurs non nulle forment une partition de l'ensemble  $E_j$  correspondant et la mesure est additive.

Les trois propriétés suivantes sont des conséquences immédiates de la définition :

$$\lambda(E) = 0 \text{ implique } \int_E \varphi = 0,$$

$$F \subseteq E \text{ implique } \int_E \varphi \mathbb{I}_F = \int_F \varphi,$$

et

$$0 \leq \varphi \leq \psi \text{ sur } E \text{ implique } \int_E \varphi \leq \int_E \psi.$$

Pour vérifier la troisième, on s'aide de la remarque qui vient d'être faite : si

$$\varphi = \sum_{k=1}^{N'} a'_k \mathbb{I}_{E'_k} \text{ et } \psi = \sum_{j=1}^{M'} b'_j \mathbb{I}_{F'_j},$$

avec

$$\sum_{k=1}^{N'} E'_k = \sum_{j=1}^{M'} F'_j = \mathbb{R},$$

il faut utiliser les représentations

$$\varphi = \sum_{k=1}^{N'} \sum_{j=1}^{M'} a'_k \mathbb{I}_{E'_k F'_j} \text{ et } \psi = \sum_{k=1}^{N'} \sum_{j=1}^{M'} b'_j \mathbb{I}_{E'_k F'_j}.$$

Si ensuite  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction mesurable positive, son intégrale sur  $E$  est définie par

$$\int_E f = \sup \left\{ \int_E \varphi \mid 0 \leq \varphi \leq f \text{ sur } E \right\}.$$

Encore ici, on a à priori

$$0 \leq \int_E f \leq +\infty.$$

Les trois propriétés suivantes :

$$\lambda(E) = 0 \text{ implique } \int_E f = 0,$$

$$F \subseteq E \text{ implique } \int_E f \mathbb{I}_F = \int_F f,$$

et

$$0 \leq f \leq g \text{ sur } E \text{ implique } \int_E f \leq \int_E g$$

découlent directement de cette définition et des propriétés correspondantes pour les fonctions étagées.

Si enfin  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction mesurable quelconque, nous dirons qu'elle est une **fonction intégrable** (ou sommable) sur  $E$  si

$$\int_E |f| < +\infty$$

et nous poserons alors

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-.$$

Cette définition a un sens puisqu'alors, nécessairement,

$$\int_E f^+ < +\infty \text{ et } \int_E f^- < +\infty.$$

Nous dénoterons par  $\mathcal{L}^1(E)$  la classe des fonctions intégrables sur  $E$ .

Remarque. Lorsque  $E$  est un intervalle  $[a, b]$  avec  $a \leq b$ , on conserve la notation usuelle pour l'intégrale, en indiquant si nécessaire la variable d'intégration : on écrit ainsi

$$\int_{[a,b]} f = \int_a^b f = \int_a^b f(x) dx$$

et

$$\int_{\mathbb{R}} f = \int_{-\infty}^{+\infty} f = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$$

Exemple. La fonction  $\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}$  est intégrable sur tout intervalle  $(a, b)$  et

$$\int_a^b \mathbb{I}_{\mathbb{Q}} = 0.$$

Exemple. Une fonction mesurable bornée est intégrable sur tout ensemble de mesure finie. En particulier, une fonction continue est intégrable sur tout intervalle compact.

**Théorème 15 (convergence monotone)** Soient  $E \subseteq \mathbb{R}$  un ensemble mesurable et  $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions mesurables positives qui croissent vers une fonction  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n = \int_E f.$$

Démonstration.

Il est clair que  $f$  est une fonction mesurable positive et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n \leq \int_E f.$$

Pour démontrer l'inégalité réciproque, soient  $\epsilon > 0$  et  $\varphi$  une fonction mesurable positive étagée telle que  $\varphi \leq f$  et considérons les ensembles

$$A_n = \{x \mid f_n(x) \geq (1 - \epsilon)\varphi(x)\}.$$

Ils sont mesurables et, par hypothèse, croissent vers  $E$ . Si

$$\varphi = \sum_{k=1}^N a_k \mathbb{I}_{E_k}$$

est la représentation canonique de  $\varphi$ , on a

$$\int_E f_n \geq \int_E (1 - \epsilon)\varphi \mathbb{I}_{A_n} = \sum_{k=1}^N (1 - \epsilon)a_k \lambda(A_n E_k) = (1 - \epsilon) \sum_{k=1}^N a_k \lambda(A_n E_k).$$

Utilisant la continuité de la mesure, on en déduit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n \geq (1 - \epsilon) \sum_{k=1}^N a_k \lambda(E E_k) = (1 - \epsilon) \int_E \varphi.$$

Le nombre  $\epsilon$  et la fonction  $\varphi$  étant arbitraires, ceci entraîne le résultat. C.Q.F.D.

Remarque. Soient  $E \subseteq \mathbb{R}$  un ensemble mesurable et  $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions mesurables positives qui croissent vers  $+\infty$  sur  $E$ . Si  $\lambda(E) > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n = +\infty.$$

En effet, posant

$$A_n = \{x \mid f_n(x) > K\},$$

on a, quel que soit  $K > 0$ ,

$$\int_E f_n \geq \int_{A_n} f_n \geq K\lambda(A_n)$$

donc, par continuité,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n \geq K\lambda(E).$$

Le nombre  $K > 0$  étant arbitraire, la remarque se trouve justifiée.

Exemple. Soit  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction mesurable positive bornée. Alors

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \lambda \left\{ x \mid \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n} \right\}.$$

**Théorème 16** Soient  $E \subseteq \mathbb{R}$  un ensemble mesurable,  $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions intégrables sur  $E$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Alors  $\alpha f + \beta g$  est intégrable sur  $E$  et

$$\int_E \alpha f + \beta g = \alpha \int_E f + \beta \int_E g.$$

Démonstration.

La démonstration se fait en plusieurs étapes. Soient d'abord  $\varphi$  et  $\psi$  deux fonctions mesurables positives étagées. Représentons-les sous la forme

$$\varphi = \sum_{k=1}^{N'} a'_k \mathbb{I}_{E'_k}, \quad \psi = \sum_{j=1}^{M'} b'_j \mathbb{I}_{F'_j}$$

les ensembles mesurables  $E'_k$  et  $F'_j$  étant tels que

$$\sum_{k=1}^{N'} E'_k = \sum_{j=1}^{M'} F'_j = \mathbb{R}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_E \varphi + \int_E \psi &= \sum_{k=1}^{N'} a'_k \lambda(E E'_k) + \sum_{j=1}^{M'} b'_j \lambda(E F'_j) \\ &= \sum_{k=1}^{N'} \sum_{j=1}^{M'} a'_k \lambda(E E'_k F'_j) + \sum_{k=1}^{N'} \sum_{j=1}^{M'} b'_j \lambda(E E'_k F'_j) \\ &= \sum_{k=1}^{N'} \sum_{j=1}^{M'} (a'_k + b'_j) \lambda(E E'_k F'_j) = \int_E (\varphi + \psi). \end{aligned}$$

Soient ensuite  $f$  et  $g$  deux fonctions mesurables positives. Il existe deux suites de fonctions mesurables positives étagées  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  et  $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  qui croissent vers  $f$  et  $g$  respectivement. On a donc

$$\begin{aligned} \int_E f + \int_E g &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E \varphi_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E \psi_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_E \varphi_n + \int_E \psi_n \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E (\varphi_n + \psi_n) = \int_E (f + g) \end{aligned}$$

(en vertu du théorème de la convergence monotone).

Soient enfin  $f$  et  $g$  deux fonctions intégrables. Alors  $h = f + g$  est intégrable puisque

$$\int_E |h| \leq \int_E (|f| + |g|) = \int_E |f| + \int_E |g| < +\infty.$$

De plus, on a

$$h^+ + f^- + g^- = f^+ + g^+ + h^-$$

donc

$$\int_E h^+ + \int_E f^- + \int_E g^- = \int_E f^+ + \int_E g^+ + \int_E h^-$$

c'est-à-dire

$$\int_E h = \int_E f + \int_E g.$$

D'autre part, si  $\alpha \geq 0$ , il est clair que

$$\int_E \alpha \varphi = \alpha \int_E \varphi$$

pour toute fonction mesurable positive étagée  $\varphi$ , donc que, pour toute fonction mesurable positive  $f$ ,

$$\int_E \alpha f = \alpha \int_E f.$$

Pour une fonction intégrable  $f$  quelconque,  $\alpha f$  est intégrable (en appliquant ce qui précède à  $\alpha |f|$ ) et

$$\int_E \alpha f = \int_E (\alpha f)^+ - \int_E (\alpha f)^- = \int_E \alpha f^+ - \int_E \alpha f^- = \alpha \left( \int_E f^+ - \int_E f^- \right) = \alpha \int_E f.$$

Si, enfin,  $\alpha < 0$ ,  $\alpha f = (-\alpha)(-f)$  est intégrable et

$$\begin{aligned}\int_E \alpha f &= \int_E (-\alpha)(-f) = (-\alpha) \int_E (-f) = (-\alpha) \left( \int_E f^- - \int_E f^+ \right) \\ &= \alpha \left( \int_E f^+ - \int_E f^- \right) = \alpha \int_E f.\end{aligned}$$

C.Q.F.D.

Remarque. Si  $E = A + B$  est une partition mesurable de  $E$  et  $f$  est intégrable sur  $E$ , on a

$$\int_E f = \int_A f + \int_B f$$

(additivité finie de l'intégrale) en appliquant le théorème précédent aux fonctions  $f\mathbb{I}_A$  et  $f\mathbb{I}_B$ .

**Théorème 17** Soient  $E \subseteq \mathbb{R}$  un ensemble mesurable,  $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions intégrables sur  $E$  telles que  $f \leq g$  sur  $E$ . Alors

$$\int_E f \leq \int_E g$$

avec égalité si et seulement si  $f = g$  presque partout sur  $E$ .

Démonstration.

On a

$$0 \leq \int_E (g - f) = \int_E g - \int_E f.$$

L'égalité a lieu dès que  $f = g$  presque partout sur  $E$  puisque, posant

$$A = \{x \mid f(x) = g(x)\}, \quad B = \{x \mid f(x) \neq g(x)\},$$

on a

$$\int_E (g - f) = \int_A (g - f) + \int_B (g - f) = 0.$$

Réciproquement, observons que si  $h : E \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction mesurable positive telle que  $\int_E h = 0$ , on doit avoir  $h = 0$  presque partout sur  $E$  (on prendra ici  $h = g - f$ ). Posant en effet

$$A_k = \left\{x \mid h(x) > \frac{1}{k}\right\},$$



on a

$$0 = \int_E h \geq \int_E h \mathbb{1}_{A_k} \geq \frac{1}{k} \lambda(A_k)$$

de telle sorte que

$$\lambda(A_k) = 0$$

pour tout  $k > 0$  et donc que

$$\lambda(\{x \mid h(x) > 0\}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda(A_k) = 0.$$

C.Q.F.D.

Remarque. L'inégalité du triangle,

$$\left| \int_E g \right| \leq \int_E |g|,$$

s'obtient du théorème précédent en y choisissant  $f = \pm g$ .

On résume les deux théorèmes précédents en disant que  $\mathcal{L}^1(E)$  est un espace vectoriel réel sur lequel

$$f \mapsto \int_E f$$

est une forme linéaire positive. L'espace  $\mathcal{L}^1([a, b])$  contient l'espace  $\mathcal{C}([a, b])$  des fonctions continues.

**Théorème 18** Soient  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Alors, pour tout  $x \in ]a, b[$ ,

$$F'(x) = f(x).$$

Démonstration.

Les propriétés de linéarité, de positivité et d'additivité finie de l'intégrale entraînent que

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt$$

si  $h > 0$  et

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| \leq \frac{1}{|h|} \int_{x+h}^x |f(t) - f(x)| dt$$

si  $h < 0$ . Dans les deux cas,

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| \leq \sup_{|t-x| \leq |h|} |f(t) - f(x)|$$

ce qui permet de conclure. C.Q.F.D.

Remarque. Le théorème précédent montre que, pour une fonction  $f$  continue sur un intervalle compact  $[a, b]$ , l'intégrale de Lebesgue coïncide avec l'intégrale de Riemann et peut être évaluée au moyen du théorème fondamental du calcul : si  $F$  est une primitive quelconque de  $f$  (c'est-à-dire une fonction  $F$  telle que  $F' = f$ ),

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Il faut cependant noter qu'il existe des fonctions continues telles que

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f \text{ existe}$$

bien que

$$\int_a^{+\infty} |f| = +\infty.$$

Une fonction à valeurs dans  $[0, +\infty]$  apparaît dans le théorème suivant. La mesurabilité et l'intégrale d'une telle fonction sont définies exactement comme pour les fonctions positives (à valeur dans  $[0, +\infty[$ ). Si l'ensemble  $E_\infty$  des points où elle est infinie est de mesure strictement positive, son intégrale est aussi infinie alors que si cet ensemble est de mesure nulle, l'intégrale peut être finie ou infinie. On peut alors redéfinir la fonction sur l'ensemble  $E_\infty$  (en la posant égale à 0 par exemple) sans modification substantielle de ses autres propriétés. Comme nous l'avons remarqué, le théorème de la convergence monotone reste valable si la fonction limite est à valeurs dans  $[0, +\infty]$ .

**Théorème 19 (Fatou)** Soient  $E \subseteq \mathbb{R}$  un ensemble mesurable et  $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions mesurables positives. Alors

$$\int_E \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n.$$

Démonstration.

Les fonctions  $g_n : E \rightarrow \mathbb{R}$  définies par les relations

$$g_n = \inf_{k \geq n} f_k$$

forment une suite croissante de fonctions mesurables positives telle que

$$g_n \leq f_n.$$

D'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E g_n \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n.$$

En vertu du théorème de la convergence monotone,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E g_n = \int_E \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n = \int_E \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n$$

ce qui termine la démonstration. C.Q.F.D.

Remarque. En vertu du lemme de Fatou, pour montrer que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n < +\infty$$

presque partout sur  $E$ , il suffit de montrer que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n < +\infty.$$

**Théorème 20 (convergence dominée)** Soient  $E \subseteq \mathbb{R}$  un ensemble mesurable et  $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions intégrables qui convergent vers une fonction  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Supposons qu'il existe une fonction intégrable  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $|f_n(x)| \leq g(x)$  pour  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout  $x \in E$ . Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n = \int_E f.$$

Démonstration.

On a  $|f| \leq g$  et la fonction  $f$  est intégrable. Appliquons le lemme de Fatou aux fonctions  $2g - |f - f_n|$ . On obtient

$$\begin{aligned} \int_E 2g &= \int_E \liminf_{n \rightarrow +\infty} (2g - |f - f_n|) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_E (2g - |f - f_n|) \\ &= \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_E 2g - \int_E |f - f_n| \right) = \int_E 2g - \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_E |f - f_n|. \end{aligned}$$

Ceci implique

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E |f - f_n| = 0$$

et, à fortiori,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n = \int_E f.$$

C.Q.F.D.

**Théorème 21** Soient  $f_k : E \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions mesurables telles que la série  $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k$  converge sur  $E$ . Alors

$$\int_E \sum_{k=1}^{+\infty} f_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_E f_k$$

pourvu que les fonctions  $f_k$  soient positives sur  $E$  ou pourvu que la série  $\sum_{k=1}^{+\infty} |f_k|$  converge et que sa somme soit intégrable sur  $E$ .

Démonstration.

On a

$$\begin{aligned} \int_E \sum_{k=1}^{+\infty} f_k &= \int_E \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E \sum_{k=1}^n f_k \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \int_E f_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_E f_k, \end{aligned}$$

la permutation de la limite et de l'intégrale étant justifiée par le théorème de la convergence monotone lorsque les fonctions  $f_k$  sont positives et par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue lorsque la série  $\sum_{k=1}^{+\infty} |f_k|$  converge vers une fonction intégrable : le rôle des fonctions  $f_n$  dans ce théorème est ici joué par les sommes partielles  $\sum_{k=1}^n f_k$ ,

$$f_n \longrightarrow \sum_{k=1}^n f_k,$$

et celui de la fonction  $g$  par la somme  $\sum_{k=1}^{+\infty} |f_k|$  :

$$g \longrightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} |f_k|.$$

C.Q.F.D.

Remarque. Soient  $A_k \subseteq \mathbb{R}$  des ensembles mesurables deux à deux dis-joints et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction mesurable. Alors

$$\int_{\sum_{k=1}^{+\infty} A_k} f = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{A_k} f$$

pourvu que  $f$  soit positive sur  $\sum_{k=1}^{+\infty} A_k$  ou pourvu que  $f$  soit intégrable sur  $\sum_{k=1}^{+\infty} A_k$  (additivité de l'intégrale). Ceci suit en effet du théorème précédent en l'appliquant à l'ensemble  $E = \mathbb{R}$  et aux fonctions  $f_k = f \mathbb{I}_{A_k}$ .

**Théorème 22** Soit  $f : [a, b] \times (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction admettant une dérivée partielle par rapport à son deuxième argument. Supposons que les fonctions

$$x \mapsto f(x, t) \text{ et } x \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$$

soient intégrables pour chaque  $t \in (\alpha, \beta)$ , que la fonction

$$t \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$$

soit continue pour chaque  $x \in [a, b]$  et supposons enfin que la fonction

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$$

soit bornée sur  $[a, b] \times (\alpha, \beta)$ . Alors

$$\frac{d}{dt} \int_a^b f(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx.$$

Démonstration.

En vertu du théorème des accroissements finis, il existe pour chaque  $x \in [a, b]$  un nombre  $\theta_x(t) \in [0, 1]$  tel que

$$\int_a^b \frac{f(x, t+h) - f(x, t)}{h} dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t + \theta_x(t)h) dx.$$

Puisque

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t + \theta_x(t)h) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$$

et puisqu'il existe une constante  $K > 0$  telle que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t + \theta_x(t)h) \right| \leq K,$$

le théorème de la convergence dominée (qui reste valable même si  $h$  approche 0 de façon continue) implique

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_a^b f(x, t) dx &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b \frac{f(x, t+h) - f(x, t)}{h} dx \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t + \theta_x(t)h) dx = \int_a^b \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t + \theta_x(t)h) dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx. \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

#### 4.1 Exercices

1. Soit  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ . Montrer que, pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}$ , la fonction  $x \mapsto f(x + x_0)$  est intégrable et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x + x_0) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$$

2. Soit  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ . Montrer que, pour tout  $k \in \mathbb{R}$ ,  $k \neq 0$ , la fonction  $x \mapsto f(kx)$  est intégrable et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(kx) dx = \frac{1}{|k|} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$$

3. Soit  $f \in \mathcal{L}^1(E)$ . Montrer que, quel que soit  $\epsilon > 0$ , on peut trouver une fonction mesurable étagée  $\varphi$  telle que

$$\int_E |f - \varphi| < \epsilon.$$

4. Soient  $f \in \mathcal{L}^1(E)$  et  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction coïncidant presque partout avec  $f$ . Montrer que  $g \in \mathcal{L}^1(E)$  et que  $\int_E g = \int_E f$ .
5. Obtenir la propriété de continuité de la mesure à partir du théorème de la convergence monotone.

6. Dédurre le théorème de la convergence monotone du lemme de Fatou.
7. Montrer que l'on peut avoir inégalité stricte dans le lemme de Fatou.
8. Le lemme de Fatou reste-t-il vrai si on y remplace  $\liminf$  par  $\limsup$ ?
9. Soit

$$f_n(x) = ne^{-n|x|}.$$

Vérifier que, pour tout  $x \neq 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0.$$

Calculer ensuite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx.$$

10. Vérifier que les fonctions

$$f_n = \frac{1}{n} \mathbb{I}_{[0, n^2]}$$

convergent vers 0 uniformément sur l'axe réel. Calculer ensuite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n.$$

11. Soit  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ . Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{|x| > n} f = 0.$$

12. Soit  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ . Est-il nécessairement vrai que

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = 0?$$

13. Soit  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ . Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin^n x dx.$$

14. Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx.$$

15. Montrer que

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{\sin x}{x} dx \text{ existe}$$

puis vérifier que

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = +\infty.$$

Suggestion. Pour la première partie de la question, intégrer par parties.

16. Soient  $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions mesurables positives qui décroissent vers une fonction  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n = \int_E f$$

pourvu que  $f_1$  soit intégrable. Cette dernière condition est-elle indispensable ?

17. Soient  $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions intégrables qui croissent vers une fonction  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n = \int_E f$$

pourvu qu'il existe  $K \in \mathbb{R}$  tel que

$$\int_E f_n \leq K$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

18. Soient  $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions mesurables positives qui convergent vers une fonction  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  de telle sorte que  $f_n \leq f$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n = \int_E f.$$

19. Soient  $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions intégrables telles que  $|f_n| \leq g$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  où la fonction  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  est intégrable. Montrer qu'alors

$$\int_E \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n \leq \int_E \limsup_{n \rightarrow +\infty} f_n.$$

20. Soient  $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions mesurables qui convergent vers une fonction  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g_n : E \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions intégrables qui



convergent vers une fonction intégrable  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  et supposons que  $|f_n| \leq g_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que dans ce cas

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n = \int_E f \quad \text{pourvu que} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E g_n = \int_E g.$$

Suggestion : considérer les fonctions  $g + g_n - |f - f_n|$ .

21. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

22. Montrer que, quel que soit  $t > 0$ , la fonction  $x \mapsto e^{-x} x^{t-1}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

23. Justifier la dérivation sous le signe intégral :

$$\frac{d}{dt} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} \log x dx.$$

## 5 MESURE ET INTÉGRATION ABSTRAITES

Dans ce chapitre, nous allons généraliser les notions d'ensemble mesurable, de fonction mesurable, de mesure et d'intégrale rencontrées précédemment.

### 5.1 Ensembles mesurables

Soit  $X$  un ensemble. Une **tribu**  $\mathfrak{T}$  sur  $X$  est une famille de parties de  $X$ ,  $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ , telle que :

**T1**  $X \in \mathfrak{T}$  ;

**T2**  $E \in \mathfrak{T}$  implique  $E^c = X \setminus E \in \mathfrak{T}$  ;

**T3**  $E_n \in \mathfrak{T}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  implique  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathfrak{T}$ .

Les parties de  $X$  appartenant à  $\mathfrak{T}$  sont les **parties mesurables** de  $X$  et la paire  $(X, \mathfrak{T})$  forme un **espace mesurable**.

Une **algèbre de Boole** (ou un clan)  $\mathfrak{A}$  sur  $X$  est une famille de parties de  $X$  telle que :

**A1**  $X \in \mathfrak{A}$  ;

**A2**  $E \in \mathfrak{A}$  implique  $E^c = X \setminus E \in \mathfrak{A}$  ;

**A3**  $E_1, E_2 \in \mathfrak{A}$  implique  $E_1 \cup E_2 \in \mathfrak{A}$ .

Toute tribu est une algèbre de Boole.

Soit  $\mathfrak{G}$  une famille quelconque de parties de  $X$ . La **tribu engendrée** par  $\mathfrak{G}$ ,  $\mathfrak{T}(\mathfrak{G})$ , est l'intersection de toutes les tribus contenant  $\mathfrak{G}$  – il y a toujours au moins une telle tribu, nommément  $\mathfrak{P}(X)$  et l'intersection d'une famille de tribus est encore une tribu. C'est donc la plus petite tribu contenant  $\mathfrak{G}$ . On a de même la notion d'**algèbre de Boole engendrée** par  $\mathfrak{G}$ ,  $\mathfrak{A}(\mathfrak{G})$ .

Une **topologie**  $\mathfrak{D}$  sur  $X$  est une famille de parties de  $X$  telle que :

**O1**  $\emptyset, X \in \mathfrak{D}$  ;

**O2**  $O_\alpha \in \mathfrak{D}$  pour tout  $\alpha \in A$  implique  $\bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha \in \mathfrak{D}$  ;

**O3**  $O_1, O_2 \in \mathfrak{D}$  implique  $O_1 O_2 \in \mathfrak{D}$ .

Les parties de  $X$  appartenant à  $\mathfrak{D}$  sont les **parties ouvertes** de  $X$  et la paire  $(X, \mathfrak{D})$  forme un **espace topologique**. Les compléments des parties ouvertes sont les **parties fermées**.

Exemple. La **tribu borélienne** sur un espace topologique  $X$ ,  $\mathfrak{B}_X$ , est la tribu engendrée par les ouverts  $\mathfrak{O}$  de  $X$  :  $\mathfrak{B}_X = \mathfrak{T}(\mathfrak{O})$ . On a donc

$$\mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathfrak{L}_{\mathbb{R}}.$$

Puisque toute partie ouverte de  $\mathbb{R}$  peut s'écrire comme la réunion d'une suite finie ou infinie d'intervalles ouverts,  $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$  est aussi engendrée par les intervalles ouverts  $]a, b[$  — mais aussi par les seuls intervalles de la forme  $] - \infty, b]$ .

Exemple. Soient  $(X_1, \mathfrak{T}_1)$  et  $(X_2, \mathfrak{T}_2)$  deux espaces mesurables. La **tribu produit**,  $\mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2$ , est la tribu sur l'ensemble produit  $X_1 \times X_2$  engendrée par la famille  $\mathfrak{R}$  des **rectangles mesurables**, c'est-à-dire par les ensembles  $R$  de la forme

$$R = E_1 \times E_2 \text{ avec } E_1 \in \mathfrak{T}_1 \text{ et } E_2 \in \mathfrak{T}_2.$$

Soient  $X_1$  un ensemble,  $(X_2, \mathfrak{T}_2)$  un espace mesurable et  $f : X_1 \rightarrow X_2$  une application. L'**image réciproque** de  $\mathfrak{T}_2$  par  $f$ ,

$$f^{-1}(\mathfrak{T}_2) = \{f^{-1}(E_2) \mid E_2 \in \mathfrak{T}_2\}$$

est une tribu sur  $X_1$ .

Exemple. Soient  $(X, \mathfrak{T})$  un espace mesurable et  $X' \in \mathfrak{T}$ . La **trace**  $\mathfrak{T}'$  de  $\mathfrak{T}$  sur  $X'$  est l'image réciproque de  $\mathfrak{T}$  par l'injection canonique  $i : X' \rightarrow X, i(x) = x$ . En d'autres mots,

$$\mathfrak{T}' = \{E' \subseteq X' \mid E' = EX', E \in \mathfrak{T}\}.$$

**Théorème 23** Soient  $X_1$  un ensemble,  $(X_2, \mathfrak{T}_2)$  un espace mesurable et  $f : X_1 \rightarrow X_2$  une application. Si  $\mathfrak{T}_2$  est engendrée par  $\mathfrak{G}_2$ , alors  $\mathfrak{T}_1 = f^{-1}(\mathfrak{T}_2)$  est engendrée par  $\mathfrak{G}_1 = f^{-1}(\mathfrak{G}_2)$ . Symboliquement,

$$\mathfrak{T} \circ f^{-1} = f^{-1} \circ \mathfrak{T}.$$

Démonstration.

Soit  $\mathfrak{G}_1$  la tribu engendrée par  $\mathfrak{G}_1$ . Puisque  $\mathfrak{T}_1$  contient  $\mathfrak{G}_1$ ,  $\mathfrak{T}_1$  contient  $\mathfrak{G}_1$ . Considérons alors

$$\mathfrak{G}_2 = \{E_2 \subseteq X_2 \mid f^{-1}(E_2) \in \mathfrak{G}_1\}.$$

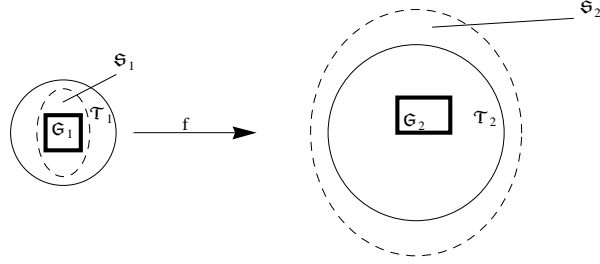


FIG. 1 – Image inverse des générateurs

C'est une tribu sur  $X_2$  qui contient  $\mathfrak{G}_2$  donc qui contient  $\mathfrak{T}_2$ . D'où

$$\mathfrak{T}_1 = f^{-1}(\mathfrak{T}_2) \subseteq f^{-1}(\mathfrak{G}_2) \subseteq \mathfrak{G}_1.$$

C.Q.F.D.

Si  $(X_1, \mathfrak{T}_1)$  est un espace mesurable,  $X_2$  est un ensemble et  $f : X_1 \rightarrow X_2$  est une application, l'**image directe** de  $\mathfrak{T}_1$  par  $f$  est la tribu  $f_*(\mathfrak{T}_1)$  sur  $X_2$  définie par

$$f_*(\mathfrak{T}_1) = \{E_2 \subseteq X_2 \mid f^{-1}(E_2) \in \mathfrak{T}_1\}.$$

## 5.2 Fonctions mesurables

Soient  $(X_1, \mathfrak{T}_1)$  et  $(X_2, \mathfrak{T}_2)$  deux espaces mesurables. Une application  $f : X_1 \rightarrow X_2$  est une **application mesurable** si

$$f^{-1}(\mathfrak{T}_2) \subseteq \mathfrak{T}_1.$$

Si  $\mathfrak{G}_2$  est un ensemble de générateurs pour  $\mathfrak{T}_2$ , alors, en vertu du théorème (23) page (42),  $f$  est mesurable si et seulement si

$$f^{-1}(\mathfrak{G}_2) \subseteq \mathfrak{T}_1.$$

$\mathcal{M}((X_1, \mathfrak{T}_1), (X_2, \mathfrak{T}_2))$  désigne l'espace des applications mesurables et, en particulier,  $\mathcal{L}^0(X, \mathfrak{T}) = \mathcal{M}((X, \mathfrak{T}), (\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}))$  est l'espace des fonctions mesurables sur  $X$ . Ainsi,

$$f \in \mathcal{L}^0(X, \mathfrak{T})$$

si et seulement si

$$\{x \mid f(x) \leq b\} \in \mathfrak{T}$$

pour tout  $b \in \mathbb{R}$ .

Exemple. Soient  $(X_1, \mathcal{D}_1)$ ,  $(X_2, \mathcal{D}_2)$  deux espaces topologiques. Une application  $f : X_1 \rightarrow X_2$  est continue si

$$f^{-1}(\mathcal{D}_2) \subseteq \mathcal{D}_1.$$

$\mathcal{C}((X_1, \mathcal{D}_1), (X_2, \mathcal{D}_2))$  désigne l'espace des applications continues et, en particulier,  $\mathcal{C}(X, \mathcal{D}) = \mathcal{C}((X, \mathcal{D}), (\mathbb{R}, \mathcal{D}_{\mathbb{R}}))$  est l'espace des fonctions continues sur  $X$ . On a donc

$$\mathcal{C}((X_1, \mathcal{D}_1), (X_2, \mathcal{D}_2)) \subseteq \mathcal{M}((X_1, \mathfrak{B}_{X_1}), (X_2, \mathfrak{B}_{X_2}))$$

et

$$\mathcal{C}(X, \mathcal{D}) \subseteq \mathcal{L}^0(X, \mathfrak{B}_X).$$

Exemple. Soient  $(X, \mathfrak{T})$  un espace mesurable,  $X' \in \mathfrak{T}$  et  $f \in \mathcal{L}^0(X, \mathfrak{T})$ . Alors la restriction  $f' = f|_{X'}$  de  $f$  à  $X'$  est mesurable relativement à la trace  $\mathfrak{T}'$  de  $\mathfrak{T}$  sur  $X'$ . Réciproquement, toute fonction

$$f' \in \mathcal{L}^0(X', \mathfrak{T}')$$

peut être prolongée à une fonction

$$f \in \mathcal{L}^0(X, \mathfrak{T})$$

en posant (par exemple)

$$f(x) = 0 \text{ si } x \notin X'.$$

Soient  $(X_1, \mathfrak{T}_1)$ ,  $(X_2, \mathfrak{T}_2)$  et  $(X_3, \mathfrak{T}_3)$  trois espaces mesurables et  $f \in \mathcal{M}((X_1, \mathfrak{T}_1), (X_2, \mathfrak{T}_2))$ ,  $g \in \mathcal{M}((X_2, \mathfrak{T}_2), (X_3, \mathfrak{T}_3))$  deux applications mesurables. Alors la fonction composée

$$g \circ f : X_1 \rightarrow X_3$$

est mesurable puisque

$$(g \circ f)^{-1}(\mathfrak{T}_3) = f^{-1}(g^{-1}(\mathfrak{T}_3)).$$

**Théorème 24** Soient  $(X, \mathfrak{T})$ ,  $(X_1, \mathfrak{T}_1)$  et  $(X_2, \mathfrak{T}_2)$  trois espaces mesurables,  $f : X \rightarrow X_1 \times X_2$  une application et  $f_1 : X \rightarrow X_1$ ,  $f_2 : X \rightarrow X_2$  ses composantes. Alors

$$f \in \mathcal{M}((X, \mathfrak{T}), (X_1 \times X_2, \mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2))$$

si et seulement si

$$f_1 \in \mathcal{M}((X, \mathfrak{T}), (X_1, \mathfrak{T}_1)) \text{ et } f_2 \in \mathcal{M}((X, \mathfrak{T}), (X_2, \mathfrak{T}_2)).$$

Démonstration.

Les projections  $\pi_1 : X_1 \times X_2 \rightarrow X_1$  et  $\pi_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow X_2$ ,  $\pi_1((x_1, x_2)) = x_1$ ,  $\pi_2((x_1, x_2)) = x_2$ , sont mesurables. Si  $f$  est mesurable, ses composantes  $f_1 = \pi_1 \circ f$  et  $f_2 = \pi_2 \circ f$  le seront aussi. Réciproquement,  $f$  est mesurable dès que  $f_1$  et  $f_2$  le sont puisque qu'alors  $f^{-1}(\mathfrak{A}) \subseteq \mathfrak{I}$  :

$$f^{-1}(E_1 \times E_2) = f_1^{-1}(E_1) f_2^{-1}(E_2).$$

C.Q.F.D.

Une **base ouverte** pour la topologie  $\mathfrak{D}$  de l'espace  $(X, \mathfrak{D})$  est une famille  $\mathfrak{D}'$  de parties ouvertes de  $X$  telle que toute partie ouverte de  $X$  puisse s'écrire comme réunion d'éléments de  $\mathfrak{D}'$ . L'espace est **séparable** s'il possède une base dénombrable. Si  $(X_1, \mathfrak{D}_1)$  et  $(X_2, \mathfrak{D}_2)$  sont deux espaces topologiques, la **topologie produit**  $\mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}_2$  est la topologie sur l'ensemble produit  $X_1 \times X_2$  engendrée par les **rectangles ouverts**

$$O_1 \times O_2 \text{ avec } O_1 \in \mathfrak{D}_1 \text{ et } O_2 \in \mathfrak{D}_2.$$

Elle est constituée par l'ensemble des réunions quelconques de tels rectangles ouverts. Elle est donc séparable si  $\mathfrak{D}_1$  et  $\mathfrak{D}_2$  le sont.

**Théorème 25** *Soient  $(X_1, \mathfrak{D}_1)$  et  $(X_2, \mathfrak{D}_2)$  deux espaces topologiques séparables. Alors*

$$\mathfrak{B}_{X_1 \times X_2} = \mathfrak{B}_{X_1} \times \mathfrak{B}_{X_2}.$$

Démonstration.

On a toujours  $\mathfrak{B}_{X_1} \times \mathfrak{B}_{X_2} \subseteq \mathfrak{B}_{X_1 \times X_2}$ . En effet, la fonction identité  $\mathbb{I} : X_1 \times X_2 \rightarrow X_1 \times X_2$ ,  $\mathbb{I}(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$ , appartient à l'espace

$$\mathcal{M}((X_1 \times X_2, \mathfrak{B}_{X_1 \times X_2}), (X_1 \times X_2, \mathfrak{B}_{X_1} \times \mathfrak{B}_{X_2}))$$

puisque ses composantes sont mesurables (théorème (24) page (44)) :

$$(\pi_1 \circ \mathbb{I})^{-1}(O_1) = O_1 \times X_2 \text{ et } (\pi_2 \circ \mathbb{I})^{-1}(O_2) = X_1 \times O_2.$$

Réciproquement,  $\mathfrak{B}_{X_1} \times \mathfrak{B}_{X_2}$  contient tous les rectangles ouverts donc toutes les réunions dénombrables de rectangles ouverts c'est-à-dire, sous l'hypothèse, tous les ouverts. C.Q.F.D.

Exemple. On a donc

$$\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^2} = \mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \times \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}.$$

En particulier, une fonction complexe  $f$  sur un espace mesurable  $(X, \mathfrak{F})$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ , est mesurable si et seulement si sa partie réelle  $\Re f$  et sa partie imaginaire  $\Im f$  le sont.

Un **espace métrique**  $(X, d)$  est un ensemble  $X$  muni d'une distance  $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty[$  telle que

**D1**  $d(x, y) = 0$  si et seulement si  $x = y$  ;

**D2**  $d(x, y) = d(y, x)$  ;

**D3**  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ .

Dans un espace métrique  $X$ , la boule ouverte de centre  $x$  et de rayon  $r > 0$  est

$$B(x, r) = \{y \mid d(x, y) < r\}.$$

Par définition, une partie  $O \subseteq X$  est ouverte si à chaque  $x \in O$  correspond  $r_x > 0$  tel que

$$B(x, r_x) \subseteq O.$$

Un espace métrique est donc séparable s'il contient une partie dénombrable dense, c'est-à-dire une suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  telle que tout point  $x \in X$  en est la limite d'une suite partielle  $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} d(x, x_{n_k}) = 0$$

— les boules  $\{B(x_n, r)\}_{n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Q}}$  forment alors une base ouverte de sa topologie.

Si  $(X_1, d_1)$  et  $(X_2, d_2)$  sont deux espaces métriques, une application  $f : X_1 \rightarrow X_2$  est continue si et seulement elle est continue en chaque point  $x \in X_1$ , c'est-à-dire si et seulement si pour tout  $x \in X_1$  et pour toute suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d_1(x_n, x) = 0,$$

on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d_2(f(x_n), f(x)) = 0.$$

La relation

$$D((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{d_1^2(x_1, y_1) + d_2^2(x_2, y_2)}$$

définit une distance sur l'espace produit  $X_1 \times X_2$  qui engendre la topologie produit.

Si  $E \subseteq X$  et  $x \in X$ , la distance de  $x$  à  $E$  est

$$d(x, E) = \inf\{d(x, e) \mid e \in E\}.$$

**Théorème 26** Soient  $(X, \mathfrak{T})$  un espace mesurable,  $(Y, d)$  un espace métrique et  $f_n \in \mathcal{M}((X, \mathfrak{T}), (Y, \mathfrak{B}_Y))$  des applications admettant une limite  $f : X \rightarrow Y$ . Alors  $f \in \mathcal{M}((X, \mathfrak{T}), (Y, \mathfrak{B}_Y))$ .

Démonstration.

Soit  $O \subseteq Y$  un ensemble ouvert. Les ensembles

$$O_k = \{y \mid d(y, O^c) > \frac{1}{k}\}$$

sont ouverts (exercice (9) page (64)). Les ensembles  $f_n^{-1}(O_k)$  sont donc mesurables et les ensembles

$$\bigcap_{n \geq N} f_n^{-1}(O_k)$$

le sont aussi. Les ensembles

$$f^{-1}(O) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} f_n^{-1}(O_k)$$

(exercice (10) page (64)) enfin sont également mesurables. C.Q.F.D.

**Théorème 27** Si  $f, g \in \mathcal{L}^0(X, \mathfrak{T})$ , alors

$$f + g, fg, \sup\{f, g\} \text{ et } \inf\{f, g\} \in \mathcal{L}^0(X, \mathfrak{T}).$$

Si  $X' = \{x \mid g(x) \neq 0\}$ , alors  $f/g \in \mathcal{L}^0(X', \mathfrak{T}')$ .

Démonstration.

L'application  $X \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $x \mapsto (f(x), g(x))$ , est mesurable et les fonctions  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définies par  $(u, v) \mapsto u + v$ ,  $(u, v) \mapsto uv$ ,  $(u, v) \mapsto \sup\{u, v\}$  et  $(u, v) \mapsto \inf\{u, v\}$  sont continues.

L'ensemble  $X'$  est mesurable, l'application  $X' \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $x \mapsto (f(x), g(x))$ , est mesurable et la fonction  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(u, v) \mapsto u/v$ , est continue. C.Q.F.D.

La droite achevée est

$$\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty].$$

C'est un espace topologique : les intervalles de type  $[-\infty, b[$ ,  $]a, b[$  et  $]a, +\infty[$  en forment une base ouverte. Cet espace est séparable et métrisable (il est homéomorphe à l'intervalle  $[-\pi/2, \pi/2]$  via la fonction arctan par exemple).



Si  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ ,  $a \pm b$ ,  $ab$  et  $a/b$  sont définis « naturellement » : on convient que  $0 \times \pm\infty = 0$  mais  $\infty - \infty$ ,  $\pm\infty / \pm\infty$  et  $a/0$  ne sont pas définis.

Dans  $\overline{\mathbb{R}}$ , tout ensemble  $E$  admet une borne supérieure  $\sup E$  et une borne inférieure  $\inf E$ .

On désignera par  $\overline{\mathcal{L}}^0(X, \mathfrak{T}) = \mathcal{M}((X, \mathfrak{T}), (\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}_{\overline{\mathbb{R}}}))$  l'espace des fonctions numériques mesurables.

**Théorème 28** *Si  $f_n \in \overline{\mathcal{L}}^0(X, \mathfrak{T})$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , alors*

$$\sup_n f_n, \inf_n f_n, \limsup_n f_n \text{ et } \liminf_n f_n \in \overline{\mathcal{L}}^0(X, \mathfrak{T}).$$

*Si  $X' = \{x \mid \lim_n f_n(x) \text{ existe}\}$ , alors  $\lim_n f_n \in \overline{\mathcal{L}}^0(X', \mathfrak{T}')$ .*

Démonstration.

La première partie suit des relations :

$$(\sup_n f_n)^{-1}(]a, +\infty]) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n^{-1}(]a, +\infty]),$$

$$(\sup_n f_n)^{-1}([-\infty, b[) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f_n^{-1}([-\infty, b - \frac{1}{m}[),$$

$$(\sup_n f_n)^{-1}(]a, b[) = (\sup_n f_n)^{-1}(]a, +\infty]) (\sup_n f_n)^{-1}([-\infty, b[),$$

$$\inf_n f_n = -\sup_n -f_n, \limsup_n f_n = \inf_n \sup_{k \geq n} f_k, \liminf_n f_n = \sup_n \inf_{k \geq n} f_k.$$

D'autre part, l'ensemble  $X'$  est mesurable car

$$X' = \{x \mid \liminf_n f_n = \limsup_n f_n\}$$

et sur  $X'$ , on a

$$\lim_n f_n = \liminf_n f_n.$$

C.Q.F.D.

Exemple. Soit  $(X, \mathfrak{D})$  un espace topologique. Toute fonction  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  qui est semi-continue inférieurement (telle que les ensembles  $f^{-1}(]a, +\infty])$  sont ouverts) ou qui est semi-continue supérieurement (telle que les ensembles  $f^{-1}([-\infty, b[)$  sont ouverts) appartient à  $\overline{\mathcal{L}}^0(X, \mathfrak{B}_X)$ .

### 5.3 Mesures positives

Soit  $(X, \mathfrak{T})$  un espace mesurable. Une **mesure positive** sur  $X$  est une fonction  $\mu : \mathfrak{T} \rightarrow [0, +\infty]$  telle que

**MP1**  $\mu(\emptyset) = 0$ ;

**MP2**  $E_n \in \mathfrak{T}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $E_m E_n = \emptyset$  si  $n \neq m$  impliquent

$$\mu \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n)$$

(**additivité de la mesure**).

Le triplet  $(X, \mathfrak{T}, \mu)$  est un **espace mesuré**.  $M_+(X, \mathfrak{T})$  désigne l'espace des mesures positives sur  $X$ , définies sur  $\mathfrak{T}$  et  $M_f(X, \mathfrak{T}) \subseteq M_+(X, \mathfrak{T})$  désigne celles qui sont finies : une mesure positive est une **mesure finie** si  $\mu(X) < +\infty$ . Une mesure positive est une **mesure  $\sigma$ -finie** s'il existe une suite  $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de parties mesurables de  $X$  qui sont de mesure finie et qui épuisent  $X$  :

- pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mu(D_n) < +\infty$ ;
- $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$ .

Exemple. Une mesure finie de masse totale unité est une **mesure de probabilité**. On désigne alors habituellement par  $\Omega$  l'espace sous-jacent, par  $P$  la mesure et le triplet  $(\Omega, \mathfrak{T}, P)$  est appelé **espace probabilisé**. Les parties mesurables de  $\Omega$  se nomment **événements**  $E \in \mathfrak{T}$  et les fonctions mesurables,  $X \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathfrak{T})$ , **variables aléatoires**.

Exemple. Soit  $X$  un ensemble. La fonction  $\mu_{card}$  définie sur  $\mathfrak{P}(X)$  par

$$\mu_{card}(E) = \begin{cases} \text{card}(E) & \text{si } E \text{ est fini,} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

est une mesure positive sur  $X$  (la mesure du cardinal).

Exemple. Soit  $X$  un espace topologique. Un élément de  $M_+(X, \mathfrak{T})$  est une **mesure borélienne positive** sur  $X$  si  $\mathfrak{T} \supseteq \mathfrak{B}_X$ .

Exemple. Soient  $(X, \mathfrak{T}, \mu)$  un espace mesuré et  $X' \in \mathfrak{T}$ . La **trace** de  $\mu$  sur  $X'$  est la mesure  $\mu'$  sur  $X'$  définie sur  $\mathfrak{T}'$  par la relation  $\mu'(E') = \mu(E')$ .

Exemple. Soient  $(X_1, \mathfrak{T}_1, \mu_1)$  un espace mesuré,  $X_2$  un ensemble et  $f : X_1 \rightarrow X_2$  une application. L'**image directe** de la mesure  $\mu_1$  par  $f$  est la mesure  $f_*\mu_1$  sur  $X_2$  définie sur la tribu  $f_*(\mathfrak{T}_1)$  par

$$f_*\mu_1(E_2) = \mu_1(f^{-1}(E_2)).$$

Remarque. La mesure de Lebesgue  $\lambda$  sur  $\mathbb{R}$  est une mesure borélienne positive  $\sigma$ -finie. Dans la suite de ce cours, lorsqu'aucune mesure n'est spécifiée, c'est d'elle qu'il s'agit.

**Théorème 29** Soit  $(X, \mathfrak{T}, \mu)$  un espace mesuré.

1.  $E_1, E_2 \in \mathfrak{T}$  et  $E_1 \subseteq E_2$  impliquent  $\mu(E_1) \leq \mu(E_2)$   
(*monotonie de la mesure*);
2.  $E_n \in \mathfrak{T}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  implique

$$\mu \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n)$$

(*sous-additivité de la mesure*);

3.  $E_n \in \mathfrak{T}$  et  $E_n \subseteq E_{n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  impliquent

$$\mu \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(E_n);$$

4.  $E_n \in \mathfrak{T}$  et  $E_n \supseteq E_{n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $\mu(E_1) < +\infty$  impliquent

$$\mu \left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(E_n)$$

(*continuité de la mesure*).

Démonstration.

En vertu de l'additivité,  $E_2 = E_1 + E_2 E_1^c$  entraîne

$$\mu(E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2 E_1^c) \geq \mu(E_1).$$

Ensuite, posons

$$F_1 = E_1 \text{ et, pour } n \geq 2, F_n = E_n E_{n-1}^c \dots E_1^c.$$

Alors

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \mu\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} F_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(F_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n).$$

Pour la continuité sur les suites croissantes, posons

$$G_1 = E_1 \text{ et, pour } n \geq 2, G_n = E_n E_{n-1}^c.$$

Alors

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) &= \mu\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} G_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(G_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \mu(G_k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu\left(\sum_{k=1}^n G_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(E_n). \end{aligned}$$

Pour la continuité sur les suites décroissantes, enfin, soient

$$H_n = E_1 \setminus E_n = E_1 E_n^c.$$

Alors, en vertu du cas précédent et puisque  $\mu(E_n) < +\infty$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (\mu(E_1) - \mu(E_n)) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(H_n) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n\right) \\ &= \mu\left(E_1 \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n^c\right) = \mu\left(E_1 \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n\right)^c\right) = \mu(E_1) - \mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n\right). \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

**Théorème 30 (Borel-Cantelli)** *Soit  $(X, \mathfrak{F}, \mu)$  un espace mesuré. Si les ensembles  $E_n \in \mathfrak{F}$  sont tels que*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n) < +\infty,$$

alors

$$\mu\left(\bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq N} E_n\right) = 0.$$

Démonstration.

En utilisant le théorème (29) page (50), on obtient

$$\mu \left( \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq N} E_n \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mu \left( \bigcup_{n \geq N} E_n \right) \leq \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n \geq N} \mu(E_n) = 0.$$

C.Q.F.D.

Soit  $(X, \mathfrak{T}, \mu)$  un espace mesuré. Une partie  $N \subseteq X$  est dite **négligeable** s'il existe  $A \in \mathfrak{T}$  tel que

$$N \subseteq A \text{ et } \mu(A) = 0.$$

L'espace  $(X, \mathfrak{T}, \mu)$  est dit **complet** si toute partie négligeable y est mesurable. (On dit aussi que la tribu  $\mathfrak{T}$  est  $\mu$ -complète). Une propriété P des points de  $X$  est dite vraie **presque partout** si l'ensemble des points de  $X$  où elle n'est pas vérifiée est négligeable — on dit **presque sûrement** dans le cas d'une mesure de probabilité.

Soit  $\mathfrak{T}_\mu$  la famille des parties  $E$  de  $X$  ayant la propriété suivante : il existe  $A, B \in \mathfrak{T}$  tels que

$$B \subseteq E \subseteq A \text{ et } \mu(AB^c) = 0.$$

Alors  $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{T}_\mu$ . On prolonge  $\mu$  à  $\mathfrak{T}_\mu$  en posant

$$\mu(E) = \mu(A).$$

Cette définition est justifiée, c'est-à-dire indépendante du choix de  $A$ . Si l'on a aussi  $B' \subseteq E \subseteq A'$  avec  $A', B' \in \mathfrak{T}$  et  $\mu(A'B'^c) = 0$ , alors

$$\mu(B') \leq \mu(A) = \mu(B) \leq \mu(A') = \mu(B').$$

**Théorème 31** *Le triplet  $(X, \mathfrak{T}_\mu, \mu)$  est un espace mesuré complet et pour tout espace mesuré complet  $(X, \mathfrak{G}, \nu)$  tel que  $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{G}$  et que la restriction de  $\nu$  à  $\mathfrak{T}$ ,  $\nu/\mathfrak{T}$ , coïncide avec  $\mu$ , on a nécessairement  $\mathfrak{T}_\mu \subseteq \mathfrak{G}$  et  $\nu/\mathfrak{T}_\mu = \mu$ .*

Démonstration.

Il est clair que  $\mathfrak{T}_\mu$  est une tribu sur  $X$  et que  $\mu$  prolongée à  $\mathfrak{T}_\mu$  est une mesure sur  $X$ . L'espace mesuré  $(X, \mathfrak{T}_\mu, \mu)$  est évidemment complet. Soit

alors  $(X, \mathfrak{G}, \nu)$  un espace mesuré complet tel que  $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{G}$  et que  $\nu/\mathfrak{T} = \mu$ .  
 Pour tout  $E \in \mathfrak{T}_\mu$ , on peut écrire

$$E = B + EB^c \text{ avec } B \in \mathfrak{T} \text{ et } EB^c \in \mathfrak{G}$$

puisque  $EB^c \subseteq AB^c$  avec  $A \in \mathfrak{T}$ , que  $\nu(AB^c) = \mu(AB^c) = 0$  et que  $\mathfrak{G}$  est  $\nu$ -complète. D'où  $E \in \mathfrak{G}$  et

$$\nu(E) = \nu(B) = \mu(B) = \mu(E).$$

C.Q.F.D.

La tribu  $\mathfrak{T}_\mu$  est la **complétion** de la tribu  $\mathfrak{T}$  relativement à la mesure  $\mu$ .

Exemple. La tribu de Lebesgue  $\mathfrak{L}_\mathbb{R}$  est la complétion de la tribu de Borel  $\mathfrak{B}_\mathbb{R}$  relativement à la mesure de Lebesgue  $\lambda$  (exercice (10) page (17)).

## 5.4 Intégration

Soit  $(X, \mathfrak{T}, \mu)$  un espace mesuré. Une **fonction étagée** (ou élémentaire) est une fonction  $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$  dont l'ensemble  $\phi(X)$  des valeurs est fini.  $\mathcal{E}^0(X, \mathfrak{T}) \subseteq \mathcal{L}^0(X, \mathfrak{T})$  désigne l'espace des fonctions étagées mesurables.

**Théorème 32** Soit  $f \in \mathcal{L}^0(X, \mathfrak{T})$ .

1. Il existe une suite de fonctions  $\phi_n \in \mathcal{E}^0(X, \mathfrak{T})$  qui converge vers  $f$ .
2. Si  $f$  est positive, il existe une suite de fonctions  $\phi_n \in \mathcal{E}^0(X, \mathfrak{T})$  positives qui croît vers  $f$ .
3. Si  $f$  est bornée, il existe une suite de fonctions  $\phi_n \in \mathcal{E}^0(X, \mathfrak{T})$  qui croît vers  $f$ , uniformément sur  $X$ .

Démonstration.

Supposons d'abord  $f$  positive. Soient

$$E_{n,1} = f^{-1}([0, 2^{-n}]), \quad F_n = f^{-1}(]n, +\infty[),$$

$$E_{n,k} = f^{-1}(](k-1)2^{-n}, k2^{-n}]) \text{ pour } 2 \leq k \leq n2^n$$

et posons

$$\phi_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \mathbb{1}_{E_{n,k}} + n \mathbb{1}_{F_n}.$$

Alors  $0 \leq \phi_n \leq \phi_{n+1} \leq f$  et à chaque  $x \in X$  correspond un indice  $n_x$  à partir duquel  $f(x) - 2^{-n} \leq \phi_n(x)$ . Ceci démontre la deuxième assertion du théorème.

La première s'en déduit en considérant les fonction positives  $f^+$  et  $f^-$ .

La troisième découle aussi de la première parce que les ensembles  $F_n$  sont vides à partir d'un certain rang. On obtient alors une suite de fonctions  $\phi_n \in \mathcal{E}^0(X, \mathfrak{T})$  qui croît (on peut supposer la fonction positive) vers  $f$  de telle façon que l'on a  $f - 2^{-n} \leq \phi_n \leq f$  pour tout  $n$  assez grand. C.Q.F.D.

Une fonction  $\phi \in \mathcal{E}^0(X, \mathfrak{T})$  est **intégrable** (ou sommable) si

$$\mu(\{x \mid \phi(x) \neq 0\}) < +\infty.$$

$\mathcal{E}^1(X, \mathfrak{T}, \mu) \subseteq \mathcal{E}^0(X, \mathfrak{T})$  désigne l'espace des fonctions étagées intégrables.

Si  $\phi \in \mathcal{E}^1(X, \mathfrak{T}, \mu)$ , soient  $\phi(X) = \{y_1, y_2, \dots, y_N\}$  et  $H_k = \phi^{-1}(y_k)$  pour  $1 \leq k \leq N$ . L'**intégrale** de  $\phi$  par rapport à  $\mu$  sur  $X$  est

$$\int_X \phi \, d\mu = \int_X \phi(x) \, d\mu(x) = \sum_{k=1}^N y_k \mu(H_k)$$

et, si  $E \in \mathfrak{T}$ ,

$$\int_E \phi \, d\mu = \int_X \phi \mathbb{1}_E \, d\mu.$$

**Lemme 1** Soient  $\phi, \phi' \in \mathcal{E}^1(X, \mathfrak{T}, \mu)$ . Alors

$$\int_X (\phi + \phi') \, d\mu = \int_X \phi \, d\mu + \int_X \phi' \, d\mu$$

et, si  $\phi \leq \phi'$ ,

$$\int_X \phi \, d\mu \leq \int_X \phi' \, d\mu.$$

Démonstration.

Ce lemme repose sur le fait que si  $X = \sum_{j=1}^M F_j$  est une partition mesurable quelconque de  $X$ , on a

$$\int_X \phi \, d\mu = \sum_{k=1}^N y_k \mu(H_k) = \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N y_k \mu(H_k F_j).$$

Les ensembles  $H_k H'_{k'}$  formant une partition mesurable de  $X$  qui est plus fine que celle déterminée par la fonction étagée  $(\phi + \phi')$ , on a donc

$$\int_X \phi \, d\mu + \int_X \phi' \, d\mu = \sum_{k=1}^N \sum_{k'=1}^{N'} (y_k + y'_{k'}) \mu(H_k H'_{k'}) = \int_X (\phi + \phi') \, d\mu.$$

Si  $\phi \leq \phi'$ , on a aussi

$$\int_X \phi \, d\mu = \sum_{k=1}^N \sum_{k'=1}^{N'} y_k \mu(H_k H'_{k'}) \leq \sum_{k=1}^N \sum_{k'=1}^{N'} y'_{k'} \mu(H_k H'_{k'}) = \int_X \phi' \, d\mu.$$

C.Q.F.D.

Une fonction  $f \in \mathcal{L}^0(X, \mathfrak{T})$  est **intégrable** (ou sommable) si

$$\sup \left\{ \int_X \phi \, d\mu \mid \phi \in \mathcal{E}^1(X, \mathfrak{T}, \mu), \phi \leq |f| \right\} < +\infty.$$

$\mathcal{L}^1(X, \mathfrak{T}, \mu) \subseteq \mathcal{L}^0(X, \mathfrak{T})$  désigne l'espace des fonctions intégrables.

Si  $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{T}, \mu)$ , on pose

$$\int_X |f| \, d\mu = \sup \left\{ \int_X \phi \, d\mu \mid \phi \in \mathcal{E}^1(X, \mathfrak{T}, \mu), \phi \leq |f| \right\},$$

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu$$

et, si  $E \in \mathfrak{T}$ ,

$$\int_E f \, d\mu = \int_X f \mathbb{I}_E \, d\mu.$$

Soient  $f, g \in \mathcal{L}^0(X, \mathfrak{T})$  des fonctions qui coïncident  $\mu$ -presque partout sur  $X$ . Alors  $|f|$  et  $|g|$  coïncident aussi  $\mu$ -presque partout sur  $X$  et  $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{T}, \mu)$  si et seulement si  $g \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{T}, \mu)$ , auquel cas

$$\int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu.$$

Si  $f \in \overline{\mathcal{L}}^0(X, \mathfrak{T})$ , soit

$$E_\infty(f) = \{x \mid |f(x)| = +\infty\}.$$



Si  $\mu(E_\infty(f)) > 0$ , on pose  $\int_X |f| d\mu = +\infty$  et si  $\mu(E_\infty(f)) = 0$ , soit  $f' = f\mathbb{1}_{E_\infty^c}$ . Alors, par définition,  $f \in \overline{\mathcal{L}}^1(X, \mathcal{T}, \mu)$  si et seulement si  $f' \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{T}, \mu)$  auquel cas

$$\int_X f d\mu = \int_X f' d\mu.$$

Exemple. Si  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  est un espace probabilisé, les éléments de  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  sont les variables aléatoires admettant une **espérance mathématique**  $\mathbb{E}(X)$ ,

$$\mathbb{E}(X) = \int_\Omega X dP.$$

Exemple. Si  $\mu_{card}$  est la mesure du cardinal sur  $X$ , alors  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  est intégrable si et seulement si l'ensemble  $E_f = \{x \mid f(x) \neq 0\}$  est fini ou dénombrable et  $\sum_{x \in E_f} |f(x)| < +\infty$ , auquel cas

$$\int_X f d\mu_{card} = \sum_{x \in E_f} f(x).$$

**Théorème 33 (Convergence monotone)** Soit  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite croissante de fonctions  $f_n \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{F}, \mu)$  positives. Alors (dans  $[0, +\infty]$ ),

$$\int_X \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Démonstration.

Soit  $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$ . Alors  $f \in \overline{\mathcal{L}}^0(X, \mathfrak{F})$ .

Si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = \sup \left\{ \int_X f_n d\mu \mid n \in \mathbb{N} \right\} = +\infty$$

et si  $\mu(E_\infty(f)) > 0$ , on a

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = +\infty$$

alors que si  $\mu(E_\infty(f)) = 0$ , les inégalités

$$\int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu$$

entraînent aussi

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \, d\mu = +\infty.$$

Si

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \, d\mu = \sup \left\{ \int_X f_n \, d\mu \mid n \in \mathbb{N} \right\} < +\infty,$$

alors, nécessairement,  $\mu(E_\infty(f)) = 0$ . En effet, les ensembles  $E_{n,K} = \{x \mid f_n(x) > K\}$  croissent vers les ensembles  $F_K = \{x \mid f(x) > K\}$  et ces derniers décroissent vers  $E_\infty(f)$ . Comme

$$\mu(E_{n,K}) \leq \frac{1}{K} \int_{E_{n,K}} f_n \, d\mu \leq \frac{1}{K} \int_X f_n \, d\mu \leq \frac{\alpha}{K},$$

on a

$$\mu(F_K) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(E_{n,K}) \leq \frac{\alpha}{K}$$

et

$$\mu(E_\infty(f)) = \lim_{K \rightarrow +\infty} \mu(F_K) = 0.$$

On peut donc supposer que  $f < +\infty$  partout sur  $X$ . Soient  $\delta > 0$  et  $\phi \in \mathcal{E}^1(X, \mathfrak{T})$  telle que  $\phi \leq |f|$  et considérons

$$G_{n,\delta} = \{x \mid f_n(x) \geq (1 - \delta)f(x)\}.$$

Par hypothèse, ces ensembles croissent vers  $X$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . D'où

$$\begin{aligned} \int_X \phi \, d\mu &= \sum_{k=1}^N y_k \mu(H_k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N y_k \mu(H_k G_{n,\delta}) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{G_{n,\delta}} \phi \, d\mu \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \delta} \int_{G_{n,\delta}} f_n \, d\mu \\ &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \delta} \int_X f_n \, d\mu = \frac{\alpha}{1 - \delta}. \end{aligned}$$

$\delta$  étant arbitraire,

$$\int_X f \, d\mu = \sup \left\{ \int_X \phi \, d\mu \mid \phi \in \mathcal{E}^1(X, \mathfrak{T}, \mu), \phi \leq f \right\} \leq \alpha.$$

Ainsi

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

C.Q.F.D.

Exemple.

Lorsque la fonction  $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{T}, \mu)$  est positive, son intégrale peut être calculée au moyen des **sommes de Lebesgue** :

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \mu \left( \left\{ x \mid \frac{k-1}{2^n} < f(x) \leq \frac{k}{2^n} \right\} \right) + n\mu(\{x \mid n < f(x)\}).$$

**Théorème 34 (Linéarité de l'intégrale)** Si  $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{T}, \mu)$  et si  $a, b \in \mathbb{R}$ , alors  $af + bg \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{T}, \mu)$  et

$$\int_X (af + bg) d\mu = a \int_X f d\mu + b \int_X g d\mu.$$

Démonstration.

Si  $a \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} \int_X |af| d\mu &= \sup \left\{ \int_X \phi d\mu \mid \phi \in \mathcal{E}^1(X, \mathfrak{T}, \mu), \phi \leq |af| \right\} \\ &= \sup \left\{ |a| \int_X \frac{\phi}{|a|} d\mu \mid \frac{\phi}{|a|} \in \mathcal{E}^1(X, \mathfrak{T}, \mu), \frac{\phi}{|a|} \leq |f| \right\} = |a| \int_X |f| d\mu. \end{aligned}$$

Si  $a > 0$ ,

$$\begin{aligned} \int_X af d\mu &= \int_X (af)^+ d\mu - \int_X (af)^- d\mu = \int_X af^+ d\mu - \int_X af^- d\mu \\ &= a \int_X f^+ d\mu - a \int_X f^- d\mu = a \left( \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu \right) = a \int_X f d\mu. \end{aligned}$$

Si  $a < 0$ ,

$$\int_X af d\mu = \int_X (-a)f^- d\mu - \int_X (-a)f^+ d\mu = a \int_X f d\mu.$$

Si  $f$  et  $g$  sont positives, alors le théorème de la convergence monotone et les représentations  $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n$  et  $g = \lim_{n \rightarrow +\infty} \psi_n$  par des fonctions étagées mesurables positives (théorème (32) page(53)) ainsi que le lemme (1) page(54) entraînent

$$\begin{aligned} \int_X f d\mu + \int_X g d\mu &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X \phi_n d\mu + \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X \psi_n d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_X \phi_n d\mu + \int_X \psi_n d\mu \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X (\phi_n + \psi_n) d\mu = \int_X (f + g) d\mu. \end{aligned}$$

Dans le cas général, l'inégalité  $|f + g| \leq |f| + |g|$  implique que  $f + g \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{F}, \mu)$  et la relation

$$(f + g)^+ + f^- + g^- = (f + g)^- + f^+ + g^+$$

entraîne

$$\int_X (f + g)^+ d\mu + \int_X f^- d\mu + \int_X g^- d\mu = \int_X (f + g)^- d\mu + \int_X f^+ d\mu + \int_X g^+ d\mu$$

c'est-à-dire

$$\int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

C.Q.F.D.

**Théorème 35 (Positivité de l'intégrale)** *Si  $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{F}, \mu)$  est positive,*

$$\int_X f d\mu \geq 0$$

*avec égalité si et seulement si  $f = 0$   $\mu$ -presque partout.*

Démonstration.

L'inégalité au sens large est triviale. En supposant que

$$\int_X f d\mu = 0,$$

soient

$$E_n = \{x \mid f(x) > 1/n\} \quad \text{et} \quad E = \{x \mid f(x) > 0\}.$$

Alors

$$0 \geq \int_{E_n} f d\mu \geq \frac{1}{n} \mu(E_n)$$

pour tout  $n$ , donc  $\mu(E_n) = 0$  pour tout  $n$  et, par continuité (théorème (29) page (50)), on a aussi  $\mu(E) = 0$ . C.Q.F.D.

Une fonction complexe mesurable  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  est, par définition, intégrable si et seulement si sa partie réelle  $\Re f$  et sa partie imaginaire  $\Im f$  le sont, auquel cas on pose

$$\int_X f d\mu = \int_X \Re f d\mu + i \int_X \Im f d\mu.$$

**Théorème 36** Une fonction complexe mesurable  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  est intégrable si et seulement son module  $|f|$  l'est auquel cas

$$\left| \int_X f \, d\mu \right| \leq \int_X |f| \, d\mu$$

avec égalité si et seulement si il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $f e^{i\theta} \geq 0$   $\mu$ -presque partout.

Démonstration.

On a

$$\sup\{|\Re f|, |\Im f|\} \leq |f| \leq |\Re f| + |\Im f|.$$

Si l'on écrit

$$\int_X f \, d\mu = \left| \int_X f \, d\mu \right| e^{-i\theta},$$

on aura

$$\left| \int_X f \, d\mu \right| = e^{i\theta} \int_X f \, d\mu = \int_X e^{i\theta} f \, d\mu = \int_X \Re(e^{i\theta} f) \, d\mu \leq \int_X |f| \, d\mu$$

avec égalité si et seulement si  $|f| = \Re(f e^{i\theta})$   $\mu$ -presque partout. C.Q.F.D.

**Théorème 37 (Additivité de l'intégrale)** Si  $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{T}, \mu)$  est positive, la relation

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu, \quad E \in \mathfrak{T},$$

définit une mesure positive finie sur  $X$ ,  $\nu \in \mathbf{M}_f(X, \mathfrak{T})$ .

Démonstration.

Soient  $E_k$  des parties mesurables de  $X$  deux à deux disjointes. Les fonctions intégrables positives

$$g_n = \sum_{k=1}^n f \mathbb{I}_{E_k}$$

croissent vers la fonction

$$g = \sum_{k=1}^{+\infty} f \mathbb{I}_{E_k}$$

donc (convergence monotone)

$$\nu \left( \sum_{k=1}^{+\infty} E_k \right) = \int_X g \, d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X g_n \, d\mu = \sum_{k=1}^{+\infty} \nu(E_k).$$

C.Q.F.D.

Remarque. Si  $f \in \mathcal{L}^0(X, \mathfrak{T}, \mu)$  est positive et

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu, \quad E \in \mathfrak{T},$$

alors  $\nu \in M_+(X, \mathfrak{T})$ .

**Théorème 38 (Lemme de Fatou)** Soit  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions  $f_n \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{T}, \mu)$  positives. Alors (dans  $[0, +\infty]$ ),

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Démonstration.

Les fonctions

$$g_n = \inf\{f_k \mid k \geq n\}$$

forment une suite croissante de fonctions intégrables positives donc (convergence monotone)

$$\begin{aligned} \int_X \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n \, d\mu &= \int_X \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n \, d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X g_n \, d\mu \\ &= \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X \inf\{f_k \mid k \geq n\} \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \, d\mu. \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

**Théorème 39 (Convergence dominée)** Soit  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions  $f_n \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{T}, \mu)$  admettant une limite  $f$ . S'il existe une fonction  $g \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{T}, \mu)$  telle que  $|f_n| \leq g$  pour tout  $n$ , alors  $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{T}, \mu)$  et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0.$$

Démonstration.

L'intégrabilité de  $f$  découle de  $|f| \leq g$ . Appliquant le lemme de Fatou aux fonctions intégrables positives  $h_n = 2g - |f_n - f|$ , on a

$$\begin{aligned} \int_X 2g \, d\mu &= \int_X \liminf_{n \rightarrow +\infty} h_n \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X h_n \, d\mu \\ &= \int_X 2g \, d\mu - \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu. \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

Exemple. Soit  $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{T}, \mu)$ . En approchant  $f^+$  et  $f^-$  par des suites croissantes de fonctions étagées positives intégrables  $\phi_n^+$  et  $\phi_n^-$  respectivement et en vertu de la relation  $|\phi_n^+ - \phi_n^-| \leq |f|$ , on peut écrire que

$$\begin{aligned} \int_X f \, d\mu &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \\ &\left( \mu \left( \left\{ x \mid \frac{k-1}{2^n} < f(x) \leq \frac{k}{2^n} \right\} \right) - \mu \left( \left\{ x \mid -\frac{k}{2^n} \leq f(x) < -\frac{k-1}{2^n} \right\} \right) \right) \\ &+ n(\mu(\{x \mid n < f(x)\}) - \mu(\{x \mid f(x) < -n\})) \end{aligned}$$

Exemple. Soit  $\sum_n f_n$  une série convergente de fonctions intégrables. Alors on peut affirmer que

$$\int_X \sum_n f_n \, d\mu = \sum_n \int_X f_n \, d\mu$$

pourvu que les fonctions  $f_n$  soient positives (convergence monotone) ou pourvu que

$$\sum_n \int_X |f_n| \, d\mu < +\infty$$

(convergence dominée). En particulier, considérant la mesure du cardinal  $\mu_{card}$  sur  $\mathbb{N}$ , on a toujours

$$\sum_n \sum_m a_{n,m} = \sum_m \sum_n a_{n,m}$$

lorsque les nombres  $a_{n,m}$  sont positifs.

Exemple. Supposant  $\mu$   $\sigma$ -finie, soit  $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite croissante de parties mesurables de mesure finie épuisant  $X$ . L'opérateur de troncature associé  $T_n$  est défini par

$$T_n f(x) = \mathbb{I}_{D_n}(x) \inf\{n, \sup\{f(x), -n\}\}.$$

On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n f = f$  et  $|T_n f| \leq |f|$ . Donc si  $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{T}, \mu)$ , on a

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X T_n f \, d\mu.$$

## 5.5 Exercices

- Soient  $X_1$  un ensemble,  $(X_2, \mathfrak{T}_2)$  un espace mesurable et  $f : X_1 \rightarrow X_2$  une application. Vérifier la relation

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in A} f^{-1}(E_\alpha).$$

En déduire que l'image réciproque de la tribu  $\mathfrak{T}_2$  par  $f$  est bien une tribu.

- Soient  $(X_1, \mathfrak{T}_1)$  un espace mesurable,  $X_2$  un ensemble et  $f : X_1 \rightarrow X_2$  une application. Montrer par un exemple approprié que la famille

$$f(\mathfrak{T}_1) = \{f(E_1) \mid E_1 \in \mathfrak{T}_1\}$$

n'est pas nécessairement une tribu sur  $X_2$ .

- Soient  $\mathfrak{T}_1$  et  $\mathfrak{T}_2$  deux tribus sur  $X$ .
  - Montrer par un exemple approprié que  $\mathfrak{T}_1 \cup \mathfrak{T}_2$  n'est pas nécessairement une tribu sur  $X$ .
  - Montrer que

$$\mathfrak{T}(\mathfrak{T}_1 \cup \mathfrak{T}_2) = \mathfrak{T}(\{E_1 \cup E_2 \mid E_1 \in \mathfrak{T}_1, E_2 \in \mathfrak{T}_2\}).$$

- Soit  $\mathfrak{G} = \{A, B\}$ . Déterminer  $\mathfrak{A}(\mathfrak{G})$ .
- Soit  $\mathfrak{G} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  où  $A_1, A_2, \dots, A_n$  forment une partition de  $X$  – les  $A_k$  sont non vides, deux à deux disjoints et leur réunion est  $X$  :

$$X = \sum_{k=1}^n A_k.$$

Déterminer  $\mathfrak{T}(\mathfrak{G})$ .

- Soit  $\mathfrak{G} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  où  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sont des parties quelconques de  $X$ . Déterminer  $\mathfrak{T}(\mathfrak{G})$ . Quelle est la cardinalité maximale de  $\mathfrak{T}(\mathfrak{G})$  ?
- Soient  $X$  un ensemble,  $J$  un ensemble infini dénombrable et  $\mathfrak{D} = \{D_j\}_{j \in J}$  une partition de  $X$ . Montrer que  $\mathfrak{T}(\mathfrak{D})$  est isomorphe à  $\mathfrak{P}(J)$ .
- Montrer que toute tribu infinie  $\mathfrak{T}$  sur  $X$  est non dénombrable.

(Suggestion : supposant le contraire, les ensembles

$$E(x) = \bigcap_{x \in E \in \mathfrak{T}} E$$

formeraient une partition infinie dénombrable de  $X$ ).



7. – Soient  $(X_1, \mathfrak{T}_1)$  un espace mesurable,  $X_2$  un ensemble et  $f : X_1 \rightarrow X_2$  une application. Quelle est la plus grande tribu  $\mathfrak{T}_2$  sur  $X_2$  relativement à laquelle  $f$  reste mesurable ?
- Soient  $X_1$  un ensemble,  $(X_2, \mathfrak{T}_2)$  un espace mesurable et  $f : X_1 \rightarrow X_2$  une application. Quelle est la plus petite tribu  $\mathfrak{T}_1$  sur  $X_1$  qui rende  $f$  mesurable ?
8. – Vérifier que les parties symétriques relativement à l'origine de  $\mathbb{R}$ ,  $(E = -E)$ , forment une tribu  $\mathfrak{S}$  sur  $\mathbb{R}$ .
- Déterminer  $\mathcal{M}((\mathbb{R}, \mathfrak{S}), (\mathbb{R}, \mathfrak{S}))$ .
- Déterminer  $\mathcal{L}^0(\mathbb{R}, \mathfrak{S})$ .
9. Soient  $(X, d)$  un espace métrique et  $E \subseteq X$ . Montrer que

$$|d(x, E) - d(y, E)| \leq d(x, y).$$

En déduire que l'ensemble

$$\{x \mid d(x, E) > \epsilon\}$$

est ouvert.

10. Vérifier l'équation

$$f^{-1}(O) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} f_n^{-1}(O_k)$$

du cours.

11. Soient  $f, g \in \mathcal{L}^0(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}})$ . Montrer que la fonction  $(x, y) \mapsto f(x) + g(y)$  est mesurable.
12. Soit  $f \in \mathcal{L}^0(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}})$ . Montrer que son graphe,

$$G_f = \{(x, y) \mid y = f(x)\},$$

est mesurable.

13. Soient  $(X, \mathfrak{T})$  un espace mesurable et  $f \in \mathcal{M}((X, \mathfrak{T}), (\mathbb{C}, \mathfrak{B}_{\mathbb{C}}))$ . Montrer qu'il existe une fonction  $\theta \in \mathcal{M}((X, \mathfrak{T}), (\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}))$  telle que

$$f = |f| e^{i\theta}.$$

14. Soient  $X$  un ensemble infini non dénombrable et  $\mathfrak{T}$  la tribu engendrée par les singletons  $\{x\} \subseteq X$ .
- Vérifier que  $\mathfrak{T}$  consiste des parties finies ou dénombrables ou cofinies (de complémentaire fini) ou codénombrables (de complémentaire dénombrable) de  $X$ .

Si  $E \in \mathfrak{T}$ , on pose

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{si } E \text{ est fini ou dénombrable,} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

– Vérifier que  $\mu$  est une mesure de probabilité sur  $X$ .

15. Soit  $(X, \mathfrak{T}, \mu)$  un espace mesuré. Une partie  $E \subseteq X$  est dite localement mesurable si :

$$F \in \mathfrak{T} \text{ et } \mu(F) < +\infty \text{ impliquent } EF \in \mathfrak{T}.$$

– Montrer que la famille  $\mathfrak{T}_{loc}$  des parties localement mesurables de  $X$  est une tribu sur  $X$ , plus fine que  $\mathfrak{T}$ .

– Montrer que  $\mathfrak{T}_{loc} = \mathfrak{T}$  lorsque  $\mu$  est  $\sigma$ -finie.

Si  $E \in \mathfrak{T}_{loc}$ , on pose

$$\mu_{loc}(E) = \begin{cases} \mu(E) & \text{si } E \in \mathfrak{T}, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

– Montrer que  $\mu_{loc}$  est une mesure positive sur  $X$ .

16. Soit  $(X, \mathfrak{T}, \mu)$  un espace mesuré  $\sigma$ -fini. Montrer que dans la représentation  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$ , on peut prendre les ensembles  $D_n$  croissants ou deux à deux disjoints.

17. Soit  $(X, \mathfrak{T}, \mu)$  un espace mesuré. On pose

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} E_n = \bigcup_{k \geq 1} \bigcap_{n \geq k} E_n$$

et

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} E_n = \bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{n \geq k} E_n.$$

Supposons les ensembles  $E_n$  mesurables.

– Montrer que

$$\mu \left( \liminf_{n \rightarrow +\infty} E_n \right) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mu(E_n).$$

– Montrer que

$$\mu \left( \limsup_{n \rightarrow +\infty} E_n \right) \geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mu(E_n)$$

pourvu que  $\mu(\bigcup_n E_n) < +\infty$ .

18. Soient  $(X, \mathfrak{T}, \mu)$  un espace mesuré complet et  $f \in \mathcal{L}^0(X, \mathfrak{T})$ . Si  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  coïncide presque partout avec  $f$ , alors  $g \in \mathcal{L}^0(X, \mathfrak{T})$ .
19. Soient  $(X, \mathfrak{T}, \mu)$  un espace mesuré complet et  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Montrer que  $(\mathbb{R}, f_*(\mathfrak{T}), f_*\mu)$  est un espace mesuré complet.
20. Soient  $E \subseteq \mathbb{R}$  et  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction mesurable relativement à la tribu de Lebesgue. Montrer qu'il existe une fonction  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable relativement à la tribu de Borel qui coïncide presque partout avec  $f$ .
21. Soient  $(X, \mathfrak{T})$  un espace mesurable et  $\mu, \nu \in M_+(X, \mathfrak{T})$ . Montrer que

$$\mathfrak{T}_\mu \mathfrak{T}_\nu = \mathfrak{T}_{\mu+\nu}.$$

22. La différence symétrique de deux ensembles  $E \subseteq X$  et  $F \subseteq X$  est l'ensemble

$$E\Delta F = EF^c + E^cF.$$

Soit  $(X, \mathfrak{T}, \mu)$  un espace mesuré complet. Montrer que si  $E \in \mathfrak{T}$  et  $E\Delta F$  est négligeable,  $F \in \mathfrak{T}$  et  $\mu(F) = \mu(E)$ .

23. Soient  $(X, \mathfrak{T}, \mu)$  un espace mesuré et  $f \in \mathcal{L}^0(X, \mathfrak{T})$  une fonction positive bornée.
  - Montrer qu'il existe une suite de fonctions  $\phi_n \in \mathcal{E}^0(X, \mathfrak{T})$  positives qui décroît vers  $f$ .
  - En déduire que si  $E \in \mathfrak{T}$  est de mesure finie,

$$\int_E f d\mu = \inf \left\{ \int_E \phi d\mu \mid \phi \in \mathcal{E}^1(X, \mathfrak{T}, \mu), f \leq \phi \right\}.$$

- Les hypothèses « bornée » et « de mesure finie » sont-elles nécessaires ?

## 6 CONSTRUCTION DE MESURES

Dans ce chapitre, nous allons présenter une façon d'obtenir des mesures positives qui est une généralisation de la méthode employée pour la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ .

Soit  $X$  un ensemble.

Une **mesure extérieure** sur  $X$  est une fonction  $\mu^* : \mathfrak{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$  telle que

**ME1**  $\mu^*(\emptyset) = 0$ ;

**ME2**  $E_1 \subseteq E_2$  implique  $\mu^*(E_1) \leq \mu^*(E_2)$ ;

**ME3**

$$\mu^* \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(E_n).$$

Une façon commune d'obtenir une mesure extérieure est de prolonger à  $\mathfrak{P}(X)$  une fonction  $\mu$  définie sur une algèbre de Boole  $\mathfrak{A}$  appropriées.

Soit  $\mathfrak{A}$  une algèbre de Boole de parties de  $X$  et  $\mu : \mathfrak{A} \rightarrow [0, +\infty]$  une fonction telle que

- $\mu(\emptyset) = 0$ ;
- $E_n \in \mathfrak{A}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $E_n E_m = \emptyset$  si  $n \neq m$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathfrak{A}$  impliquent

$$\mu \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n)$$

( $\mu$  est « additive » sur  $\mathfrak{A}$ ).

Soit  $\mu^* : \mathfrak{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$  la fonction définie par

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n) \mid E \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n, E_n \in \mathfrak{A} \right\}.$$

**Lemme 2** *La fonction  $\mu^*$  est une mesure extérieure sur  $X$  telle que*

$$\mu^*/\mathfrak{A} = \mu.$$

Démonstration.

Les propriétés (ME1) et (ME2) sont évidemment satisfaites. Pour la sous-additivité, donné  $\epsilon > 0$ , soient  $F_{n,m} \in \mathfrak{A}$  tels que

$$E_n \subseteq \bigcup_{m \in \mathbb{N}} F_{n,m}, \quad \sum_{m \in \mathbb{N}} \mu(F_{n,m}) \leq \mu^*(E_n) + \frac{\epsilon}{2^n}.$$

Alors

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} F_{n,m}$$

donc

$$\mu^* \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) \leq \sum_{m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}} \mu(F_{n,m}) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(E_n) + \epsilon$$

et,  $\epsilon$  étant arbitraire, la propriété (ME3) est démontrée.

Il est clair que, si  $E \in \mathfrak{A}$ ,  $\mu^*(E) \leq \mu(E)$ . Réciproquement, soient  $E_n \in \mathfrak{A}$  tels que

$$E \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n, \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n) \leq \mu^*(E) + \epsilon.$$

Posons

$$F_1 = EE_1 \text{ et, pour } n \geq 2, F_n = EE_n E_{n-1}^c \cdots E_1^c.$$

Alors

$$\mu(E_n) = \mu(F_n) + \mu(E_n \setminus F_n) \geq \mu(F_n)$$

et

$$\mu(E) = \mu \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} F_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(F_n) \leq \mu^*(E) + \epsilon.$$

C.Q.F.D.

Donnée une mesure extérieure  $\mu^*$ , on obtient une mesure positive sur  $X$  en restreignant  $\mu^*$  à une tribu appropriée.

Soit

$$\mathfrak{T}(\mu^*) = \{E \subseteq X \mid \mu^*(A) = \mu^*(AE) + \mu^*(AE^c) \text{ quelque soit } A \subseteq X\}.$$

Pour vérifier que  $E \in \mathfrak{T}(\mu^*)$ , il suffit en fait de vérifier que

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(AE) + \mu^*(AE^c) \text{ quelque soit } A \subseteq X.$$

En particulier,

$$\mu^*(E) = 0 \text{ implique } E \in \mathfrak{T}(\mu^*).$$

De plus, si  $\mu^*$  est obtenue en prolongeant à  $\mathfrak{P}(X)$  une fonction additive  $\mu$  définie sur une algèbre de Boole  $\mathfrak{A}$ , on a aussi

$$E \in \mathfrak{A} \text{ implique } E \in \mathfrak{T}(\mu^*).$$

En effet, soient  $E_n \in \mathfrak{A}$  tels que

$$A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n, \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n) \leq \mu^*(A) + \epsilon.$$

Alors

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &\geq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n) - \epsilon = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n E) + \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n E^c) - \epsilon \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(E_n E) + \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(E_n E^c) - \epsilon \geq \mu^*(AE) + \mu^*(AE^c) - \epsilon. \end{aligned}$$

On pose

$$\mu = \mu^* / \mathfrak{T}(\mu^*).$$

**Théorème 40 (Carathéodory)** *Le triplet  $(X, \mathfrak{T}(\mu^*), \mu)$  est un espace mesuré complet.*

Démonstration.

•  $\mathfrak{T}(\mu^*)$  est une tribu. On a  $X \in \mathfrak{T}(\mu^*)$  et  $E \in \mathfrak{T}(\mu^*)$  si et seulement si  $E^c \in \mathfrak{T}(\mu^*)$ . Pour vérifier que  $\mathfrak{T}(\mu^*)$  est fermée sous les réunions dénombrables, nous procédons en trois étapes.

Soient d'abord  $E_1$  et  $E_2 \in \mathfrak{T}(\mu^*)$ . Alors  $E_1 \cup E_2 \in \mathfrak{T}(\mu^*)$ . En effet, quelque soit  $A \subseteq X$ ,

$$\begin{aligned} \mu^*(AE_1 \cup AE_2) + \mu^*(AE_1^c E_2^c) &= \mu^*(AE_1 + AE_2 E_1^c) + \mu^*(AE_1^c E_2^c) \\ &\leq \mu^*(AE_1) + \mu^*(AE_1^c E_2) + \mu^*(AE_1^c E_2^c) = \mu^*(AE_1) + \mu^*(AE_1^c) = \mu^*(A). \end{aligned}$$

Si ensuite les ensembles  $E_n \in \mathfrak{T}(\mu^*)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) sont disjoints deux à deux, on a d'abord

$$\mu^* \left( A \sum_{n=1}^N E_n \right) = \sum_{n=1}^N \mu^*(AE_n).$$

En effet, par récurrence sur  $N$  :

$$\begin{aligned}\mu^* \left( A \sum_{n=1}^{N+1} E_n \right) &= \mu^* \left( \left( A \sum_{n=1}^{N+1} E_n \right) E_{N+1} \right) + \mu^* \left( \left( A \sum_{n=1}^{N+1} E_n \right) E_{N+1}^c \right) \\ &= \mu^*(AE_{N+1}) + \mu^* \left( A \sum_{n=1}^N E_n \right) = \sum_{n=1}^{N+1} \mu^*(AE_n).\end{aligned}$$

En vertu du cas finis et de la relation précédente,

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &= \mu^* \left( A \left( \sum_{n=1}^N E_n \right) \right) + \mu^* \left( A \left( \sum_{n=1}^N E_n \right)^c \right) \\ &= \sum_{n=1}^N \mu^*(AE_n) + \mu^* \left( A \left( \sum_{n=1}^N E_n \right)^c \right) \geq \sum_{n=1}^N \mu^*(AE_n) + \mu^* \left( A \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} E_n \right)^c \right)\end{aligned}$$

quelque soit  $N$ , donc

$$\mu^*(A) \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(AE_n) + \mu^* \left( A \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} E_n \right)^c \right) \geq \mu^* \left( A \sum_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) + \mu^* \left( A \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} E_n \right)^c \right).$$

Le cas général où les ensembles  $E_n \in \mathfrak{T}(\mu^*)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) sont quelconques, enfin, se déduit du cas disjoints en considérant les ensembles

$$F_1 = E_1 \text{ et, pour } n \geq 2, F_n = E_n E_{n-1}^c \dots E_1^c.$$

En vertu du cas finis, ces ensembles sont dans  $\mathfrak{T}(\mu^*)$  et

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} F_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n.$$

- $\mu$  est additive. D'abord, si  $E_1$  et  $E_2 \in \mathfrak{T}(\mu^*)$  sont disjoints,

$$\begin{aligned}\mu(E_1 + E_2) &= \mu^*(E_1 + E_2) = \mu^*((E_1 + E_2)E_1) + \mu^*((E_1 + E_2)E_1^c) \\ &= \mu^*(E_1) + \mu^*(E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2).\end{aligned}$$

Ensuite, si les ensembles  $E_n \in \mathfrak{T}(\mu^*)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) sont disjoints deux à deux, on a, d'une part

$$\mu \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) = \mu^* \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(E_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n)$$

et, d'autre part,

$$\sum_{n=1}^N \mu(E_n) = \mu\left(\sum_{n=1}^N E_n\right) = \mu^*\left(\sum_{n=1}^N E_n\right) \leq \mu^*\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \mu\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} E_n\right)$$

quelque soit  $N$ , donc finalement

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n) \leq \mu\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} E_n\right).$$

•  $\mathfrak{T}(\mu^*)$  est  $\mu$ -complète. En effet, si  $N \subseteq E$  où  $E \in \mathfrak{T}(\mu^*)$  et  $\mu(E) = 0$ ,  $\mu^*(N) = 0$  donc  $N \in \mathfrak{T}(\mu^*)$ . C.Q.F.D.

Considérons le cas usuel où  $\mu^*$  est obtenue par prolongement d'une fonction additive sur une algèbre de Boole  $\mathfrak{A}$  sur  $X$ . Si  $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ , nous désignerons par  $\mathfrak{F}_\sigma$  les ensembles qui sont des réunions finies ou dénombrables d'ensembles de  $\mathfrak{F}$  et par  $\mathfrak{F}_\delta$  les ensembles qui sont des intersections finies ou dénombrables d'ensembles de  $\mathfrak{F}$ . Observons qu'à chaque  $E \subseteq X$  et à chaque  $\epsilon > 0$  correspond  $A_\epsilon \in \mathfrak{A}_\sigma$  tel que

$$E \subseteq A_\epsilon \text{ et } \mu(A_\epsilon) \leq \mu^*(E) + \epsilon.$$

Il suffit en effet de prendre  $A_\epsilon = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$  où les ensembles  $E_n \in \mathfrak{A}$  sont tels que  $E \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n) \leq \mu^*(E) + \epsilon$ . De même, il existe un ensemble  $A \in \mathfrak{A}_{\sigma\delta}$  tel que

$$E \subseteq A \text{ et } \mu(A) = \mu^*(E).$$

Il suffit en effet de prendre  $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{1/n}$ .

**Théorème 41** *Si  $\mu/\mathfrak{A}$  est  $\sigma$ -finie,  $E \in \mathfrak{T}(\mu^*)$  si et seulement si  $E = AB^c$  avec  $A \in \mathfrak{A}_{\sigma\delta}$  et  $\mu^*(B) = 0$ . En particulier,*

$$\mathfrak{T}(\mu^*) = \mathfrak{T}(\mathfrak{A})_\mu.$$

Démonstration.

Si  $E = AB^c$  avec  $A \in \mathfrak{A}_{\sigma\delta}$  et  $\mu^*(B) = 0$ , alors  $E \in \mathfrak{T}(\mu^*)$ .

Réciproquement, soit  $E \in \mathfrak{T}(\mu^*)$ . Soit, par hypothèse,  $X = \sum_{n \in \mathbb{N}} D_n$  une partition de  $X$  par des ensembles de  $\mathfrak{A}$  de mesure finie. Pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $A_{n,m} \in \mathfrak{A}_\sigma$  tel que

$$ED_n \subseteq A_{n,m}, \text{ et } \mu(A_{n,m}) \leq \mu(ED_n) + \frac{1}{m 2^n}.$$



Soit  $A_m = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{n,m}$ . Alors

$$A_m \in \mathfrak{A}_\sigma, E \subseteq A_m \text{ et } A_m E^c \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{n,m} (ED_n)^c$$

donc, puisque  $\mu(D_n) < +\infty$ ,

$$\mu(A_m E^c) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_{n,m} (ED_n)^c) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (\mu(A_{n,m}) - \mu(ED_n)) \leq \frac{1}{m}.$$

Si  $A = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} A_m$ ,  $E \subseteq A$ . Posant  $B = AE^c$ , on aura  $E = AB^c$  avec  $A \in \mathfrak{A}_{\sigma\delta}$  et  $\mu(B) = 0$ .

La tribu  $\mathfrak{T}(\mu^*)$  étant  $\mu$ -complète,  $(\mathfrak{T}(\mathfrak{A}))_\mu \subseteq \mathfrak{T}(\mu^*)$  (théorème (31) page (52)).

Réciproquement, si  $\mu^*(B) = 0$ , il existe  $C \in \mathfrak{A}_{\sigma\delta} \subseteq \mathfrak{T}(\mathfrak{A})$  tel que  $B \subseteq C$  et que  $\mu(C) = 0$ . Alors  $B \in (\mathfrak{T}(\mathfrak{A}))_\mu$  et, quelque soit  $A \in \mathfrak{A}_{\sigma\delta}$ ,  $AB^c \in (\mathfrak{T}(\mathfrak{A}))_\mu : \mathfrak{T}(\mu^*) \subseteq (\mathfrak{T}(\mathfrak{A}))_\mu$ . C.Q.F.D.

**Théorème 42** *Si  $\mu/\mathfrak{A}$  est  $\sigma$ -finie, il n'y a qu'un prolongement possible de  $\mu$  à  $\mathfrak{T}(\mathfrak{A})$ .*

Démonstration.

Soit  $\nu$  une mesure positive sur  $X$  définie sur  $\mathfrak{T}(\mathfrak{A})$  et coïncidant avec  $\mu$  sur  $\mathfrak{A}$ . Alors  $\nu$  et  $\mu$  coïncident aussi sur  $\mathfrak{A}_\sigma$  puisque tout ensemble de  $\mathfrak{A}_\sigma$  peut s'écrire comme une réunion disjointe (une somme) d'ensembles de  $\mathfrak{A}$ . De même, tout ensemble de  $\mathfrak{T}(\mathfrak{A})$  pouvant s'écrire comme une somme d'ensembles de  $\mathfrak{T}(\mathfrak{A})$  de  $\mu$ -mesure finie, il suffit de voir que  $\nu(B) = \mu(B)$  pour tout  $B \in \mathfrak{T}(\mathfrak{A})$  tel que  $\mu(B) < +\infty$ . Soit  $A \in \mathfrak{A}_\sigma$  tel que  $B \subseteq A$  et  $\mu(A) \leq \mu(B) + \epsilon$ . Alors

$$\nu(B) \leq \nu(A) = \mu(A) \leq \mu(B) + \epsilon.$$

$\epsilon$  étant arbitraire,  $\nu(B) \leq \mu(B)$ . D'autre part, on a  $\mu(A) = \mu(B) + \mu(AB^c)$ , donc  $\mu(AB^c) \leq \epsilon$  (parce que  $\mu(B) < +\infty$ ) et  $\nu(AB^c) \leq \mu(AB^c)$  (parce que  $\mu(AB^c) < +\infty$ ). D'où

$$\mu(B) \leq \mu(A) = \nu(A) = \nu(B) + \nu(AB^c) \leq \nu(B) + \epsilon.$$

$\epsilon$  étant arbitraire,  $\mu(B) \leq \nu(B)$ . C.Q.F.D.

Soit  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction croissante, continue à droite en chaque point  $x : F(x) = \lim_{y \downarrow x} F(y)$ . Prolongeons  $F$  à  $\overline{\mathbb{R}}$  en posant

$$F(-\infty) = \lim_{y \downarrow -\infty} F(y) \quad \text{et} \quad F(+\infty) = \lim_{y \uparrow +\infty} F(y).$$

La **mesure de Lebesgue-Stieltjes** associée à  $F$  est la mesure  $\mu_F$  sur  $\mathbb{R}$  définie de la façon suivante.

Soit  $\mathfrak{J}$  la famille des intervalles de  $\mathbb{R}$  qui sont de la forme  $]a, b]$  ou de la forme  $]a, +\infty[$  avec  $-\infty \leq a \leq b < +\infty$ . L'algèbre de Boole engendrée par  $\mathfrak{J}$  est

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{J}) = \left\{ \sum_{k=1}^N (a_k, b_k) \mid N \in \mathbb{N}, (a_k, b_k) \in \mathfrak{J} \right\}.$$

Considérons la fonction  $\mu_F : \mathfrak{A}(\mathfrak{J}) \rightarrow [0, +\infty]$  définie par la relation

$$\mu_F \left( \sum_{k=1}^N (a_k, b_k) \right) = \sum_{k=1}^N (F(b_k) - F(a_k)).$$

Il est clair que cette fonction est monotone croissante et qu'elle jouit de la propriété d'additivité finie :

$$\mu_F(E_1 + E_2) = \mu_F(E_1) + \mu_F(E_2) \quad \text{si} \quad E_1, E_2 \in \mathfrak{A}(\mathfrak{J}).$$

**Lemme 3**  $\mu_F$  est une fonction additive sur  $\mathfrak{A}(\mathfrak{J})$ .

Démonstration.

Soit d'abord  $a > -\infty$  et

$$]a, b] \subseteq \sum_{n \in \mathbb{N}} ]a_n, b_n].$$

Donné  $\epsilon > 0$ , soient  $\delta > 0$  tel que  $F(a + \delta) - F(a) < \epsilon/2$  et  $\delta_n > 0$  tels que  $F(b_n + \delta_n) - F(b_n) < \epsilon/2^{n+1}$ . En vertu du théorème de Borel-Lebesgue, on peut recouvrir l'intervalle compact  $[a + \delta, b]$  par un nombre fini  $N$  des intervalles ouverts  $]a_n, b_n + \delta_n[$ . En renumérotant si nécessaire ces intervalles, on peut supposer que l'on a :

$$a_1 < a + \delta < a_2 < b_1 + \delta_1 < \dots < a_N < b_{N-1} + \delta_{N-1} < b < b_N + \delta_N.$$

Alors

$$\begin{aligned} F(b) - F(a + \delta) &\leq F(b_N + \delta_N) - F(a_1) \\ &\leq \sum_{k=1}^N (F(b_k + \delta_k) - F(a_k)) \leq \sum_{k=1}^N (F(b_k) - F(a_k)) + \epsilon/2 \end{aligned}$$

d'où

$$F(b) - F(a) \leq \sum_{k=1}^N (F(b_k) - F(a_k)) + \epsilon$$

et

$$F(b) - F(a) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} (F(b_n) - F(a_n)).$$

Si

$$]-\infty, b] \subseteq \sum_{n \in \mathbb{N}} ]a_n, b_n],$$

on a

$$F(b) - F(a') \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} (F(b_n) - F(a_n))$$

quelque soit  $a' > -\infty$  donc

$$F(b) - F(-\infty) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} (F(b_n) - F(a_n)).$$

De même, en utilisant la continuité de  $F$  à  $\pm\infty$ , l'inclusion

$$]a, b] \subseteq \sum_{n \in \mathbb{N}} ]a_n, b_n] + ]A, +\infty[$$

entraîne la relation

$$F(b) - F(a) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} (F(b_n) - F(a_n)) + (F(+\infty) - F(A))$$

et

$$]-\infty, b] \subseteq \sum_{n \in \mathbb{N}} ]a_n, b_n] + ]A, +\infty[$$

entraîne

$$F(b) - F(-\infty) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} (F(b_n) - F(a_n)) + (F(+\infty) - F(A)).$$

En procédant de façon semblable pour majorer  $(F(+\infty) - F(a))$ , on voit que quels que soient les intervalles  $I$ ,  $I_n \in \mathfrak{I}$ , la relation

$$I = \sum_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

implique

$$\mu_F(I) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_F(I_n).$$

En vertu des propriétés des séries à termes positifs, on en tire que, quelque soit les ensembles  $E = \sum_{k=1}^N I_k$ ,  $E_n = \sum_{k=1}^{N_n} I_{n,k} \in \mathfrak{A}(\mathfrak{I})$ , la représentation

$$E = \sum_{n \in \mathbb{N}} E_n$$

entraîne l'inégalité

$$\mu_F(E) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_F(E_n).$$

L'inégalité réciproque découle du fait que la fonction  $\mu_F$  est monotone croissante et possède la propriété de l'additivité finie :

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_F(E_n) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \mu_F(E_n) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \mu_F \left( \sum_{k=1}^N E_k \right) \leq \mu_F \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) = \mu_F(E). \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

Puisque  $\mathfrak{T}(\mathfrak{A}(\mathfrak{I})) = \mathfrak{T}(\mathfrak{I}) = \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ , le théorème (41) page (71) implique que la tribu  $\mathfrak{T}(\mu_F^*)$  à laquelle  $\mu_F$  est prolongée par la méthode précédente est la complétion de la tribu borélienne  $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$  relativement à  $\mu_F$ .

L'intégrale associée à une mesure de Lebesgue-Stieltjes  $\mu_F$  engendré par une fonction croissante  $F$  sur  $\mathbb{R}$  est une **intégrale de Lebesgue-Stieltjes**, souvent dénotée

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu_F = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dF(x).$$

La fonction  $F$  est continue au point  $x$  si et seulement si

$$\mu_F(\{x\}) = F(x) - \lim_{y \uparrow x} F(y) = F(x) - F(x-) = 0.$$

La mesure  $\mu_F$  est finie si et seulement si la fonction  $F$  est bornée. Réciproquement, soit  $\mu$  une mesure finie sur  $\mathbb{R}$ , définie sur  $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ . Sa **fonction de répartition** est la fonction  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$  définie par

$$F(x) = \mu(]-\infty, x]).$$

Elle est croissante, continue à droite, telle que  $F(-\infty) = 0$  et que  $F(+\infty) < +\infty$  et la mesure  $\mu$  dont elle est issue est la restriction de la mesure  $\mu_F$  qu'elle engendre à  $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ .

Exemple. Soient  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  un espace probabilisé et  $X \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathfrak{F})$  une variable aléatoire sur  $\Omega$ . L'image directe  $P_X = X_*P$  de la mesure de probabilité par la variable aléatoire (la **loi de probabilité** de  $X$ ) est définie sur la tribu  $X_*(\mathfrak{F})$  par la relation

$$P_X(E) = P(X^{-1}(E)).$$

C'est une mesure borélienne finie sur  $\mathbb{R}$  dont la fonction de répartition est

$$F_X(x) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}).$$

Exemple. Si  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  est un espace probabilisé et si  $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ , on a

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_X(x),$$

$F_X$  désignant la fonction de répartition de  $X$ .

En effet, posant

$$A_{n,k} = X^{-1}(](k-1)2^{-n}, k2^{-n}]) \text{ pour } 1 \leq k \leq n2^n,$$

$$A_n = X^{-1}(]n, +\infty[),$$

$$B_{n,k} = X^{-1}(]-k2^{-n}, -(k-1)2^{-n}]) \text{ pour } 1 \leq k \leq n2^n,$$

$$B_n = X^{-1}(]-\infty, -n])$$

et

$$X_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} (\mathbb{I}_{A_{n,k}} - \mathbb{I}_{B_{n,k}}) + n (\mathbb{I}_{A_n} - \mathbb{I}_{B_n}),$$

on a

$$X = \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n, \quad |X_n| \leq |X|.$$

D'où (convergence dominée)

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} X \, dP &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} X_n \, dP \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} (P(A_{n,k}) - P(B_{n,k})) + n(P(A_n) - P(B_n)) \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} (P_X \left( ]\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n} \right] ) - P_X \left( ]-\frac{k}{2^n}, -\frac{k-1}{2^n} \right] ) \\
&\quad + n(P_X(]n, +\infty[) - P_X(]-\infty, -n]) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, dF_X.
\end{aligned}$$

## 6.1 Exercices

1. Le diamètre  $\delta(E)$  d'une partie  $E$  d'un espace métrique  $(X, d)$  est

$$\delta(E) = \sup \{d(x, y) \mid x, y \in E\}.$$

Soient  $p > 0$  et  $\delta > 0$ . On pose

$$\mu_{p,\delta}^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta(E_n)^p \mid E \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n, \delta(E_n) < \delta \right\}.$$

- Montrer que  $\mu_{p,\delta}^*$  est une mesure extérieure sur  $X$ .
- Montrer que  $\mu_{p,\delta}^*(E)$  est une fonction décroissante de  $\delta$ .
- En déduire que

$$\mu_p^*(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mu_{p,\delta}^*(E) = \sup \{ \mu_{p,\delta}^*(E) \mid \delta > 0 \}$$

est une mesure extérieure sur  $X$  (la mesure extérieure de Hausdorff).

- Montrer que si  $p < P$ , on a

$$\mu_{p,\delta}^*(E) \geq \delta^{p-P} \mu_{P,\delta}^*(E).$$

- En déduire qu'à chaque  $E$  est associé un nombre  $H(E)$  (la dimension de Hausdorff) tel que  $\mu_p^*(E) = +\infty$  si  $p < H(E)$  et que  $\mu_p^*(E) = 0$  si  $p > H(E)$ .

2. Une mesure extérieure  $\mu^*$  est **régulière** si à chaque  $A \subseteq X$  correspond un ensemble mesurable  $E$  tel que  $A \subseteq E$  et  $\mu(E) = \mu^*(A)$ . Montrer que si  $\mu^*$  est régulière, pour toute suite croissante  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu^*(A_n) = \mu^* \left( \bigcup_n A_n \right).$$

3. Décrire l'espace de probabilité correspondant au cas d'une expérience aléatoire admettant un nombre fini d'issues équiprobables et déterminer la loi de probabilité associée à une variable aléatoire sur cet espace. Sur quelle tribu est-elle définie et quelle est sa fonction de répartition ?
4. Calculer  $\mu_F(]n, n+1])$ ,  $\mu_F([n, n+1])$ ,  $\mu_F(]n+1/2, n+3/2])$  et  $\mu_F([n+1/2, n+3/2])$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) lorsque  $F(x)$  est la partie entière de  $x$ .
5. Soient  $X \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathfrak{F})$ ,  $t \in \mathbb{R}$  et supposons que  $e^{tX} \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ . Montrer que

$$\int_{\Omega} e^{tX} dP = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} dF_X(x).$$

## 7 CONVERGENCE EN MESURE

Dans ce chapitre, nous allons introduire trois types de convergence pour des fonctions mesurables : la convergence simple presque partout, la convergence en mesure et, pour celles qui sont bornées, la convergence presque uniforme.

Soient  $(X, \mathfrak{F}, \mu)$  un espace mesuré et  $(Y, d)$  un espace métrique séparable. Si  $f, g \in \mathcal{M}((X, \mathfrak{F}), (Y, \mathfrak{B}_Y))$  et  $\delta \geq 0$ , posons

$$A_\delta(f, g) = \{x \mid d(f(x), g(x)) > \delta\}.$$

Ces ensembles sont mesurables car l'application  $x \mapsto (f(x), g(x))$  est mesurable et la fonction  $(u, v) \mapsto d(u, v)$  est continue :

$$|d(u_1, v_1) - d(u_2, v_2)| \leq d(u_1, u_2) + d(v_1, v_2) \leq \sqrt{2}D((u_1, v_1), (u_2, v_2)).$$

La relation

$$f \equiv_\mu g \text{ si } \mu(A_0(f, g)) = 0$$

est une relation d'équivalence sur  $\mathcal{M}((X, \mathfrak{F}), (Y, \mathfrak{B}_Y))$ .  $\mathcal{M}_\mu((X, \mathfrak{F}), (Y, \mathfrak{B}_Y))$  désigne l'espace des classes d'équivalences  $\mathbf{f} = [f]$  pour cette relation et, en particulier,  $\mathcal{L}_\mu^0(X, \mathfrak{F})$  est l'espace des classes d'équivalences des fonctions mesurables.

Si les applications  $f_n \in \mathcal{M}((X, \mathfrak{F}), (Y, \mathfrak{B}_Y))$  convergent  $\mu$ -presque partout sur  $X$ , il existe  $X' \in \mathfrak{F}$  tel que  $\mu(X') = \mu(X)$  et que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$  existe en tout point  $x \in X'$ . L'application  $f : X \rightarrow Y$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) & \text{si } x \in X', \\ y_0 \in Y & \text{sinon} \end{cases}$$

appartient à  $\mathcal{M}((X, \mathfrak{F}), (Y, \mathfrak{B}_Y))$ . Si  $g_n \equiv_\mu f_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soient

$$E_n = \{x \mid f_n(x) \neq g_n(x)\}, \text{ et } X'' = X' \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n^c.$$

Alors l'application  $g : X \rightarrow Y$  définie par

$$g(x) = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) & \text{si } x \in X'', \\ y_1 \in Y & \text{sinon} \end{cases}$$



appartient à  $\mathcal{M}((X, \mathfrak{T}), (Y, \mathfrak{B}_Y))$  et  $g \equiv_\mu f$ . On dit que les classes  $\mathbf{f}_n \in \mathcal{M}_\mu((X, \mathfrak{T}), (Y, \mathfrak{B}_Y))$  **convergent presque partout** si les  $f_n \in \mathbf{f}_n$  convergent  $\mu$ -presque partout sur  $X$ , auquel cas on pose

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{f}_n = \left[ \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right].$$

**Théorème 43 (Egorov)** Soient  $(X, \mathfrak{T}, \mu)$  un espace mesuré et  $(Y, d)$  un espace métrique séparable. Supposons que  $\mu$  est finie. Soient  $f_n \in \mathcal{M}((X, \mathfrak{T}), (Y, \mathfrak{B}_Y))$  des applications qui convergent  $\mu$ -presque partout sur  $X$ . Alors, à chaque  $\epsilon > 0$  correspond  $A_\epsilon \in \mathfrak{T}$  tel que  $\mu(A_\epsilon) < \epsilon$  et que les applications  $f_n$  convergent uniformément sur  $A_\epsilon^c$ .

Démonstration.

On peut supposer que les fonctions  $f_n$  convergent partout sur  $X$ . Soit  $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$ . Posons

$$B_{N,m} = \bigcap_{n \geq N} A_{1/m}^c(f, f_n).$$

Alors

$$X = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} B_{N,m}.$$

Par continuité, pour chaque  $m$ ,  $\mu(X) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mu(B_{N,m})$  donc, la mesure étant finie,  $0 = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mu(B_{N,m}^c)$ . Choisissons alors les indices  $N_1 < N_2 < N_3 < \dots$  de telle sorte que

$$\mu(B_{N_m,m}^c) < \frac{\epsilon}{2^m}$$

et soit

$$A_\epsilon = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} B_{N_m,m}^c.$$

On aura bien  $\mu(A_\epsilon) < \epsilon$  et si

$$x \in A_\epsilon^c = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N_m} A_{1/m}^c(f, f_n),$$

pour tout  $m > 0$ ,

$$n \geq N_m \text{ implique } d(f(x), f_n(x)) \leq 1/m.$$

C.Q.F.D.

Les applications  $f_n \in \mathcal{M}((X, \mathfrak{T}), (Y, \mathfrak{B}_Y))$  **convergent en mesure** vers l'application  $f \in \mathcal{M}((X, \mathfrak{T}), (Y, \mathfrak{B}_Y))$  si, pour tout  $\delta > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_\delta(f_n, f)) = 0.$$

Puisque les ensembles  $A_\delta(f, f_n)$  décroissent lorsque  $\delta$  croît, cela revient à dire qu'à chaque  $\delta > 0$  correspond  $n_\delta$  tel que

$$\mu(A_\delta(f_n, f)) < \delta$$

dès que  $n \geq n_\delta$ . Si les  $f_n$  convergent en mesure vers  $f$ ,  $g_n \equiv_\mu f_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $g \equiv_\mu f$ , alors les  $g_n$  convergent en mesure vers  $g$ . En effet,

$$A_\delta(g_n, g) \subseteq A_{\delta/3}(g_n, f_n) \cup A_{\delta/3}(f_n, f) \cup A_{\delta/3}(f, g).$$

On dit que les classes  $\mathbf{f}_n \in \mathcal{M}_\mu((X, \mathfrak{T}), (Y, \mathfrak{B}_Y))$  convergent en mesure vers  $\mathbf{f} \in \mathcal{M}_\mu((X, \mathfrak{T}), (Y, \mathfrak{B}_Y))$  si les  $f_n \in \mathbf{f}_n$  convergent en mesure vers  $f \in \mathbf{f}$ .

**Théorème 44** *Soient  $(X, \mathfrak{T}, \mu)$  un espace mesuré et  $(Y, d)$  un espace métrique séparable.*

1. *Si la mesure  $\mu$  est finie, la convergence presque partout de  $\mathbf{f}_n \in \mathcal{M}_\mu((X, \mathfrak{T}), (Y, \mathfrak{B}_Y))$  vers  $\mathbf{f} \in \mathcal{M}_\mu((X, \mathfrak{T}), (Y, \mathfrak{B}_Y))$  entraîne la convergence en mesure de  $\mathbf{f}_n$  vers  $\mathbf{f}$ .*
2. *Réciproquement, la convergence en mesure de  $\mathbf{f}_n \in \mathcal{M}_\mu((X, \mathfrak{T}), (Y, \mathfrak{B}_Y))$  vers  $\mathbf{f} \in \mathcal{M}_\mu((X, \mathfrak{T}), (Y, \mathfrak{B}_Y))$  entraîne toujours l'existence d'une suite partielle  $\mathbf{f}_{n_k}$  qui converge presque partout vers  $\mathbf{f}$ .*

Démonstration.

Supposons d'abord que  $\mu$  est finie. Soit  $\epsilon > 0$ . En vertu du théorème d'Egorov (théorème(43) page (80)), il existe  $A_\epsilon \in \mathfrak{T}$  tel que  $\mu(A_\epsilon) < \epsilon$  et que les applications  $f_n \in \mathbf{f}_n$  convergent uniformément sur  $A_\epsilon^c$  vers  $f \in \mathbf{f}$ . Alors, dès que  $n$  est assez grand,

$$\mu(A_\epsilon(f_n, f)) = \mu(\{x \in A_\epsilon \mid d(f_n(x), f(x)) > \epsilon\}) < \epsilon.$$

La suite  $\mathbf{f}_n$  converge donc en mesure vers  $\mathbf{f}$ .

Réciproquement, soit, pour chaque  $k \in \mathbb{N}$ ,  $n_k$  tel que

$$\mu(A_{2^{-k}}(f_{n_k}, f)) < 2^{-k}.$$

On a

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_{2^{-k}}(f_{n_k}, f)) < +\infty.$$

En vertu du lemme de Borel-Cantelli (théorème (30) page (51)), il existe  $X' \in \mathfrak{X}$  tel que  $\mu(X') = \mu(X)$  dont chaque point n'appartient qu'à un nombre fini des ensembles  $A_{2^{-k}}(f_{n_k}, f)$ , ce qui revient à dire qu'à chaque  $x \in X'$  correspond un indice  $k(x)$  tel que

$$k \geq k(x) \text{ implique } d(f_{n_k}(x), f(x)) \leq 2^{-k}.$$

La suite partielle  $\mathbf{f}_{n_k}$  converge donc presque partout vers  $\mathbf{f}$ . C.Q.F.D.

Exemple. Si les moyennes arithmétiques  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$  des variables aléatoires  $X_k \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathfrak{X}, P)$  **convergent presque sûrement** vers la valeur moyenne  $\mu$ , elles **convergent en probabilité** vers  $\mu$ . (La loi forte des grands nombres entraîne la loi faible des grands nombres).

Si  $f, g \in \mathcal{M}((X, \mathfrak{X}), (Y, \mathfrak{B}_Y))$ , soient

$$e_\mu(f, g) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \mu(A_\delta(f, g)) \geq \delta \text{ pour tout } \delta > 0, \\ \inf\{\delta \mid \mu(A_\delta(f, g)) < \delta\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

et

$$d_\mu(f, g) = \begin{cases} 1 & \text{si } e_\mu(f, g) = +\infty, \\ \frac{e_\mu(f, g)}{1 + e_\mu(f, g)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a alors les propriétés suivantes :

- $f \equiv_\mu g$  si et seulement si  $e_\mu(f, g) = 0$ .

En effet, la nécessité est triviale ; pour la suffisance, il suffit de remarquer que, quel que soit  $\epsilon > 0$ , on a

$$A_0(f, g) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{\epsilon 2^{-n}}(f, g)$$

de telle sorte que

$$\mu(A_0(f, g)) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \epsilon 2^{-n} = \epsilon.$$

- Quelle que soit  $h \in \mathcal{M}((X, \mathfrak{X}), (Y, \mathfrak{B}_Y))$ ,  $e_\mu(f, g) \leq e_\mu(f, h) + e_\mu(h, g)$ .

En effet,

$$A_{\delta+\eta}(f, g) \subseteq A_\delta(f, h) \cup A_\eta(h, g)$$

de telle sorte que, quels que soient  $\delta > e_\mu(f, h)$  et  $\eta > e_\mu(h, g)$ ,

$$\mu(A_{\delta+\eta}(f, g)) \leq \mu(A_\delta(f, h)) + \mu(A_\eta(h, g)) < \delta + \eta.$$

- Si  $f \equiv_\mu f_0$  et  $g \equiv_\mu g_0$ ,  $e_\mu(f, g) = e_\mu(f_0, g_0)$ .

En effet,

$$\begin{aligned} e_\mu(f, g) &\leq e_\mu(f, g_0) + e_\mu(g_0, g) \\ &= e_\mu(f, g_0) \leq e_\mu(f, f_0) + e_\mu(f_0, g_0) = e_\mu(f_0, g_0). \end{aligned}$$

- Quelle que soit  $h \in \mathcal{M}((X, \mathfrak{F}), (Y, \mathfrak{B}_Y))$ ,  $d_\mu(f, g) \leq d_\mu(f, h) + d_\mu(h, g)$ .

En effet, la fonction  $t \mapsto t/(1+t)$  étant croissante sur  $[0, +\infty[$ , les inégalités  $0 \leq u \leq v+w$  impliquent

$$\frac{u}{1+u} \leq \frac{v+w}{1+v+w} \leq \frac{v}{1+v} + \frac{w}{1+w}.$$

Si  $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{M}_\mu((X, \mathfrak{F}), (Y, \mathfrak{B}_Y))$ , posons

$$d_\mu(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = d_\mu(f, g).$$

On peut résumer les propriétés précédentes en disant que  $d_\mu$  est une distance sur  $\mathcal{M}_\mu((X, \mathfrak{F}), (Y, \mathfrak{B}_Y))$ .

Un espace métrique  $(Y, d)$  est complet si toute suite de Cauchy  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , c'est-à-dire telle que

$$\lim_{n, m \rightarrow +\infty} d(y_n, y_m) = 0,$$

y est convergente.

**Théorème 45** Soient  $(X, \mathfrak{F}, \mu)$  un espace mesuré et  $(Y, d)$  un espace métrique séparable. Les  $\mathbf{f}_n$  convergent en mesure vers  $\mathbf{f}$  si et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d_\mu(\mathbf{f}_n, \mathbf{f}) = 0$$

et  $(\mathcal{M}_\mu((X, \mathfrak{F}), (Y, \mathfrak{B}_Y)), d_\mu)$  est un espace métrique, qui est complet si  $(Y, d)$  est complet.

Démonstration.

Si les  $f_n$  convergent en mesure vers  $f$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_\delta(f_n, f)) = 0$  pour tout  $\delta > 0$  donc il existe un indice  $n_\delta$  à partir duquel  $\mu(A_\delta(f_n, f)) < \delta$ , c'est-à-dire à partir duquel  $d_\mu(f_n, f) \leq e_\mu(f_n, f) < \delta$ .

Réciproquement, pour tout  $\delta > 0$ , il existe un indice  $n_\delta$  à partir duquel  $e_\mu(f_n, f) < \delta$  et, par suite, à partir duquel  $\mu(A_\delta(f_n, f)) < \delta$ .

Supposons que les  $\mathbf{f}_n \in (\mathcal{M}_\mu((X, \mathfrak{F}), (Y, \mathfrak{B}_Y)), d_\mu)$  satisfont la condition de Cauchy et montrons l'existence d'une suite partielle  $\{\mathbf{f}_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  convergente. (La condition de Cauchy nous assure alors que la suite toute entière est convergente.) Soit  $n_k$  tel que

$$\mu(A_{2^{-k}}(f_{n_k}, f_m)) < 2^{-k}$$

pour tout  $m \geq n_k$  et posons

$$X' = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq N} A_{2^{-k}}^c(f_{n_k}, f_{n_{k+1}})$$

de telle sorte que

$$\begin{aligned} \mu(X'^c) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \mu \left( \bigcup_{k \geq N} A_{2^{-k}}(f_{n_k}, f_{n_{k+1}}) \right) \\ &\leq \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k \geq N} \mu(A_{2^{-k}}(f_{n_k}, f_{n_{k+1}})) = 0. \end{aligned}$$

À chaque  $x \in X'$  correspond  $N_x$  tel que

$$k \geq N_x \text{ implique } d(f_{n_k}(x), f_{n_{k+1}}(x)) \leq 2^{-k}$$

donc que

$$d(f_{n_k}(x), f_{n_{k+p}}(x)) \leq \sum_{j=k}^{k+p-1} d(f_{n_j}(x), f_{n_{j+1}}(x)) \leq 2^{-k+1}.$$

L'espace  $Y$  étant complet, la suite  $\{f_{n_k}(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$  y est convergente et l'application  $f : X \rightarrow Y$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{k \rightarrow +\infty} f_{n_k}(x) & \text{si } x \in X', \\ y_0 \in Y & \text{sinon.} \end{cases}$$

appartient à l'espace  $\mathcal{M}((X, \mathfrak{F}), (Y, \mathfrak{B}_Y))$ . Reste à vérifier que les applications  $f_{n_k}$  convergent vers  $f$  en mesure. Or

$$A_{2^{-k}}(f_{n_k}, f) = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{p \geq N} A_{2^{-k}}(f_{n_k}, f_{n_{k+p}})$$

donc

$$\mu(A_{2^{-k}}(f_{n_k}, f)) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mu \left( \bigcap_{p \geq N} A_{2^{-k}}(f_{n_k}, f_{n_{k+p}}) \right) \leq 2^{-k}.$$

C.Q.F.D.

Si  $f, f_0, g, g_0 \in \mathcal{L}^0(X, \mathfrak{T})$  sont telles que  $f \equiv_{\mu} f_0$  et  $g \equiv_{\mu} g_0$ , alors  $f + g \equiv_{\mu} f_0 + g_0$  et  $f g \equiv_{\mu} f_0 g_0$  car

$$\begin{aligned} & \{x \mid f(x) + g(x) \neq f_0(x) + g_0(x)\} \cup \{x \mid f(x)g(x) \neq f_0(x)g_0(x)\} \\ & \subseteq \{x \mid f(x) \neq f_0(x)\} \cup \{x \mid g(x) \neq g_0(x)\}. \end{aligned}$$

Si  $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{L}_{\mu}^0(X, \mathfrak{T})$ , posons

$$\mathbf{f} + \mathbf{g} = [f + g], \quad \mathbf{f} \mathbf{g} = [fg].$$

Soit  $\mathcal{L}^{\infty}(X, \mathfrak{T}, \mu) \subseteq \mathcal{L}^0(X, \mathfrak{T})$  l'espace des fonctions  $f$  bornées à l'extérieur d'un ensemble  $E_f$  négligeable pour  $\mu$  (les **fonctions essentiellement bornées** pour  $\mu$ ). Elles forment un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}^0(X, \mathfrak{T})$ . Si  $f \in \mathcal{L}^{\infty}(X, \mathfrak{T}, \mu)$ , soit

$$\|f\|_{\infty} = \inf\{K > 0 \mid \mu(\{x \mid |f(x)| > K\}) = 0\}$$

son **supremum essentiel**. On a donc

$$|f(x)| \leq \|f\|_{\infty} \text{ presque partout}$$

et  $\|f\|_{\infty}$  est le plus petit nombre jouissant de cette propriété. Si  $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_{\mu}^{\infty}(X, \mathfrak{T}, \mu)$ , posons

$$\|\mathbf{f}\|_{\infty} = \|f\|_{\infty}.$$

Un **espace vectoriel normé**  $(X, \|\cdot\|)$  est un espace vectoriel sur lequel est définie une norme  $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, +\infty[$  telle que

**N1**  $\|x\| = 0$  implique  $x = 0$  ;

**N2**  $\|cx\| = |c|\|x\|$  pour tout scalaire  $c$  ;

**N3**  $\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|$ .

La norme induit une distance sur  $X$  :

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Un **espace de Banach** est un espace vectoriel normé complet. Une **algèbre de Banach** est un espace de Banach sur laquelle est défini un produit compatible avec les opérations d'addition et de multiplication scalaire et tel que

$$\mathbf{N4} \quad \|xy\| \leq \|x\|\|y\|.$$

Ce produit est alors continu :

$$\|f_n g_n - fg\| \leq \|f_n\|\|g_n - g\| + \|g\|\|f_n - f\|.$$

**Théorème 46** *L'espace  $(\mathcal{L}_\mu^\infty(X, \mathfrak{T}), \|\cdot\|_\infty)$  est une algèbre de Banach et la convergence essentiellement uniforme entraîne la convergence en mesure.*

Démonstration.

On a

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

et

$$|f(x)g(x)| \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$$

presque partout sur  $X$ , donc

$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \quad \text{et} \quad \|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty.$$

De plus,  $\|cf\|_\infty = |c|\|f\|_\infty$ .

Soit maintenant  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de Cauchy dans  $(\mathcal{L}_\mu^\infty(X, \mathfrak{T}), \|\cdot\|_\infty)$ . Il existe  $X' \in \mathfrak{T}$  tel que  $\mu(X') = \mu(X)$  et que

$$\lim_{n, m \rightarrow +\infty} \|f_n - f_m\|_\infty = \lim_{n, m \rightarrow +\infty} \sup\{|f_n(x) - f_m(x)| \mid x \in X'\} = 0.$$

Soit  $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$  pour  $x \in X'$ , prolongée à  $X$  de la façon habituelle. Sur  $X'$ ,

$$|f_m(x) - f(x)| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup\{|f_m(x) - f_n(x)| \mid x \in X'\} < \epsilon$$

dès que  $m \geq m_\epsilon$ . Donc  $f \in \mathcal{L}^\infty(X, \mathfrak{T})$  et  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \|f_m - f\|_\infty = 0$ . Enfin, la relation

$$\mu(\{x \mid |f(x) - g(x)| > \|f - g\|_\infty\}) \leq \|f - g\|_\infty$$

entraîne

$$d_\mu(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \leq \|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_\infty.$$

C.Q.F.D.

## 7.1 Exercices

1. Soient  $(X, \mathfrak{T}, \mu)$  un espace mesuré et  $f, g \in \mathcal{L}^0(X, \mathfrak{T})$ . Alors  $f \equiv_\mu g$  si et seulement si  $f^+ \equiv_\mu g^+$  et  $f^- \equiv_\mu g^-$ .
2. À quelle condition deux fonctions continues  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sont-elles équivalentes modulo  $\lambda$ ?
3. Montrer par un exemple approprié que le théorème d'Egorov n'est pas nécessairement vrai si la mesure n'est pas finie.
4. Soient  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction indicatrice de l'intervalle

$$]k 2^{-m}, (k+1) 2^{-m}]$$

lorsque  $n = 2^m + k$  avec  $m \geq 0$ ,  $0 \leq k < 2^m$ .

- Montrer que les fonction  $f_n$  convergent en mesure.
  - Montrer qu'elles divergent en chaque point  $x \in ]0, 1]$ .
  - Montrer que la suite partielle  $f_{2^m}$  converge en tout point  $x \in [0, 1]$ .
5. Dans  $\mathcal{L}_\lambda^\infty([0, 1])$ , calculer  $d_\lambda(\mathbf{x}^2, \mathbf{x})$  et  $\|\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}\|_\infty$ .
  6. Soit  $(X, \mathfrak{T}, \mu)$  un espace mesuré de mesure finie. Montrer que la relation

$$\delta_\mu(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \int_X \frac{|f - g|}{1 + |f - g|} d\mu$$

définit sur  $\mathcal{L}_\mu^0(X, \mathfrak{T})$  une distance qui est équivalente à celle de la convergence en mesure  $d_\mu(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ .

7. Montrer par un exemple approprié que la convergence en mesure de  $f_n$  vers  $f$  et la convergence en mesure de  $g_n$  vers  $g$  n'entraîne pas nécessairement celle de  $f_n g_n$  vers  $f g$ .



## 8 ESPACES DE LEBESGUE

Dans ce chapitre, nous allons obtenir des propriétés supplémentaires des fonctions intégrables considérées dans leur ensemble, en tant qu'espaces vectoriels. Nous démontrerons les inégalités de Hölder et de Minkowski, introduirons la notion de convergence en moyenne et étudierons un théorème d'approximation.

Soient  $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  un espace mesuré. Si  $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_\mu^1(X, \mathfrak{A})$ , soit

$$\|\mathbf{f}\|_1 = \|f\|_1 = \int_X |f| \, d\mu.$$

**Théorème 47** *L'espace  $(\mathcal{L}_\mu^1(X, \mathfrak{A}), \|\cdot\|_1)$  est un espace de Banach et la **convergence en moyenne** entraîne la convergence en mesure.*

Démonstration.

Il est clair que  $\|\cdot\|_1$  est une norme sur  $\mathcal{L}_\mu^1(X, \mathfrak{A})$  et que, pour tout  $\delta > 0$ , on a

$$\int_X |f - g| \, d\mu \geq \delta \, \mu(\{x \mid |f(x) - g(x)| > \delta\})$$

(**inégalité de Tchebychev**). Ainsi

$$\inf\{\delta \mid \mu(A_\delta(f, g)) < \delta\} \leq \inf\{\delta \mid \|f - g\|_1 < \delta^2\} = \|f - g\|_1^{1/2},$$

d'où l'inégalité

$$d_\mu(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \leq \|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_1^{1/2}.$$

Soit  $\{\mathbf{f}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de Cauchy dans  $\mathcal{L}_\mu^1(X, \mathfrak{A})$ . Il suffit de voir qu'elle contient une suite partielle convergente dans  $\mathcal{L}_\mu^1(X, \mathfrak{A})$ . Puisque la suite satisfait la condition de Cauchy dans l'espace  $(\mathcal{L}_\mu^0(X, \mathfrak{A}), d_\mu)$ , il existe  $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_\mu^0(X, \mathfrak{A})$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_\mu(\mathbf{f}_n, \mathbf{f}) = 0$ . On peut donc en extraire une suite partielle  $\mathbf{f}_{n_k}$  qui converge presque partout vers  $\mathbf{f}$  (théorème (44) page (81)). En vertu du lemme de Fatou, on a alors

$$\int_X |f_{n_k} - f| \, d\mu \leq \liminf_{j \rightarrow +\infty} \int_X |f_{n_k} - f_{n_j}| \, d\mu < \epsilon$$

dès que  $n_k$  est assez grand, c'est-à-dire que la suite partielle  $\mathbf{f}_{n_k}$  converge également vers  $\mathbf{f}$  en moyenne. C.Q.F.D.

Soit  $p > 0$ . Alors  $\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{T}, \mu) \subseteq \mathcal{L}^0(X, \mathfrak{T})$  désigne l'espace des fonctions de  $p$ -ième puissance intégrable par rapport à  $\mu$  sur  $X$  et si  $\mathbf{f} = [f] \in \mathcal{L}_\mu^p(X, \mathfrak{T})$ , on pose

$$\|\mathbf{f}\|_p = \|f\|_p = \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Si  $p \in ]1, +\infty[$ , soit  $q = p/(p-1)$  de telle sorte que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1;$$

$p$  et  $q$  sont appelés exposants conjugués — on convient que 1 et  $+\infty$  sont aussi des exposants conjugués.

**Théorème 48 (Hölder)** *Soit  $1 \leq p \leq +\infty$ . Si  $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{T}, \mu)$  et  $g \in \mathcal{L}^q(X, \mathfrak{T}, \mu)$ , alors  $fg \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{T}, \mu)$  et*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

avec égalité lorsque  $1 < p < +\infty$  si et seulement si,  $\mu$ -presque partout sur  $X$ , on a

$$\|g\|_q^q |f(x)|^p = \|f\|_p^p |g(x)|^q.$$

Démonstration.

Cas  $p = 1$ . On a évidemment

$$|f(x)g(x)| \leq |f(x)| \|g\|_\infty \quad \mu - \text{presque partout sur } X$$

donc

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$

Cas  $1 < p < +\infty$ . On peut supposer que  $0 < \|f\|_p \|g\|_q$ . La fonction  $t \mapsto \log t$  étant concave sur  $]0, +\infty[$ , on a

$$p^{-1} \log u + q^{-1} \log v \leq \log(p^{-1}u + q^{-1}v)$$

c'est-à-dire

$$u^{1/p} v^{1/q} \leq p^{-1}u + q^{-1}v$$

quels que soient  $u, v > 0$ . Choisisant

$$u = \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p}, \quad v = \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q},$$

on obtient

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p\|g\|_q} \leq p^{-1} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + q^{-1} \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}.$$

En intégrant cette inégalité, on trouve

$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p\|g\|_q} \leq p^{-1} + q^{-1} = 1.$$

La concavité du logarithme étant stricte, on ne peut avoir égalité que si  $\|g\|_q^q |f(x)|^p = \|f\|_p^p |g(x)|^q$   $\mu$ -presque partout sur  $X$ . C.Q.F.D.

**Théorème 49 (Minkowski)** *Soit  $1 \leq p \leq +\infty$ . Si  $f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{T}, \mu)$ , alors  $f + g \in \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{T}, \mu)$  et*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

avec égalité lorsque  $1 < p < +\infty$  si et seulement si,  $\mu$ -presque partout sur  $X$ , on a

$$\|g\|_p f(x) = \|f\|_p g(x).$$

Démonstration.

On peut supposer  $1 < p < +\infty$ . L'inégalité  $|f + g|^p \leq 2^p(|f|^p + |g|^p)$  entraîne  $f + g \in \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{T}, \mu)$ . On peut supposer que  $0 < \|f + g\|_p$ . En vertu de l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &= \int_X |f + g|^p d\mu = \int_X |f + g|^{p-1} |f + g| d\mu \\ &\leq \int_X |f + g|^{p-1} |f| d\mu + \int_X |f + g|^{p-1} |g| d\mu \\ &\leq \|f + g\|_p^{p-1} \|f\|_p + \|f + g\|_p^{p-1} \|g\|_p \end{aligned}$$

d'où, en multipliant par  $\|f + g\|_p^{1-p}$ ,

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

La seconde inégalité sera stricte à moins que l'on ait  $\|g\|_p |f(x)| = \|f\|_p |g(x)|$   $\mu$ -presque partout sur  $X$  et la première implique que  $\text{sgn } f = \text{sgn } g$   $\mu$ -presque partout sur  $X$ . C.Q.F.D.

**Théorème 50 (Riesz-Fischer)** Soit  $1 \leq p \leq +\infty$ . L'espace  $(\mathcal{L}_\mu^p(X, \mathfrak{T}), \|\cdot\|_p)$  est un espace de Banach et la **convergence en moyenne d'ordre  $p$**  entraîne la convergence en mesure.

Démonstration.

On peut supposer  $1 < p < +\infty$ . L'inégalité

$$\int_X |f - g|^p d\mu \geq \delta^p \mu(\{x \mid |f(x) - g(x)| > \delta\})$$

implique l'inégalité

$$d_\mu(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \leq \|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_p^{p/(p+1)}.$$

Cette dernière et l'inégalité de Minkowski impliquent le résultat (comme pour le théorème (47) page (88)). C.Q.F.D.

Un **espace préhilbertien** (réel)  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  est un espace vectoriel (réel)  $X$  sur lequel est défini un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  tel que

**PS1**  $\langle x, x \rangle > 0$  si  $x \neq 0$ ;

**PS2**  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ ;

**PS3**  $\langle c_1x_1 + c_2x_2, y \rangle = c_1\langle x_1, y \rangle + c_2\langle x_2, y \rangle$  pour tous  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

Ces propriétés ont pour conséquence immédiate l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \langle x, x \rangle^{1/2} \langle y, y \rangle^{1/2}$$

et le produit scalaire induit une norme sur  $X$  :

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}.$$

Un **espace de Hilbert** est un espace préhilbertien complet.

Si  $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{L}_\mu^2(X, \mathfrak{T})$ , on pose

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \langle f, g \rangle = \int_X fg d\mu.$$

L'inégalité  $d_\mu(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \leq \|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_2^{2/3}$  entraîne que  $\mathcal{L}_\mu^2(X, \mathfrak{T})$  est un espace de Hilbert.

**Théorème 51** Si  $\mu$  est finie,  $1 \leq p \leq r \leq +\infty$  implique  $\mathcal{L}_\mu^r(X, \mathfrak{T}) \subseteq \mathcal{L}_\mu^p(X, \mathfrak{T})$  et la convergence en moyenne d'ordre  $r$  entraîne la convergence en moyenne d'ordre  $p$ . De plus, si  $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_\mu^\infty(X, \mathfrak{T})$ ,

$$\|\mathbf{f}\|_\infty = \lim_{p \rightarrow +\infty} \|\mathbf{f}\|_p.$$

Démonstration.

Si  $1 \leq p < r < +\infty$ , on a

$$\int_X |f|^p d\mu \leq \left( \int_X |f|^r d\mu \right)^{p/r} \mu(X)^{1-p/r}$$

d'où

$$\|f\|_p \leq \|f\|_r \mu(X)^{1/p-1/r}.$$

Si  $r = +\infty$ , directement,

$$\|f\|_p \leq \|f\|_\infty \mu(X)^{1/p}.$$

Donc, si  $f \in \mathcal{L}_\mu^\infty(X, \mathfrak{T})$ ,

$$\limsup_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty.$$

D'autre part, quel que soit  $\delta \in ]0, \|f\|_\infty[$ , on a

$$\|f\|_p \geq \delta \mu(\{x \mid |f(x)| > \delta\})^{1/p}$$

de telle sorte que

$$\liminf_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty.$$

C.Q.F.D.

Exemple. Soit  $X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathfrak{T}, P)$  une variable aléatoire de carré intégrable. Alors  $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{T}, P)$  admet aussi une espérance mathématique  $\mathbb{E}(X)$  et sa **variance**  $\mathbb{V}(X)$  est

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Comme pour l'espérance mathématique, on peut utiliser la formule

$$\int_\Omega X^2 dP = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dF_X(x)$$

pour la calculer.

**Théorème 52**  $\mathcal{E}_\mu^0(X, \mathfrak{T})$  est dense dans  $\mathcal{L}_\mu^\infty(X, \mathfrak{T})$  et pour tout  $p \in [1, +\infty[$ ,  $\mathcal{E}_\mu^1(X, \mathfrak{T})$  est dense dans  $\mathcal{L}_\mu^p(X, \mathfrak{T})$ .

Démonstration.

Le cas  $p = +\infty$  découle de ce que toute fonction mesurable bornée est une limite uniforme de fonctions mesurables étagées (théorème (32) page (53)). Si  $1 \leq p < +\infty$  et  $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{X}, \mu)$  est positive, il existe une suite croissante de fonctions mesurables positives étagées  $\phi_n$  qui croît vers  $f$ . Puisque  $(f - \phi_n)^p \leq f^p$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - \phi_n\|_p = 0$  (convergence dominée). Le cas général découle de l'inégalité

$$\|f - (\phi - \psi)\|_p \leq \|f^+ - \phi\|_p + \|f^- - \psi\|_p.$$

C.Q.F.D.

Dans le théorème suivant, le **support**  $\text{supp}(f)$  d'une fonction  $f$  désigne le plus petit ensemble fermé à l'extérieur duquel elle s'annule.  $C_c^\infty(\mathbb{R})$  désigne l'espace vectoriel des fonctions  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  indéfiniment dérivables à support compact (dites souvent fonctions de test).

**Théorème 53** *Soit  $1 \leq p < +\infty$ . Alors la classe  $C_c^\infty(\mathbb{R})$  des fonctions  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  indéfiniment dérivables à support compact est dense dans  $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ .*

Démonstration.

Il s'agit de montrer qu'à chaque fonction  $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$  et à chaque  $\epsilon > 0$  correspond une fonction  $g_{f,\epsilon} \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  telle que

$$\|f - g_{f,\epsilon}\|_p < \epsilon.$$

La démonstration se fait en plusieurs étapes.

Observons d'abord que  $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$  si et seulement si  $f^+, f^- \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ . La relation

$$\|f - (g_{f^+,\epsilon} - g_{f^-,\epsilon})\|_p \leq \|f^+ - g_{f^+,\epsilon}\|_p + \|f^- - g_{f^-,\epsilon}\|_p$$

montre qu'il suffit de d'établir l'énoncé pour une fonction de  $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$  positive.

Il existe alors une suite de fonctions mesurables positives étagées  $\varphi_n$  qui croissent vers  $f$  et, en vertu des relations

$$|f - \varphi_n|^p = (f - \varphi_n)^p \leq f^p$$

et du théorème de Lebesgue sur la convergence dominée,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - \varphi_n\|_p = 0.$$

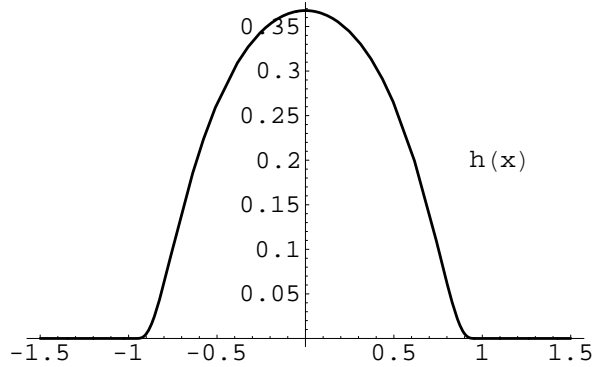


FIG. 2 – Une fonction de test

Il suffit donc de démontrer l'énoncé pour une fonction de  $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$  positive étagée.

Une telle fonction admettant une représentation du type  $\sum_{k=1}^N a_k \mathbb{I}_{E_k}$  où  $\lambda(E_k) < +\infty$  pour  $1 \leq k \leq N$ , il suffit de démontrer l'énoncé pour la fonction indicatrice d'un ensemble mesurable de mesure finie.

A un tel ensemble  $E$  et à chaque  $\epsilon > 0$  correspond un ensemble ouvert  $O$  qui contient  $E$  et qui est tel que

$$\lambda(E) < \lambda(O) < \lambda(E) + \epsilon$$

de telle sorte que

$$\|\mathbb{I}_E - \mathbb{I}_O\|_p^p = \lambda(OE^c) < \epsilon.$$

Il suffit donc de démontrer l'énoncé pour la fonction indicatrice d'un ensemble ouvert de mesure finie.

Puisqu'un tel ensemble  $O$  admet une représentation  $O = \sum_k I_k$  où les intervalles ouverts  $I_k$  sont de mesure finie et puisqu'alors

$$\|\mathbb{I}_O - \sum_{k=1}^N \mathbb{I}_{I_k}\|_p^p = \sum_{k=N+1}^{+\infty} \lambda(I_k) < \epsilon$$

dès que  $N$  est assez grand, il suffit de démontrer l'énoncé pour la fonction indicatrice d'un intervalle ouvert de mesure finie  $]a, b[$ .

Pour ce faire, introduisons la fonction  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$h(x) = e^{-1/(1-x^2)} \mathbb{I}_{]-1, +1[}(x).$$

(Figure 2). On vérifie par récurrence sur  $n$  que

$$h^{(n)}(x) = h(x) \frac{p_n(x)}{(1-x^2)^{2n}}$$

où  $p_n(x)$  est un polynôme en  $x$ , ce qui montre que  $h \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  et que  $\text{supp}(h) = [-1, +1]$ . Soit

$$H = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dx.$$

Considérons le produit de convolution

$$g_\delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}_{]a,b[}(y) \frac{1}{H} h\left(\frac{x-y}{\delta}\right) \frac{dy}{\delta} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}_{]a,b[}(x-z\delta) \frac{1}{H} h(z) dz.$$

Dans la première expression, la dérivation sous le signe intégral est aisément justifiée et montre que  $g_\delta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  avec  $\text{supp}(g_\delta) = [a - \delta, b + \delta]$ . Dans la deuxième expression, le théorème de la convergence dominée permet de passer la limite sous le signe intégral et entraîne que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} g_\delta(x) = \mathbb{I}_{]a,b[}(x).$$

Enfin, la relation

$$|g_\delta(x) - \mathbb{I}_{]a,b[}(x)| \leq 2 \mathbb{I}_{[a-1, b+1]}(x)$$

(qui est valable dès que  $\delta < 1$ ) implique, toujours par convergence dominée, que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|g_\delta - \mathbb{I}_{]a,b[}\|_p = 0.$$

C.Q.F.D.

## 8.1 Exercices

1. Soient  $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  une variable aléatoire admettant une espérance mathématique et  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe dérivable telle que  $\phi \circ X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ . Montrer que

$$\phi\left(\int_{\Omega} X dP\right) \leq \int_{\Omega} \phi(X) dP$$

(**inégalité de Jensen**).

(Suggestion : utiliser l'inégalité de convexité  $\phi'(t_0)(t - t_0) + \phi(t_0) \leq \phi(t)$ ).



2. Soient  $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{T}, P)$  une variable aléatoire admettant une espérance mathématique. Montrer que

$$\sqrt{1 + \|X\|_1^2} \leq \int_{\Omega} \sqrt{1 + X^2} dP \leq 1 + \|X\|_1.$$

3. Soient  $0 < p < r < s < +\infty$ . Montrer que

$$\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{T}, \mu) \mathcal{L}^s(X, \mathfrak{T}, \mu) \subseteq \mathcal{L}^r(X, \mathfrak{T}, \mu).$$

4. Soient  $1 \leq p \leq r \leq +\infty$ . Montrer que

$$\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{T}, \mu) \mathcal{L}^\infty(X, \mathfrak{T}, \mu) \subseteq \mathcal{L}^r(X, \mathfrak{T}, \mu) \mathcal{L}^\infty(X, \mathfrak{T}, \mu).$$

5. Soient  $1 < p, q, r < +\infty$  des nombres tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$$

et

$$f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}), g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}), h \in \mathcal{L}^r(\mathbb{R}).$$

Montrer que  $fgh \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  et que

$$\|fgh\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_r.$$

6. Soient  $f \in \mathcal{L}^p([0, +\infty[ )$  et  $g \in \mathcal{L}^q([0, +\infty[ )$  où  $1 \leq p, q \leq +\infty$  sont conjugués. Calculer

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(s)g(s) ds.$$

7. Soit  $f : [0, A] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction s'annulant à l'origine et admettant une dérivée continue. Montrer que, quel que soit  $p \geq 1$ , on a

$$\|f\|_p \leq \frac{A}{p^{1/p}} \|f'\|_p.$$

L'égalité est-elle possible ?

8. Montrer que  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \not\subseteq \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  et que  $\mathcal{L}^1([0, 1]) \not\subseteq \mathcal{L}^2([0, 1])$ .  
 9. Soient  $f, g \in \mathcal{L}^2(E)$ . Montrer que

$$\|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 = \frac{1}{2} (\|f + g\|_2^2 + \|f - g\|_2^2)$$

(identité du parallélogramme).

10. Soit  $0 < p < 1$ . Montrer que si  $f, g \in \mathcal{L}^p(E)$ , alors  $f + g \in \mathcal{L}^p(E)$  mais que l'inégalité

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

n'est plus nécessairement satisfaite.

11. On considère les fonctions  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définies par

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^{\alpha+\beta}x & \text{si } 0 \leq x \leq 1/(2n^\alpha) \\ 2n^\beta(1 - n^\alpha x) & \text{si } 1/(2n^\alpha) \leq x \leq 1/n^\alpha \\ 0 & \text{si } 1/n^\alpha \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Montrer qu'elles convergent vers 0 en chaque point  $x \in [0, 1]$  puis déterminer les valeurs de  $p$  pour lesquelles elles convergent au sens de  $\mathcal{L}^p([0, 1])$ .

12. Soient  $1 \leq p, q \leq +\infty$  des exposants conjugués,  $f_n \in \mathcal{L}^p(E)$  des fonctions qui convergent au sens de  $\mathcal{L}^p(E)$  vers une fonction  $f \in \mathcal{L}^p(E)$  et  $g_n \in \mathcal{L}^q(E)$  des fonctions qui convergent au sens de  $\mathcal{L}^q(E)$  vers une fonction  $g \in \mathcal{L}^q(E)$ . Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n g_n = \int_E f g.$$

13. Montrer que les fonctions  $f_n(x) = \sin nx$  forment dans l'espace de Hilbert  $\mathcal{L}^2([-\pi, \pi])$  une suite bornée ( $\|f_n\|_2$  restent bornées) qui n'admet aucune suite partielle convergente (au sens de  $\mathcal{L}^2([-\pi, \pi])$ ).
14. Soient  $f_n \in \mathcal{L}^p(E)$  des fonctions qui convergent simplement (ponctuellement) vers une fonction  $f \in \mathcal{L}^p(E)$ . Montrer qu'elles convergent au sens de  $\mathcal{L}^p(E)$  ( $1 \leq p < +\infty$ ) si et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p.$$

15. Soit  $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$  ( $1 \leq p < +\infty$ ). Montrer que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} = 0.$$

Suggestion : considérer d'abord une fonction dans  $C_c^\infty(\mathbb{R})$ .

16. Soient  $1 \leq p, q \leq +\infty$  des exposants conjugués,  $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}), g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R})$  et

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) dt$$

leur produit de convolution. Montrer que  $h$  est une fonction continue et bornée sur  $\mathbb{R}$ .

## 9 DÉRIVATION

Dans ce chapitre, pour étudier jusqu'à quel point les opérations d'intégration et de dérivation sont les inverses l'une de l'autre, c'est-à-dire sous quelles hypothèses les relations

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

et

$$\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a)$$

sont valables, nous allons introduire la classe des fonctions à variation bornée puis celle des fonctions absolument continues. Nous verrons notamment comment les formules d'intégration par parties et de changement de variables s'étendent à l'intégrale de Lebesgue.

### 9.1 Fonctions à variation bornée

Soit  $f \in \mathcal{L}^1([a, b])$  et considérons son intégrale définie, la fonction  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  déterminée par

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Une première propriété de cette fonction est sa continuité. Si  $h > 0$ ,

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^b \mathbb{I}_{(x, x+h)}(t) f(t) dt$$

alors que si  $h < 0$ ,

$$F(x+h) - F(x) = - \int_a^b \mathbb{I}_{(x+h, x)}(t) f(t) dt$$

de telle sorte que, en vertu du théorème de la convergence dominée de Lebesgue,

$$\lim_{h \rightarrow 0} (F(x+h) - F(x)) = 0.$$

Une seconde propriété de la fonction  $F$  découle de sa représentation comme la différence de deux fonctions croissantes,

$$F = \int_a^x f^+ - \int_a^x f^-.$$

En vertu du théorème qui suit, la fonction  $F$  est à variation bornée.

Une fonction  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est une **fonction à variation bornée** sur  $[a, b]$  si les sommes

$$s(\phi, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^n |\phi(x_k) - \phi(x_{k-1})|$$

restent bornées quelle que soit la partition

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}, \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b,$$

de l'intervalle  $[a, b]$ . Sa variation sur l'intervalle  $[a, b]$  est alors

$$\text{var}(\phi, [a, b]) = \sup\{s(\phi, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P}\}.$$

**Théorème 54 (Jordan)** *Une fonction  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est à variation bornée sur  $[a, b]$  si et seulement si elle peut s'écrire comme la différence de deux fonctions croissantes sur  $[a, b]$ .*

Démonstration.

La condition est suffisante. Si  $\phi = g - h$  est la différence de deux fonctions croissantes, on a

$$\begin{aligned} s(\phi, \mathcal{P}) &\leq \sum_{k=1}^n |g(x_k) - g(x_{k-1})| + \sum_{k=1}^n |h(x_k) - h(x_{k-1})| \\ &= \sum_{k=1}^n (g(x_k) - g(x_{k-1})) + \sum_{k=1}^n (h(x_k) - h(x_{k-1})) \\ &= g(b) - g(a) + h(b) - h(a) \end{aligned}$$

pour toute partition  $\mathcal{P}$  de  $[a, b]$ .

La condition est nécessaire. On a en effet, quelque soit  $c \in ]a, b[$ , que

$$\text{var}(\phi, [a, b]) = \text{var}(\phi, [a, c]) + \text{var}(\phi, [c, b])$$

ce qui montre que la fonction

$$V(x) = \text{var}(\phi, [a, x])$$

est croissante. Il en est de même pour la fonction

$$j(x) = V(x) - \phi(x)$$

puisque, si  $x_1 < x_2$ ,

$$j(x_2) - j(x_1) = \text{var}(\phi, [x_1, x_2]) - (\phi(x_2) - \phi(x_1)) \geq 0.$$

C.Q.F.D.

Il y a bien sûr plus d'une façon de représenter une fonction à variation bornée comme la différence de deux fonctions croissantes. La représentation précédente est, d'une certaine façon, optimale (exercices 2 et 3 page 112).

Il suit de ce théorème que les discontinuités d'une fonction à variation bornée  $\phi$  forment un ensemble au plus dénombrable. Ce sont les points  $x$  où  $\phi$  fait un saut :

$$\phi(x-) = \lim_{h \downarrow 0} \phi(x - h) \neq \lim_{h \downarrow 0} \phi(x + h) = \phi(x+).$$

L'étude des fonctions à variations bornées s'appuie sur le théorème suivant.

**Théorème 55 (Vitali)** *Soit  $E \subseteq \mathbb{R}$  un ensemble de mesure extérieure finie. Supposons que  $\{I_\alpha\}_{\alpha \in A}$  est une famille (pas nécessairement dénombrable) d'intervalles d'intérieur non vide ayant la propriété suivante : pour tout  $x \in E$  et pour  $\epsilon > 0$  arbitrairement petit, on peut trouver  $\alpha \in A$  tel que  $x \in I_\alpha$  et  $\lambda(I_\alpha) < \epsilon$ . Alors à chaque  $\epsilon > 0$  correspond un ensemble fini d'intervalles deux à deux disjoints  $\{I_{\alpha_1}, I_{\alpha_2}, \dots, I_{\alpha_N}\}$  tels que*

$$\lambda^* \left( E \cap \left( \sum_{k=1}^N I_{\alpha_k} \right)^c \right) < \epsilon.$$

Démonstration.

En considérant si nécessaire leur adhérence, on peut supposer que les intervalles  $I_\alpha$  sont fermés. Soit  $O \subseteq \mathbb{R}$  un ensemble ouvert de mesure finie contenant  $E$ . En ne considérant si nécessaire que ceux qui le sont, on peut supposer que tous les intervalles  $I_\alpha$  sont contenus dans  $O$ .

Formons alors une suite d'intervalles disjoints  $\{I_{\alpha_k}\}_k$  de la façon suivante.  $I_{\alpha_1}$  est choisi arbitrairement. Si les intervalles disjoints  $I_{\alpha_1}, I_{\alpha_2}, \dots, I_{\alpha_n}$  ont déjà été choisis, posons

$$\Lambda_n = \sup_{\alpha \in A} \{ \lambda(I_\alpha) \mid I_\alpha I_{\alpha_k} = \emptyset \text{ pour } 1 \leq k \leq n \}$$

et choisissons un intervalle  $I_{\alpha_{n+1}}$  tel que

$$I_{\alpha_{n+1}} I_{\alpha_k} = \emptyset \text{ pour } 1 \leq k \leq n \text{ et } \lambda(I_{\alpha_{n+1}}) > \frac{\Lambda_n}{2}.$$

Si ce processus s'arrête après  $N$  étapes (faute d'intervalles  $I_\alpha$  remplissant la condition), on a nécessairement

$$E \subseteq \sum_{k=1}^N I_{\alpha_k}$$

car si

$$x \in E \cap \left( \sum_{k=1}^N I_{\alpha_k} \right)^c,$$

il existe, par hypothèse, un intervalle  $I_\alpha$  contenant  $x$  et tel que  $I_\alpha I_{\alpha_k} = \emptyset$  pour  $1 \leq k \leq N$ . S'il ne s'arrête jamais, la relation

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda(I_{\alpha_k}) \leq \lambda(O) < +\infty$$

implique que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda(I_{\alpha_k}) = 0$$

et aussi que l'on peut trouver  $N$  tel que

$$\sum_{k > N} \lambda(I_{\alpha_k}) < \epsilon/5.$$

Montrons que dans ce cas,

$$\lambda^* \left( E \cap \left( \sum_{k=1}^N I_{\alpha_k} \right)^c \right) < \epsilon.$$

Soit en effet

$$x \in E \cap \left( \sum_{k=1}^N I_{\alpha_k} \right)^c.$$

Il existe, par hypothèse, un intervalle  $I_{\alpha'}$  contenant  $x$  et tel que  $I_{\alpha'} I_{\alpha_k} = \emptyset$  pour  $1 \leq k \leq N$ . D'autre part, il doit aussi exister des intervalles de la suite  $\{I_{\alpha_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  tels que  $I_{\alpha'} I_{\alpha_k} \neq \emptyset$ . Autrement on aurait  $\lambda(I_{\alpha'}) \leq \Lambda_k < 2 \lambda(I_{\alpha_{k+1}})$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , ce qui impliquerait  $\lambda(I_{\alpha'}) = 0$ . Soit donc  $I_{\alpha_n}$  le premier des intervalles de la suite  $\{I_{\alpha_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  tel que  $I_{\alpha'} I_{\alpha_n} \neq \emptyset$ . Alors  $n > N$  et

$$\lambda(I_{\alpha'}) \leq \Lambda_{n-1} < 2 \lambda(I_{\alpha_n}).$$

Ainsi la distance de  $x$  au centre  $x_n$  de l'intervalle  $I_{\alpha_n}$  est au plus

$$\lambda(I_{\alpha'}) + \frac{1}{2}\lambda(I_{\alpha_n}) < \frac{5}{2}\lambda(I_{\alpha_n})$$

et

$$x \in [x_n - \frac{5}{2}\lambda(I_{\alpha_n}), x_n + \frac{5}{2}\lambda(I_{\alpha_n})].$$

Donc

$$\lambda^* \left( E \cap \left( \sum_{k=1}^N I_{\alpha_k} \right)^c \right) \leq \sum_{n>N} 5 \lambda(I_{\alpha_n}) < \epsilon.$$

C.Q.F.D.

**Théorème 56 (Lebesgue)** *Une fonction à variation bornée  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est dérivable presque partout.*

Démonstration.

On peut supposer que  $\phi$  est croissante et, en posant  $\phi(x) = \phi(a)$  si  $x < a$  et  $\phi(x) = \phi(b)$  si  $x > b$ , que l'intervalle  $[a, b]$  est symétrique par rapport à l'origine. Considérons les dérivées de Dini de  $\phi$  en un point  $x \in ]a, b[$  :

$$\begin{aligned} D_- \phi(x) &= \liminf_{h \downarrow 0} \frac{\phi(x-h) - \phi(x)}{-h} \\ D^- \phi(x) &= \limsup_{h \downarrow 0} \frac{\phi(x-h) - \phi(x)}{-h} \\ D_+ \phi(x) &= \liminf_{h \downarrow 0} \frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h} \\ D^+ \phi(x) &= \limsup_{h \downarrow 0} \frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h}. \end{aligned}$$

Il s'agit de montrer que l'on a

$$D_- \phi(x) = D^- \phi(x) = D_+ \phi(x) = D^+ \phi(x) < +\infty$$

presque partout sur  $]a, b[$ . Il suffit en fait de montrer que

$$D^+ \phi(x) \leq D_- \phi(x) < +\infty$$

presque partout sur  $]a, b[$ . En considérant la fonction croissante  $\psi(x) = -\phi(-x)$  pour laquelle  $D_- \psi(-x) = D_+ \phi(x)$  et  $D^+ \psi(-x) = D^- \phi(x)$ , cette relation entraînera en effet d'abord que  $D^- \phi(x) \leq D_+ \phi(x)$  puis que

$$D_- \phi(x) \leq D^- \phi(x) \leq D_+ \phi(x) \leq D^+ \phi(x) \leq D_- \phi(x) < +\infty$$

presque partout sur  $]a, b[$ . On a

$$\{x \mid D^+\phi(x) > D_-\phi(x)\} = \bigcup_{s,t \in \mathbb{Q}} \{x \mid D^+\phi(x) > s > t > D_-\phi(x)\}$$

et il s'agit de voir que, quels que soient  $s, t \in \mathbb{Q}$ ,

$$\lambda^*(\{x \mid D^+\phi(x) > s > t > D_-\phi(x)\}) = 0.$$

Posons

$$E = \{x \mid D^+\phi(x) > s > t > D_-\phi(x)\}.$$

Soit  $O \subseteq \mathbb{R}$  un ensemble ouvert contenant  $E$  et tel que  $\lambda(O) < \lambda^*(E) + \epsilon$ .

Si  $x \in E$ ,

$$D_-\phi(x) = \liminf_{h \downarrow 0} \frac{\phi(x-h) - \phi(x)}{-h} < t.$$

Donc pour chaque  $x \in E$  et pour  $h > 0$  arbitrairement petit, il existe un intervalle  $[x-h, x] \subseteq O$  tel que

$$\phi(x) - \phi(x-h) < th.$$

En vertu du théorème de Vitali, on peut trouver

$$\{[x_1 - h_1, x_1], [x_2 - h_2, x_2], \dots, [x_N - h_N, x_N]\}$$

disjoints tels que, si

$$D = \sum_{k=1}^N ]x_k - h_k, x_k[ ,$$

on ait

$$\lambda^*(ED) > \lambda^*(E) - \epsilon.$$

De plus,

$$\sum_{k=1}^N (\phi(x_k) - \phi(x_k - h_k)) < t \sum_{k=1}^N h_k < t\lambda(O) < t(\lambda^*(E) + \epsilon).$$

Si  $y \in ED$ ,

$$D^+\phi(y) = \limsup_{h \downarrow 0} \frac{\phi(y+h) - \phi(y)}{h} > s.$$

Donc pour chaque  $y \in ED$  et pour  $H > 0$  arbitrairement petit, il existe un intervalle  $[y, y+H] \subseteq D$  tel que

$$\phi(y+H) - \phi(y) > sH.$$



En vertu du théorème de Vitali, on peut trouver

$$\{[y_1, y_1 + H_1], [y_2, y_2 + H_2], \dots, [y_M, y_M + H_M]\}$$

disjoints tels que, si

$$G = \sum_{j=1}^M ]y_j, y_j + H_j[ ,$$

on ait

$$\lambda^*(EG) > \lambda^*(ED) - \epsilon > \lambda^*(E) - 2\epsilon.$$

De plus,

$$\sum_{j=1}^M (\phi(y_j + H_j) - \phi(y_j)) > s \sum_{j=1}^M H_j > s(\lambda^*(E) - 2\epsilon).$$

Maintenant remarquons que chaque intervalle  $]y_j, y_j + H_j[$  doit être contenu dans l'un des intervalles  $]x_k - h_k, x_k[$ . En regroupant les termes de la somme

$$\sum_{j=1}^M (\phi(y_j + H_j) - \phi(y_j))$$

suivant les intervalles  $]x_k - h_k, x_k[$  auxquels ils correspondent et en utilisant le fait que la fonction  $\phi$  est croissante, on obtient

$$\sum_{j=1}^M (\phi(y_j + H_j) - \phi(y_j)) \leq \sum_{k=1}^N (\phi(x_k) - \phi(x_k - h_k)).$$

Ceci entraîne  $s(\lambda^*(E) - 2\epsilon) \leq t(\lambda^*(E) + \epsilon)$  donc  $s\lambda^*(E) \leq t\lambda^*(E)$  et enfin  $\lambda^*(E) = 0$ . Pour voir que l'on a

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h} < +\infty$$

presque partout sur  $[a, b]$ , nous utilisons le lemme de Fatou :

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \frac{\phi(x + 1/n) - \phi(x)}{1/n} dx &= \liminf_{n \rightarrow +\infty} n \left( \int_{a+1/n}^{b+1/n} \phi(x) dx - \int_a^b \phi(x) dx \right) \\ &= \liminf_{n \rightarrow +\infty} n \left( \int_b^{b+1/n} \phi(x) dx - \int_a^{a+1/n} \phi(x) dx \right) \\ &= \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left( \phi(b) - n \int_a^{a+1/n} \phi(x) dx \right) \leq \phi(b) - \phi(a). \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

Remarque. Si  $\phi$  est croissante sur l'intervalle  $[a, b]$ , la fonction  $\phi'$  n'est définie que presque partout sur  $[a, b]$ . On la prolonge à l'intervalle  $[a, b]$  tout entier en la posant égale à 0 aux points où la limite du quotient différentiel n'existe pas ou est infinie. On obtient ainsi une fonction mesurable positive encore dénotée  $\phi'$  et telle que

$$\int_a^b \phi' \leq \phi(b) - \phi(a).$$

Cette inégalité peut être stricte, par exemple, pour une fonction constante entre ses sauts.

**Théorème 57** Soient  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction intégrable et  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Alors, presque partout sur  $[a, b]$ ,

$$F'(x) = f(x).$$

Démonstration.

On peut supposer que  $f$  est positive. Le cas général se ramène à celui où  $f$  est bornée en considérant la suite croissant vers  $f$  des fonctions bornées  $f_n = \inf\{f, n\}$ . On a en effet

$$F(x) = G_n(x) + F_n(x)$$

où

$$G_n(x) = \int_a^x (f(t) - f_n(t)) dt \quad \text{et} \quad F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt.$$

Comme  $G_n$  est croissante, elle est dérivable et  $G'_n(x) \geq 0$  presque partout sur  $[a, b]$  et, par hypothèse,  $F'_n(x) = f_n(x)$  presque partout sur le même intervalle. Par suite

$$F'(x) = G'_n(x) + F'_n(x) \geq f_n(x)$$

donc

$$F'(x) \geq f(x)$$

presque partout sur l'intervalle  $[a, b]$ , ce qui entraîne

$$F(b) \geq \int_a^b F'(t) dt \geq \int_a^b f(t) dt = F(b)$$

et enfin

$$F'(x) = f(x)$$

presque partout sur l'intervalle  $[a, b]$ . Supposant donc  $f$  positive et bornée, soit  $x$  un point quelconque de l'intervalle  $]a, b[$  et montrons que

$$\int_a^x F'(t) dt = \int_a^x f(t) dt.$$

En vertu du théorème de la convergence dominée

$$\left( \frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(s) ds \leq \|f\|_\infty \right)$$

et du théorème fondamental du calcul ( $F$  est continue), on a en effet

$$\begin{aligned} \int_a^x F'(t) dt &= \int_a^x \lim_{h \downarrow 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} dt = \lim_{h \downarrow 0} \int_a^x \frac{F(t+h) - F(t)}{h} dt \\ &= \lim_{h \downarrow 0} \left( \frac{1}{h} \int_x^{x+h} F(t) dt - \frac{1}{h} \int_a^{a+h} F(t) dt \right) = F(x) - F(a) = F(x). \end{aligned}$$

Observons finalement que si  $g \in \mathcal{L}^1([a, b])$  est telle que

$$\int_a^x g = 0$$

pour tout  $x \in ]a, b[$ , alors  $g = 0$  presque partout sur  $[a, b]$  (on prendra ici  $g = F' - f$ ). En effet,  $\int_I g = 0$  pour tout intervalle ouvert  $I$  donc  $\int_O g = 0$  pour tout ensemble ouvert  $O$ . Soit

$$E = \{x \mid g(x) > 0\}.$$

Si l'on avait  $\lambda(E) > 0$ , on pourrait trouver un ensemble ouvert  $O$  tel que

$$]a, b[ \cap E^c \subseteq O \subseteq ]a, b[$$

et

$$\lambda(O) < b - a$$

donc

$$\lambda(]a, b[ \cap O^c) > 0.$$

Comme ce dernier ensemble est entièrement contenu dans  $E$ , on obtiendrait une contradiction :

$$-\int_O g = \int_{]a, b[ \cap O^c} g > 0.$$

C.Q.F.D.

## 9.2 Fonctions absolument continues

Une troisième propriété de l'intégrale définie  $F$  découle de la propriété suivante des fonctions intégrables.

Soit  $f \in \mathcal{L}^1([a, b])$ . Alors à chaque  $\epsilon > 0$  correspond  $\delta > 0$  tel que

$$\lambda(E) < \delta \text{ implique } \int_E |f| < \epsilon. \quad (2)$$

Cela est évident si  $|f|$  est bornée. Pour y ramener le cas général, introduisons la suite croissant vers  $|f|$  des fonctions bornées  $f_n = \inf\{|f|, n\}$ . En vertu du théorème de la convergence monotone, on peut trouver  $n$  tel que

$$\int_a^b (|f| - f_n) < \epsilon/2.$$

Si

$$\lambda(E) < \frac{\epsilon}{2n},$$

on aura

$$\int_E |f| = \int_E (|f| - f_n) + \int_E f_n \leq \int_a^b (|f| - f_n) + n\lambda(E) < \epsilon.$$

La relation (2) implique que  $F$  est absolument continue.

Une fonction  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est une **fonction absolument continue** sur  $[a, b]$  si à chaque  $\epsilon > 0$  correspond  $\delta > 0$  tel que pour toute suite finie de sous-intervalles ouverts deux à deux disjoints

$$\{ ]s_1, t_1[, ]s_2, t_2[, \dots, ]s_n, t_n[ \}$$

de  $[a, b]$  on ait

$$\sum_{k=1}^n (t_k - s_k) < \delta \text{ implique } \sum_{k=1}^n |\phi(t_k) - \phi(s_k)| < \epsilon.$$

Une fonction absolument continue sur un intervalle  $[a, b]$  est uniformément continue sur cet intervalle. Elle y est aussi à variation bornée. Soit en effet  $\Delta > 0$  le nombre associé à  $\epsilon = 1$ . Donnée une partition  $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$  de l'intervalle  $[a, b]$ , considérons la partition  $\mathcal{P}' = \{x'_0, x'_1, x'_2, \dots, x'_m\}$  obtenue de  $\mathcal{P}$  en lui adjoignant les points

$$a + k \frac{b-a}{N}, \quad 0 \leq k \leq N, \quad \text{où} \quad \frac{b-a}{\Delta} \leq N < \frac{b-a}{\Delta} + 1.$$

Alors, regroupant les termes de la seconde somme en  $N$  paquets,

$$\sum_{k=1}^n |\phi(x_k) - \phi(x_{k-1})| \leq \sum_{k=1}^m |\phi(x'_k) - \phi(x'_{k-1})| \leq N < \frac{b-a}{\Delta} + 1.$$

**Théorème 58** Une fonction  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est absolument continue sur  $[a, b]$  si et seulement si elle admet presque partout une dérivée  $\phi'$  intégrable et telle que

$$\int_a^x \phi' = \phi(x) - \phi(a)$$

pour tout  $x \in [a, b]$ .

Démonstration.

La condition est suffisante. Nous avons déjà démontré que l'intégrale définie d'une fonction intégrable est absolument continue.

La condition est nécessaire. On sait déjà que  $\phi$ , étant à variation bornée, admet presque partout une dérivée intégrable  $\phi'$ . On sait aussi que la fonction

$$\phi_1(x) = \int_a^x \phi'(t) dt + \phi(a)$$

est absolument continue et que  $\phi'_1(x) = \phi'(x)$  presque partout sur l'intervalle  $[a, b]$ . Observons pour terminer que si une fonction  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est absolument continue sur  $[a, b]$ , telle que  $g(a) = 0$  et que  $g' = 0$  presque partout, alors  $g = 0$  partout sur l'intervalle  $[a, b]$  (on prendra ici  $g = \phi - \phi_1$ ). Soit en effet  $x \in ]a, b[$  et considérons l'ensemble

$$E = \{t \in ]a, x[ \mid g'(t) = 0\}.$$

Si  $t \in E$ ,

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} = 0.$$

Donc pour chaque  $t \in E$  et pour tout  $h > 0$  assez petit, il existe un intervalle  $[t, t+h] \subseteq ]a, x[$  tel que

$$g(t+h) - g(t) < \frac{\epsilon h}{2(b-a)}.$$

Soit  $\delta > 0$  le nombre associé à  $\epsilon/2$  dans la définition de continuité absolue de  $g$  sur  $[a, b]$ . En vertu du théorème de Vitali, on peut trouver des intervalles deux à deux disjoints

$$\{[t_1, t_1 + h_1], [t_2, t_2 + h_2], \dots, [t_N, t_N + h_N]\}$$

tels que

$$\lambda \left( E \left( \sum_{k=1}^N [t_k, t_k + h_k] \right)^c \right) < \delta$$

donc que

$$\lambda \left( ]a, x[ \left( \sum_{k=1}^N [t_k, t_k + h_k] \right)^c \right) < \delta.$$

Alors

$$\begin{aligned} |g(x)| &= |g(x) - g(t_N + h_N) + g(t_1)| \\ &+ \sum_{k=1}^{N-1} (g(t_{k+1}) - g(t_k + h_k)) + \sum_{k=1}^N (g(t_k + h_k) - g(t_k)) \\ &\leq |g(x) - g(t_N + h_N)| + |g(t_1)| \\ &+ \sum_{k=1}^{N-1} |g(t_{k+1}) - g(t_k + h_k)| + \sum_{k=1}^N |g(t_k + h_k) - g(t_k)| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2(b-a)} \sum_{k=1}^N h_k \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Le point  $x \in ]a, b[$  et le nombre  $\epsilon > 0$  étant arbitraires, le résultat est établi. C.Q.F.D.

**Théorème 59** Soient  $\phi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions absolument continues sur  $[a, b]$ . Alors la fonction  $\phi\psi$  est absolument continue sur  $[a, b]$  et

$$\int_a^b \phi\psi' = \phi(b)\psi(b) - \phi(a)\psi(a) - \int_a^b \phi'\psi.$$

Démonstration.

La première assertion découle de l'inégalité

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n |\phi(t_k)\psi(t_k) - \phi(s_k)\psi(s_k)| \\ &= \sum_{k=1}^n |(\phi(t_k) - \phi(s_k))\psi(t_k) + \phi(s_k)(\psi(t_k) - \psi(s_k))| \\ &\leq \sum_{k=1}^n |\phi(t_k) - \phi(s_k)| \|\psi\|_\infty + \|\phi\|_\infty \sum_{k=1}^n |\psi(t_k) - \psi(s_k)|. \end{aligned}$$

Comme

$$(\phi\psi)' = \phi'\psi + \phi\psi'$$

presque partout et comme

$$\int_a^b (\phi\psi)' = \phi(b)\psi(b) - \phi(a)\psi(a),$$

la formule d'intégration par parties est démontrée. C.Q.F.D.

**Théorème 60** Soit  $\phi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  une fonction absolument continue et strictement croissante, appliquant  $[c, d]$  sur  $[a, b]$ . Pour toute fonction  $f \in \mathcal{L}^1([a, b])$ , la fonction  $y \mapsto f(\phi(y))\phi'(y)$  est intégrable sur  $[c, d]$  et l'on a

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(\phi(y))\phi'(y) dy.$$

Démonstration.

La démonstration se fait en plusieurs étapes.

Si  $f = \mathbb{I}_{(u,v)}$  est la fonction indicatrice d'un intervalle,  $f \circ \phi = \mathbb{I}_{(\phi^{-1}(u), \phi^{-1}(v))}$  et la formule est vraie puisqu'elle s'écrit

$$v - u = \int_{\phi^{-1}(u)}^{\phi^{-1}(v)} \phi'(y) dy.$$

Si  $f = \mathbb{I}_O = \sum_k \mathbb{I}_{(u_k, v_k)}$  est la fonction indicatrice d'un ensemble ouvert,  $f \circ \phi = \mathbb{I}_{\phi^{-1}(O)} = \sum_k \mathbb{I}_{(\phi^{-1}(u_k), \phi^{-1}(v_k))}$  et

$$\lambda(O) = \sum_k (v_k - u_k) = \sum_k \int_{\phi^{-1}(u_k)}^{\phi^{-1}(v_k)} \phi'(y) dy = \int_{\phi^{-1}(O)} \phi'(y) dy$$

en vertu de l'additivité de l'intégrale.

Pour étudier le cas où  $f = \mathbb{I}_E$  est la fonction indicatrice d'un ensemble mesurable quelconque, introduisons l'ensemble

$$H = \{y \mid \phi'(y) > 0\}.$$

Si  $N \subseteq [a, b]$  est un ensemble de mesure nulle, on peut trouver une suite décroissante d'ensembles ouverts  $O_k \supseteq N$  tels que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda(O_k) = 0$ . Alors

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda(O_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\phi^{-1}(O_k)} \phi'(y) dy \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\phi^{-1}(O_k)H} \phi'(y) dy = \int_{\bigcap_k \phi^{-1}(O_k)H} \phi'(y) dy \end{aligned}$$

ce qui montre que l'ensemble  $\bigcap_k \phi^{-1}(O_k)H$  est de mesure nulle, donc que l'ensemble  $\phi^{-1}(N)H$  l'est aussi. Si donc  $f = \mathbb{I}_E$ , on peut trouver une suite décroissante d'ensembles ouverts  $O_k$  tels que

$$\bigcap_k O_k = E + N$$

où  $N$  est un ensemble de mesure nulle. La relation

$$\bigcap_k \phi^{-1}(O_k)H = \phi^{-1}(E)H + \phi^{-1}(N)H$$

permet alors d'écrire

$$\begin{aligned} \lambda(E) &= \lambda\left(\bigcap_k O_k\right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda(O_k) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\phi^{-1}(O_k)} \phi'(y) dy = \int_{\bigcap_k \phi^{-1}(O_k)} \phi'(y) dy = \int_{\bigcap_k \phi^{-1}(O_k)H} \phi'(y) dy \\ &= \int_{\phi^{-1}(E)H} \phi'(y) dy = \int_c^d \mathbb{I}_E(\phi(y)) \phi'(y) dy. \end{aligned}$$

Le théorème est donc vrai, par linéarité, pour une fonction  $f$  mesurable positive étagée, puis pour une fonction  $f$  mesurable positive quelconque par convergence monotone et finalement pour une fonction  $f$  intégrable arbitraire encore une fois par linéarité.

C.Q.F.D.



### 9.3 Exercices

1. Vérifier qu'une fonction  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est à variation bornée si et seulement si son graphe est **rectifiable**, c'est-à-dire si et seulement si les sommes

$$\sigma(\phi, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^n \sqrt{(\phi(x_k) - \phi(x_{k-1}))^2 + (x_k - x_{k-1})^2}$$

restent bornées quelle que soit la partition  $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$  de l'intervalle  $[a, b]$ .

2. Soit  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction à variation bornée. Si  $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  est une partition de l'intervalle  $[a, b]$ , soient

$$p(\phi, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^n (\phi(x_k) - \phi(x_{k-1}))_+,$$

$$n(\phi, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^n (\phi(x_k) - \phi(x_{k-1}))_-$$

et posons

$$\text{pos}(\phi, [a, b]) = \sup_{\mathcal{P}} \{p(\phi, \mathcal{P})\},$$

$$\text{neg}(\phi, [a, b]) = \sup_{\mathcal{P}} \{n(\phi, \mathcal{P})\}.$$

Montrer que

$$\text{pos}(\phi, [a, b]) - \text{neg}(\phi, [a, b]) = \phi(b) - \phi(a),$$

et que

$$\text{pos}(\phi, [a, b]) + \text{neg}(\phi, [a, b]) = \text{var}(\phi, [a, b]).$$

3. Soit  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction à variation bornée. Supposons que  $\phi = g - h$  en soit une représentation comme la différence de deux fonctions croissantes sur  $[a, b]$  et posons

$$P(x) = \text{pos}(\phi, [a, x]), \quad N(x) = \text{neg}(\phi, [a, x]).$$

Vérifier que  $P$  et  $N$  sont croissantes sur  $[a, b]$  et que

$$\text{var}(P, [a, b]) \leq \text{var}(g, [a, b]), \quad \text{var}(N, [a, b]) \leq \text{var}(h, [a, b]).$$

4. Vérifier que la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x^{-1/3} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

est intégrable sur  $[-1, 1]$  et déterminer la variation de son intégrale définie

$$F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$$

sur cet intervalle.

5. Montrer que la fonction continue  $\phi(x)$  qui coïncide avec  $x \sin 1/x$  lorsque  $x \neq 0$  n'est à variation bornée sur aucun intervalle contenant 0.
6. Représenter sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$  la fonction  $\sin x$  comme la différence de deux fonctions croissantes.
7. Soit  $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, q_3, \dots\}$  une énumération des nombres rationnels. Montrer que la fonction

$$\phi(x) = \sum_{q_n < x} \frac{1}{2^n}$$

est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  et discontinue sur  $\mathbb{Q}$ .

8. Soit  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction à variation bornée. Montrer que  $|\phi|$  est aussi à variation bornée sur  $[a, b]$  et que

$$\text{var}(|\phi|, [a, b]) \leq \text{var}(\phi, [a, b]).$$

En déduire l'inégalité

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b |\phi| \leq |\phi(a)| + \text{var}(|\phi|, [a, b]).$$

9. Soit  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  la limite d'une suite de fonctions  $\phi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  à variation bornée. Montrer que

$$\text{var}(\phi, [a, b]) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \text{var}(\phi_n, [a, b]).$$

10. Calculer les nombres de Dini  $D^+ \phi(0)$ ,  $D_+ \phi(0)$ ,  $D^- \phi(0)$  et  $D_- \phi(0)$  pour la fonction

$$\phi = (\mathbb{I}_{\mathbb{Q}^c \text{ ]} -\infty, 0] + 2 \mathbb{I}_{\mathbb{Q}^c \text{ ]} 0, +\infty[) - (\mathbb{I}_{\mathbb{Q} \text{ ]} -\infty, 0] + 2 \mathbb{I}_{\mathbb{Q} \text{ ]} 0, +\infty[).$$

11. Montrer qu'une fonction est absolument continue sur tout intervalle dans lequel elle admet une dérivée bornée.
12. Montrer que la fonction continue  $\phi(x)$  qui coïncide avec  $x^2 \sin 1/x$  lorsque  $x \neq 0$  est absolument continue.
13. Soit  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction croissante. Montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme  $\phi = \phi_{ac} + \phi_s$  où  $\phi_{ac}$  est croissante absolument continue et  $\phi_s$  est croissante **singulière**, c'est-à-dire telle que  $\phi'_s = 0$  presque partout sur  $[a, b]$ .
14. Montrer qu'une fonction convexe  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est absolument continue sur tout intervalle compact  $[a, b]$ .
15. Soit  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction absolument continue. Montrer que

$$\text{var}(\phi, [a, b]) = \int_a^b |\phi'(x)| dx.$$

Suggestion : considérer d'abord le cas où  $\phi'$  est continue.

16. Soient  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction absolument continue et

$$\ell_\phi = \sup\{\sigma(\phi, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P}\}$$

la longueur de son graphe. Montrer que

$$\ell_\phi = \int_a^b \sqrt{1 + \phi'(x)^2} dx.$$

Suggestion : considérer d'abord le cas où  $\phi'$  est continue.

17. À partir de la formule d'intégration par parties, montrer que si la fonction  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est absolument continue, positive et décroissante et si la fonction  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est intégrable, il existe  $c \in [a, b]$  tel que

$$\int_a^b F(x)g(x) dx = F(a) \int_a^c g(x) dx.$$

(« Deuxième théorème de la moyenne » . Quel est le premier ?)

## 10 MESURES SIGNÉES

Dans ce chapitre, nous allons introduire les notions de mesures signée, étrangère ou absolument continue, démontrer le théorème de Radon-Nikodym sur la dérivée d'une mesure et l'appliquer à l'étude de la dualité entre les espaces de Lebesgue.

Soit  $(X, \mathfrak{T})$  un espace mesurable. Une **mesure signée** sur  $X$  est une fonction  $\nu : \mathfrak{T} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

**MS1**  $\nu(\emptyset) = 0$ ;

**MS2**  $E_n \in \mathfrak{T}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $E_m E_n = \emptyset$  si  $n \neq m$  impliquent

$$\nu \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(E_n).$$

$M(X, \mathfrak{T})$  désigne l'espace des mesures signées sur  $X$ , définies sur  $\mathfrak{T}$ . Ainsi

$$M_f(X, \mathfrak{T}) = M(X, \mathfrak{T})M_+(X, \mathfrak{T}).$$

Exemple. Si  $\mu \in M_+(X, \mathfrak{T})$  et  $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{T}, \mu)$ , la relation

$$\nu_f(E) = \int_E f \, d\mu, \quad E \in \mathfrak{T},$$

définit une mesure signée sur  $X$  (théorème (37) page (60)).

Une mesure signée possède les propriétés de continuité d'une mesure positive mais elle n'est ni croissante ni sous-additive (théorème (29) page (50)).

Soient  $E_k \in \mathfrak{T}$  des ensembles disjoints deux à deux. Puisque, pour toute énumération  $n_1, n_2, n_3, \dots$  de  $\mathbb{N}$ , on a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \nu(E_{n_k}) = \nu \left( \sum_{k=1}^{+\infty} E_k \right),$$

on doit avoir convergence absolue de la série des mesures des ensembles  $E_k$  :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\nu(E_k)| < +\infty.$$

La **variation**  $|\nu|$  de la mesure  $\nu$  est la fonction  $|\nu| : \mathfrak{F} \rightarrow [0, +\infty]$  définie par

$$|\nu|(E) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} |\nu(F_k)| \mid F_k \in \mathfrak{F}, E = \sum_{k=1}^{+\infty} F_k \right\}.$$

**Théorème 61** *Soit  $\nu \in \mathbf{M}(X, \mathfrak{F})$ . Alors  $|\nu| \in \mathbf{M}_+(X, \mathfrak{F})$ . On a  $|\nu(E)| \leq |\nu|(E)$  pour tout  $E \in \mathfrak{F}$  et si  $\rho \in \mathbf{M}_+(X, \mathfrak{F})$  est telle que  $|\nu(E)| \leq \rho(E)$  pour tout  $E \in \mathfrak{F}$ , alors  $|\nu| \leq \rho$ .*

Démonstration.

Soient  $E_n \in \mathfrak{F}$  des ensembles disjoints deux à deux. Posons  $E = \sum_{n=1}^{+\infty} E_n$  et soit  $E = \sum_{k=1}^{+\infty} F_k$  une partition mesurable quelconque de  $E$ . Alors

$$|\nu(F_k)| = \left| \nu \left( \sum_{n=1}^{+\infty} F_k E_n \right) \right| = \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \nu(F_k E_n) \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |\nu(F_k E_n)|$$

donc

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\nu(F_k)| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} |\nu(F_k E_n)| = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} |\nu(F_k E_n)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |\nu|(E_n)$$

et

$$|\nu|(E) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |\nu|(E_n).$$

Pour établir l'inégalité réciproque, distinguons suivant que  $|\nu|(E_n) < +\infty$  pour tout  $n$  ou non. Dans le premier cas, soient  $E_n = \sum_{k=1}^{+\infty} F_{k,n}$  des partitions mesurables des ensembles  $E_n$  telles que

$$|\nu|(E_n) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |\nu(F_{k,n})| + \frac{\epsilon}{2^n}.$$

Alors  $E = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} F_{k,n}$  est une partition mesurable de  $E$  et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\nu|(E_n) - \epsilon \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} |\nu(F_{k,n})| \leq |\nu|(E).$$

Supposant, dans l'autre éventualité, que  $|\nu|(E_m) = +\infty$ , soit  $K > 0$  arbitraire. Soit  $E_m = \sum_{k=1}^{+\infty} F_{k,m}$  une partition mesurable de  $E_m$  telle que  $\sum_{k=1}^{+\infty} |\nu(F_{k,m})| > K$ . Alors

$$|\nu|(E) \geq \sum_{n \neq m} |\nu(E_n)| + \sum_{k=1}^{+\infty} |\nu(F_{k,m})| > K.$$

Ainsi  $|\nu| \in \mathbf{M}_+(X, \mathfrak{T})$  et, évidemment,  $|\nu(E)| \leq |\nu|(E)$  pour tout  $E \in \mathfrak{T}$ . Supposons que  $\rho \in \mathbf{M}_+(X, \mathfrak{T})$  a la même propriété. Alors, pour toute partition mesurable  $E = \sum_{k=1}^{+\infty} F_k$  de  $E$ , on aura

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\nu(F_k)| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \rho(F_k) = \rho(E)$$

donc  $|\nu|(E) \leq \rho(E)$ . C.Q.F.D.

Soient  $\rho_1, \rho_2 \in \mathbf{M}(X, \mathfrak{T}) \cup \mathbf{M}_+(X, \mathfrak{T})$  deux mesures sur  $X$ . Elles sont **étrangères** l'une à l'autre (ce que l'on note quelquefois  $\rho_1 \perp \rho_2$ ) s'il existe  $D_1, D_2 \in \mathfrak{T}$  disjoints tels que  $\rho_1$  soit concentrée sur (portée par)  $D_1$  et que  $\rho_2$  soit concentrée sur  $D_2$ , c'est-à-dire que pour tout  $E \in \mathfrak{T}$ ,

$$\rho_1(E) = \rho_1(ED_1) \quad \text{et} \quad \rho_2(E) = \rho_2(ED_2).$$

Cette décomposition de l'espace n'est pas nécessairement unique. Par exemple, si  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont positives et s'il existe  $N \in \mathfrak{T}$  tel que  $\rho_1(N) = \rho_2(N) = 0$ ,  $\rho_1$  sera aussi portée par  $D_1 N^c$  et  $\rho_2$  par  $D_2 N^c$ .

Exemple. Soient  $\mu \in \mathbf{M}_+(X, \mathfrak{T})$  et  $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{T}, \mu)$ . Les mesures  $\nu_{f^+}, \nu_{f^-} \in \mathbf{M}_f(X, \mathfrak{T})$  sont étrangères l'une à l'autre; la première est concentrée sur

$$D^+ = \{x \mid f(x) = f^+(x) > 0\}$$

et la seconde, sur

$$D^- = \{x \mid f(x) = -f^-(x) < 0\}.$$

On a les représentations

$$\nu_f = \nu_{f^+} - \nu_{f^-} \quad \text{et} \quad \nu_{|f|} = \nu_{f^+} + \nu_{f^-}.$$

**Théorème 62 (Hahn-Jordan)** Soit  $\nu \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{T})$ . Alors il existe une et une seule paire de mesures  $\nu^+, \nu^- \in \mathcal{M}_f(X, \mathfrak{T})$  étrangères l'une à l'autre telles que  $\nu = \nu^+ - \nu^-$ . On a alors aussi  $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$  et, en particulier,  $|\nu| \in \mathcal{M}_f(X, \mathfrak{T})$ .

Démonstration.

Considérons les ensembles « positifs » pour  $\nu$  :

$$\mathbb{P} = \{E \in \mathfrak{T} \mid A \in \mathfrak{T} \text{ et } A \subseteq E \text{ impliquent } \nu(A) \geq 0\}.$$

Si  $E_n \in \mathbb{P}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $F_1 = E_1$  et  $F_n = E_n E_{n-1}^c \cdots E_1^c$  si  $n \geq 2$  sont aussi dans  $\mathbb{P}$  et  $\bigcup_n E_n = \sum_n F_n \in \mathbb{P}$ .

Soient  $\alpha = \sup\{\nu(E) \mid E \in \mathbb{P}\}$  et  $E_n \in \mathbb{P}$  des ensembles croissants tels que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \nu(E_n) = \alpha$ . Si

$$D = \bigcup_n E_n,$$

$D \in \mathbb{P}$  et

$$\nu(D) = \nu\left(\sum_n F_n\right) = \sum_n \nu(F_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \nu(F_k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \nu(E_n) = \alpha.$$

La relation

$$\nu^+(E) = \nu(ED), \quad E \in \mathfrak{T},$$

définit une mesure positive finie sur  $X$ , concentrée sur  $D$ . La relation

$$\nu^-(E) = -\nu(ED^c), \quad E \in \mathfrak{T},$$

définit une mesure signée sur  $X$ , concentrée sur  $D^c$  et l'on a

$$\nu = \nu^+ - \nu^-.$$

Vérifions que  $\nu^-$  est positive.

Supposons au contraire qu'il existe  $E \in \mathfrak{T}$  tel que  $\nu(ED^c) > 0$ . Posons  $B_0 = ED^c$ . Alors  $B_0 \notin \mathbb{P}$ . Ainsi

$$\beta_1 = \inf\{\nu(B) \mid B \in \mathfrak{T}, B \subseteq B_0\} < 0.$$

Choisissons  $B_1 \in \mathfrak{T}$  tel que  $B_1 \subseteq B_0$  et que

$$\beta_1 \leq \nu(B_1) \leq \inf\{0, \beta_1 + 1\}.$$

On a  $\nu(B_0B_1^c) = \nu(B_0) - \nu(B_1) > 0$  et donc  $B_0B_1^c \notin \mathbb{P}$ . Ainsi

$$\beta_2 = \inf\{\nu(B) \mid B \in \mathfrak{T}, B \subseteq B_0B_1^c\} < 0.$$

Choisissons  $B_2 \in \mathfrak{T}$  tel que  $B_2 \subseteq B_0B_1^c$  et que

$$\beta_2 \leq \nu(B_2) \leq \inf\{0, \beta_2 + 1/2\}.$$

On a  $\nu(B_0B_1^cB_2^c) = \nu(B_0) - \nu(B_1) - \nu(B_2) > 0$  et donc  $B_0B_1^cB_2^c \notin \mathbb{P}$ . Ainsi de suite. On obtient de cette façon une suite d'ensembles mesurables deux à deux disjoints  $B_n$  tels que

$$\beta_n \leq \nu(B_n) \leq \inf\{0, \beta_n + 1/n\}$$

avec

$$\beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots \leq 0.$$

On a

$$\nu(B_0 \bigcap_n B_n^c) = \nu(B_0) - \sum_n \nu(B_n) > 0$$

et donc  $B_0 \bigcap_n B_n^c \notin \mathbb{P}$ . La série  $\sum_n \nu(B_n)$  étant convergente,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \nu(B_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = 0.$$

Mais si  $A \in \mathfrak{T}$  et  $A \subseteq B_0 \bigcap_n B_n^c$ , on a  $\nu(A) \geq \beta_n$  pour tout  $n$  et donc nécessairement  $\nu(A) \geq 0$ . Cette contradiction montre que la mesure  $\nu^-$  doit être positive.

Puisque  $|\nu(E)| \leq \nu^+(E) + \nu^-(E)$  pour tout  $E \in \mathfrak{T}$ ,  $|\nu| \leq \nu^+ + \nu^-$ . D'autre part,  $E = ED + ED^c$  étant une partition mesurable de  $E$ , on doit avoir  $\nu^+(E) + \nu^-(E) = |\nu(ED)| + |\nu(ED^c)| \leq |\nu|(E)$ . Ainsi  $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$ . En particulier, la variation d'une mesure signée est finie. L'unicité de la décomposition découle des relations

$$\nu^+ = \frac{|\nu| + \nu}{2}, \quad \nu^- = \frac{|\nu| - \nu}{2}.$$

C.Q.F.D.

Si  $\mu_1, \mu_2 \in \mathbf{M}_+(X, \mathfrak{T})$ ,  $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{T}, \mu_1 + \mu_2)$  si et seulement si  $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{T}, \mu_1)\mathcal{L}^1(X, \mathfrak{T}, \mu_2)$  auquel cas

$$\int_X f d(\mu_1 + \mu_2) = \int_X f d\mu_1 + \int_X f d\mu_2.$$



En effet, la validité de cet énoncé est évidente pour les fonctions mesurables étagées et s'étend par convergence monotone aux fonctions intégrables positives puis, par linéarité, aux fonctions intégrables arbitraires.

Soit  $\nu \in \mathbf{M}(X, \mathfrak{T})$ . Si  $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{T}, \nu) = \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{T}, \nu^+) \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{T}, \nu^-)$  — par définition, on pose

$$\int_X f \, d\nu = \int_X f \, d\nu^+ - \int_X f \, d\nu^-.$$

On a alors

$$\int_X f \, d\nu = \int_X f \, d\nu^+ - \int_X f \, d\nu^- \leq \int_X |f| \, d\nu^+ + \int_X |f| \, d\nu^- = \int_X |f| \, d|\nu|$$

donc l'inégalité suivante :

$$\left| \int_X f \, d\nu \right| \leq \int_X |f| \, d|\nu|.$$

Exemple. Soient  $\mu \in \mathbf{M}_+(X, \mathfrak{T})$  et  $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{T}, \mu)$ . Alors  $g \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{T}, \nu_f)$  si et seulement si  $gf \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{T}, \mu)$  auquel cas

$$\int_X g \, d\nu_f = \int_X gf \, d\mu.$$

Il suffit en effet de vérifier cet énoncé lorsque  $f$  est positive. Il est alors évident si  $g$  est une fonction mesurable étagée puis, par convergence monotone, si  $g$  est positive et enfin, par linéarité, si  $g$  est une fonction intégrable arbitraire. On écrit quelquefois la relation intégrale précédente sous la « forme différentielle » :

$$d\nu_f = f \, d\mu.$$

Soient  $\rho_1, \rho_2 \in \mathbf{M}_+(X, \mathfrak{T})$  deux mesures positives sur  $X$ . La mesure  $\rho_2$  est **absolument continue** par rapport à  $\rho_1$  (ce que l'on note quelquefois  $\rho_2 \ll \rho_1$ ) si

$$\text{pour tout } E \in \mathfrak{T}, \rho_1(E) = 0 \text{ implique } \rho_2(E) = 0.$$

Une mesure signée  $\nu \in \mathbf{M}(X, \mathfrak{T})$  est absolument continue par rapport à une mesure positive  $\mu \in \mathbf{M}_+(X, \mathfrak{T})$  si sa variation  $|\nu|$  est absolument continue par rapport à  $\mu$ .

Exemple. Si  $\mu \in \mathbf{M}_+(X, \mathfrak{T})$  et  $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{T}, \mu)$ ,  $\nu_f$  est absolument continue par rapport à  $\mu$ .

**Théorème 63 (Radon-Nikodym)** Soient  $\mu \in \mathcal{M}_+(X, \mathfrak{T})$  une mesure  $\sigma$ -finie et  $\nu \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{T})$ . Si  $\nu$  est absolument continue par rapport à  $\mu$ , il existe un et un seul élément  $f \in \mathcal{L}_\mu^1(X, \mathfrak{T})$  (la *dérivée de Radon-Nikodym* de  $\nu$  par rapport à  $\mu$ ) tel que

$$\nu = \nu_f,$$

en d'autres termes,

$$d\nu = f d\mu.$$

Démonstration.

L'unicité est évidente. Pour montrer l'existence, on peut supposer que  $\nu$  est positive.

Considérons d'abord le cas où  $\mu$  est finie. Soit

$$\mathbb{P} = \{g \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{T}, \mu) \mid 0 \leq \int_E g d\mu \leq \nu(E) \text{ pour tout } E \in \mathfrak{T}\}.$$

Si  $g_n \in \mathbb{P}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_N = \sup\{g_1, g_2, \dots, g_N\} \in \mathbb{P}$  pour tout  $N \in \mathbb{N}$ . En effet, si  $E \in \mathfrak{T}$ , soient  $E_1 = \{x \in E \mid f_N(x) = g_1(x)\}$  et, si  $2 \leq k \leq N$ ,  $E_k = \{x \in E \mid E_1^c E_2^c \cdots E_{k-1}^c \mid f_N(x) = g_k(x)\}$ . Alors

$$\int_E f_N d\mu = \sum_{k=1}^N \int_{E_k} g_k d\mu \leq \sum_{k=1}^N \nu(E_k) = \nu(E).$$

Par convergence monotone,  $f = \sup\{g_1, g_2, \dots\} \in \mathbb{P}$ . Soient

$$\alpha = \sup\left\{\int_X g d\mu \mid g \in \mathbb{P}\right\}$$

et  $g_n \in \mathbb{P}$  des fonctions telles que

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X g_n d\mu = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_X f_N d\mu = \int_X f d\mu.$$

La relation

$$\rho(E) = \nu(E) - \int_E f d\mu, \quad E \in \mathfrak{T}.$$

définit une mesure positive finie sur  $X$ . Vérifions que  $\rho$  est identiquement nulle.

Supposons au contraire que  $\rho(X) > 0$ . Soit  $X = D_n + D_n^c$  une **décomposition de Hahn-Jordan** de  $X$  relativement à la mesure signée  $\rho_n = \rho - \mu/n$ , c'est à-dire que  $\rho_n^+$  est concentrée sur  $D_n$  et que  $\rho_n^-$  est concentrée sur  $D_n^c$ . Posons

$$D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $0 \geq \rho_n(D^c) = \rho(D^c) - \mu(D^c)/n$  donc  $\rho(D^c) = 0$ ,  $\rho(D) > 0$  et, puisque  $\nu$  est absolument continue par rapport à  $\mu$ ,  $\mu(D) > 0$ . Choisissons  $n$  tel que  $\mu(D_n) > 0$ . Alors, quel que soit  $E \in \mathfrak{T}$ ,

$$\begin{aligned} \int_E \left( f + \frac{1}{n} \mathbb{I}_{D_n} \right) d\mu &= \int_E f d\mu + \frac{1}{n} \mu(ED_n) \leq \int_E f d\mu + \rho(ED_n) \\ &= \int_{ED_n^c} f d\mu + \nu(ED_n) \leq \nu(ED_n^c) + \nu(ED_n) = \nu(E) \end{aligned}$$

de telle sorte que  $f + \mathbb{I}_{D_n}/n \in \mathbb{P}$  ce qui est absurde étant donné que

$$\int_X \left( f + \frac{1}{n} \mathbb{I}_{D_n} \right) d\mu > \alpha.$$

Dans le cas où  $\mu$  n'est que  $\sigma$ -finie, soient  $X = \bigcup_n D_n$  une exhaustion de l'espace par des une suite croissante d'ensembles mesurables de  $\mu$ -mesure finie,  $\mathfrak{T}_n$  la trace de  $\mathfrak{T}$  sur  $D_n$  et  $\mathbf{f}_n \in \mathcal{L}_{\mu_n}^1(D_n, \mathfrak{T}_n)$  la dérivée de Radon-Nikodym de la trace  $\nu_n$  de  $\nu$  par rapport à la trace  $\mu_n$  de  $\mu$  sur  $D_n$ , prolongée à  $X$  en posant  $f_n(x) = 0$  sur  $D_n^c$ . On a  $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$  puisque  $f_n = f_{n+1}$   $\mu$ -presque partout sur  $D_n$ . Soit  $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$ . Par convergence monotone, pour tout  $E \in \mathfrak{T}$ ,

$$\begin{aligned} \nu(E) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \nu(ED_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \nu_n(ED_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{ED_n} f_n d\mu_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu. \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

Remarque. Le théorème précédent est vrai en particulier si  $\nu \in \mathbf{M}_f(X, \mathfrak{T})$ . Il reste valable si l'on suppose seulement que  $\nu \in \mathbf{M}_+(X, \mathfrak{T})$  est  $\sigma$ -finie comme on le voit en épuisant  $X$  par une suite croissante d'ensembles mesurables  $D_n$  tels que  $\mu(D_n) < +\infty$  et que  $\nu(D_n) < +\infty$ . La dérivée de Radon-Nikodym  $\mathbf{f}$  est encore unique, positive  $\mu$ -presque partout sur  $X$  et l'on a

$$\int_{D_n} f d\mu < +\infty \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Remarque. On dénote souvent la dérivée de Radon-Nikodym de  $\nu$  par rapport à  $\mu$  à l'aide du symbole

$$\left[ \frac{d\nu}{d\mu} \right].$$

Exemple.

Lorsque la fonction croissante  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est absolument continue, le théorème (42) page (72) entraîne que

$$\mu_F(E) = \int_E F'(x) dx$$

pour tout ensemble mesurable  $E$  :

$$dF = F'(x) dx.$$

Exemple. Soit  $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  une variable aléatoire admettant une espérance mathématique  $\mathbb{E}(X)$ . Si sa loi de probabilité  $P_X$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue  $\lambda$ , la dérivée de Radon-Nikodym de  $P_X$  par rapport à  $\lambda$  est la **densité de probabilité**  $f_X$  de  $X$  et l'on a

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx.$$

**Théorème 64 (Lebesgue)** Soient  $\mu \in \mathbf{M}_+(X, \mathfrak{F})$  une mesure  $\sigma$ -finie et  $\nu \in \mathbf{M}(X, \mathfrak{F})$ . Alors il existe une et une seule paire de mesures  $\nu_a, \nu_e \in \mathbf{M}(X, \mathfrak{F})$ ,  $\nu_a$  étant absolument continue par rapport à  $\mu$  et  $\nu_e$  étant étrangère à  $\mu$  telles que

$$\nu = \nu_a + \nu_e.$$

Démonstration.

Si  $\rho_1, \rho_2 \in \mathbf{M}(X, \mathfrak{F})$  sont absolument continue relativement à  $\mu$ ,  $\rho_1 + \rho_2$  l'est aussi (en vertu de l'inégalité  $|\rho_1 + \rho_2| \leq |\rho_1| + |\rho_2|$ ) et si elles sont toutes les deux étrangères à  $\mu$ ,  $\rho_1 + \rho_2$  l'est aussi (si  $\rho_1$  est portée par  $D_1$  et  $\rho_2$  est portée par  $D_2$ ,  $\rho_1 + \rho_2$  est portée par  $D_1 D_2 + D_1 D_2^c + D_1^c D_2$  et  $\mu$

est concentrée sur  $D_1^c D_2^c$ ). On en déduit l'unicité de la **décomposition de Lebesgue**. Si

$$\nu = \nu_a + \nu_e = \rho_a + \rho_e,$$

sont deux telles décompositions, la mesure  $\nu_a - \rho_a = \rho_e - \nu_e$  sera à la fois absolument continue par rapport  $\mu$  et étrangère à  $\mu$ , donc nulle. Pour montrer l'existence d'une décomposition de Lebesgue, on peut supposer que  $\nu$  est positive.

Soit  $f$  la dérivée de Radon-Nikodym de  $\nu$  par rapport à  $\mu + \nu$ . Donc, pour tout  $E \in \mathfrak{X}$ ,

$$\nu(E) = \int_E f d(\mu + \nu) = \int_E f d\mu + \int_E f d\nu.$$

Alors  $f$  est positive  $(\mu + \nu)$ -presque partout sur  $X$  donc  $\mu$ -presque partout sur  $X$  et  $\nu$ -presque partout sur  $X$  et, pour tout  $E \in \mathfrak{X}$ ,

$$\int_E (1 - f) d\nu = \int_E f d\mu \geq 0$$

ce qui entraîne que  $0 \leq f \leq 1$   $\nu$ -presque partout sur  $X$ . Soit

$$D = \{x \mid f(x) = 1\}$$

et posons

$$\nu_e(E) = \nu(ED), \quad \nu_a(E) = \nu(ED^c), \quad E \in \mathfrak{X}$$

définissant ainsi deux mesures positives finies sur  $X$  étrangères l'une à l'autre et telles que  $\nu = \nu_a + \nu_e$ . Comme

$$\nu(D) = \int_D f d\mu + \int_D f d\nu = \mu(D) + \nu(D),$$

$\mu(D) = 0$  :  $\nu_e$  et  $\mu$  sont étrangères l'une à l'autre. Si  $\mu(E) = 0$ , on aura

$$\nu(ED^c) = \int_{ED^c} f d\mu + \int_{ED^c} f d\nu = \int_{ED^c} f d\nu$$

c'est-à-dire

$$\int_{ED^c} (1 - f) d\nu = 0$$

et puisque  $1 - f > 0$   $\nu$ -presque partout sur  $ED^c$ , il faudra que

$$\nu(ED^c) = \nu_a(E) = 0.$$

C.Q.F.D.

Remarque. Le théorème précédent est vrai en particulier si  $\nu \in \mathbf{M}_f(X, \mathfrak{T})$ . Il reste valable si l'on suppose seulement que  $\nu \in \mathbf{M}_+(X, \mathfrak{T})$  est  $\sigma$ -finie. Soient en effet  $X = \sum_n D_n$  une partition mesurable de l'espace par des ensembles de  $\nu$ -mesure finie,  $\nu_n = \nu_{n,a} + \nu_{n,e}$  la décomposition de Lebesgue de la trace  $\nu_n$  de  $\nu$  par rapport à la trace  $\mu_n$  de  $\mu$  sur  $D_n$  et, pour  $E \in \mathfrak{T}$ ,

$$\nu_a(E) = \sum_n \nu_{n,a}(ED_n), \quad \nu_e(E) = \sum_n \nu_{n,e}(ED_n).$$

Alors,  $\nu_a, \nu_e \in \mathbf{M}_f(X, \mathfrak{T})$ ,  $\nu_a$  est absolument continue par rapport à  $\mu$ ,  $\nu_e$  est étrangère à  $\mu$  et l'on a bien  $\nu = \nu_a + \nu_e$ .

Le **dual**  $X^*$  d'un espace vectoriel normé (réel)  $X$  est l'espace des formes linéaires continues  $\ell$  sur  $X$ , c'est-à-dire l'espace des fonctions  $\ell : X \rightarrow \mathbb{R}$  telles que

**FL1**  $\ell(c_1x_1 + c_2x_2) = c_1\ell(x_1) + c_2\ell(x_2)$  pour tous  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ;

**FL2**  $\|\ell\| = \sup \left\{ \frac{|\ell(x)|}{\|x\|} \mid \|x\| \neq 0 \right\} < +\infty$ .

En présence de **FL1**, **FL2** signifie que  $\ell$  est continue.  $\mathbb{R}$  étant complet,  $X^*$  est un espace de Banach.

Si  $p$  et  $q$  sont des exposants conjugués et si  $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{T}, \mu)$  et  $g \in \mathcal{L}^q(X, \mathfrak{T}, \mu)$ , la relation

$$\ell_g(\mathbf{f}) = \int_X fg \, d\mu$$

définit une forme linéaire continue sur  $\mathcal{L}_\mu^p(X, \mathfrak{T})$ .

**Théorème 65** *Soit  $1 \leq p \leq +\infty$ . Si  $\mu \in \mathbf{M}_+(X, \mathfrak{T})$  est  $\sigma$ -finie, l'application  $\mathbf{g} \mapsto \ell_g$  est une injection linéaire isométrique de  $\mathcal{L}_\mu^q(X, \mathfrak{T})$  dans  $(\mathcal{L}_\mu^p(X, \mathfrak{T}))^*$ .*

Démonstration.

Lorsque  $1 < q < +\infty$ , on a  $|\ell_g(\mathbf{f})| = \|f\|_p \|g\|_q$  pour  $f = \text{sgn}(g)|g|^{q/p}$  et, lorsque  $q = 1$ , pour  $f = \text{sgn}(g)$ . Donc, dans ces deux cas, sans hypothèse supplémentaire,  $\|\ell_g\| = \|g\|_q$ . Lorsque  $q = +\infty$ , soit  $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite croissante de parties mesurables de mesure finie épuisant  $X$ . Considérons, pour chaque  $m$ , l'ensemble

$$A_m = \{x \mid |g(x)| > \|g\|_\infty - 1/m\}$$

et soit  $n_m$  tel que  $\mu(A_m D_{n_m}) > 0$ . Si

$$f_m = \operatorname{sgn}(g) \frac{\mathbb{I}_{A_m D_{n_m}}}{\mu(A_m D_{n_m})},$$

on a

$$\ell_g(\mathbf{f}_m) = \int_X f_m g \, d\mu = \frac{1}{\mu(A_m D_{n_m})} \int_{A_m D_{n_m}} |g| \, d\mu \geq \|g\|_\infty - \frac{1}{m}$$

ce qui implique que

$$\|\ell_g\| = \sup\{|\ell_g(f)| \mid \|f\|_1 = 1\} = \|g\|_\infty.$$

C.Q.F.D.

**Théorème 66** *Soit  $1 \leq p < +\infty$ . Si  $\mu \in M_+(X, \mathfrak{T})$  est  $\sigma$ -finie, l'application  $\mathbf{g} \mapsto \ell_g$  est une bijection linéaire isométrique de  $\mathcal{L}_\mu^q(X, \mathfrak{T})$  sur  $(\mathcal{L}_\mu^p(X, \mathfrak{T}))^*$ .*

Démonstration.

Il s'agit de voir que l'application  $\mathbf{g} \mapsto \ell_g$  est surjective.

Considérons d'abord le cas où  $\mu$  est finie. Soit  $\ell \in (\mathcal{L}_\mu^p(X, \mathfrak{T}))^*$ . Posons

$$\nu(E) = \ell(\mathbf{I}_E), \quad E \in \mathfrak{T}.$$

Comme  $p < +\infty$ ,  $\nu$  est bien une mesure signée sur  $X$ , évidemment absolument continue par rapport à  $\mu$ . Soit  $\mathbf{g} \in \mathcal{L}_\mu^1(X, \mathfrak{T})$  la dérivée de Radon-Nikodym de  $\nu$  par rapport à  $\mu$ . On a

$$\ell(\mathbf{I}_E) = \int_X \mathbb{I}_E g \, d\mu$$

donc, par linéarité,

$$\ell([\phi]) = \int_X \phi g \, d\mu$$

pour toute fonction  $\phi \in \mathcal{E}^0(X, \mathfrak{T})$  donc aussi, par continuité,

$$\ell(\mathbf{f}) = \int_X f g \, d\mu$$

pour toute fonction  $f \in \mathcal{L}^\infty(X, \mathfrak{T}, \mu)$ . Cela suffit pour en déduire que  $g \in \mathcal{L}^q(X, \mathfrak{T}, \mu)$  :

Si  $p = 1$ , l'inégalité

$$\left| \int_E g \, d\mu \right| \leq \|\ell\| \mu(E), \quad E \in \mathfrak{T},$$

implique que

$$\|g\|_\infty \leq \|\ell\|.$$

Si  $1 < p < +\infty$ , soient  $E_n = \{x \mid |g(x)| \leq n\}$  et

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } g(x) = 0, \\ \mathbb{I}_{E_n}(x) \frac{|g(x)|^q}{g(x)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors  $\|f_n\|_\infty \leq n^{q-1}$  et

$$\|f_n\|_p = \left( \int_{E_n} |g|^q \, d\mu \right)^{1/p}.$$

Donc

$$\ell(\mathbf{f}_n) = \int_{E_n} |g|^q \, d\mu \leq \|\ell\| \left( \int_{E_n} |g|^q \, d\mu \right)^{1/p}$$

et

$$\left( \int_{E_n} |g|^q \, d\mu \right)^{1/q} \leq \|\ell\|$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ce qui implique (convergence monotone)

$$\|g\|_q \leq \|\ell\|.$$

Si  $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{T}, \mu)$ , soient  $\phi_n \in \mathcal{E}^0(X, \mathfrak{T})$  des fonctions telles que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - \phi_n\|_p = 0.$$

Alors

$$\ell(\mathbf{f}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ell([\phi_n]) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X \phi_n g \, d\mu = \int_X f g \, d\mu.$$

Dans le cas où  $\mu$  n'est que  $\sigma$ -finie, soient  $X = \sum_n D_n$  une partition mesurable de l'espace par des ensembles de mesure finie et  $\ell_n$  la restriction de  $\ell$  à  $\mathcal{L}_{\mu_n}^p(D_n, \mathfrak{T}_n)$ , les fonctions définissant cet espace ayant été prolongées à  $X$  tout entier en les posant égales à zéro à l'extérieur de  $D_n$ . Soit, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathbf{g}_n \in \mathcal{L}_{\mu_n}^q(D_n, \mathfrak{T}_n)$$



telle que

$$\ell_n(\mathbf{f}) = \int_{D_n} f g_n d\mu_n, \quad f \in \mathcal{L}^p(D_n, \mathfrak{T}_n, \mu_n),$$

prolongée à  $X$  de la même façon. La fonction

$$g = \sum_n g_n$$

appartient à l'espace  $\mathcal{L}^q(X, \mathfrak{T}, \mu)$  :

Si  $q = +\infty$ ,

$$\|g\|_\infty = \sup_n \{\|g_n\|_\infty\} = \sup_n \{\|\ell_n\|\} \leq \|\ell\|.$$

Si  $1 < q < +\infty$ ,

$$\|g\|_q^q \leq \liminf_{N \rightarrow +\infty} \left\| \sum_{n=1}^N g_n \right\|_q^q \leq \|\ell\|^q$$

parce que  $\sum_{n=1}^N g_n$  représente  $\ell$  sur  $\sum_{n=1}^N D_n$ .

Soit  $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{T}, \mu)$ . On a

$$\begin{aligned} \ell(\mathbf{f}) &= \ell \left( \sum_n \mathbf{f} \mathbf{I}_{D_n} \right) = \sum_n \ell(\mathbf{f} \mathbf{I}_{D_n}) = \sum_n \int_{D_n} f g_n d\mu_n \\ &= \sum_n \int_{D_n} f g_n d\mu = \sum_n \int_X f g_n d\mu = \int_X f g d\mu \end{aligned}$$

puisque

$$\int_X |f| \left| g - \sum_{n=1}^N g_n \right| d\mu = \sum_{n>N} \int_{D_n} |f| |g_n| d\mu \leq \left( \int_{\sum_{n>N} D_n} |f|^p d\mu \right)^{1/p} \|\ell\|.$$

C.Q.F.D.

## 10.1 Exercices

1. Soient  $\nu_1$  et  $\nu_2$  deux mesures signées sur  $(X, \mathfrak{T})$ . Montrer que, quelques soient les nombres  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ ,

$$|a_1 \nu_1 + a_2 \nu_2| \leq |a_1| |\nu_1| + |a_2| |\nu_2|.$$

2. Soit  $(X, \mathfrak{F})$  un espace mesurable. Une **mesure complexe**  $\nu$  sur  $X$  est une fonction  $\nu : \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{C}$  additive et s'annulant sur l'ensemble vide.
- Définir la variation  $|\nu|$  de  $\nu$  et vérifier que  $|\nu|$  est une mesure positive finie telle que

$$|\nu| \leq |\Re \nu| + |\Im \nu|.$$

- Définir l'espace  $\mathcal{L}^1(X, \mathfrak{F}, \nu)$  et  $\int_X f d\nu$  puis montrer que

$$\left| \int_X f d\nu \right| \leq \int_X |f| d|\nu|.$$

3. Soit  $\nu \in \mathbf{M}(X, \mathfrak{F})$ . Montrer qu'il existe  $f \in \mathcal{L}^0(X, \mathfrak{F})$  telle que  $|f| \leq 1$   $|\nu|$ -presque partout et que

$$\nu(E) = \int_E f d|\nu|, \quad E \in \mathfrak{F}.$$

4. Soit  $(X, \mathfrak{F})$  un espace mesurable tel que  $\{x\} \in \mathfrak{F}$  pour tout  $x \in X$ . Une mesure  $\rho \in \mathbf{M}(X, \mathfrak{F}) \cup \mathbf{M}_+(X, \mathfrak{F})$  est **diffuse** si  $\rho(\{x\}) = 0$  pour tout  $x \in X$  et **atomique** si elle est portée par un ensemble fini ou dénombrable.
- Montrer qu'une mesure diffuse et une mesure atomique sont toujours étrangères l'une à l'autre.
  - Montrer que toute mesure  $\mu \in \mathbf{M}_+(X, \mathfrak{F})$   $\sigma$ -finie admet une décomposition unique sous la forme  $\mu = \rho_1 + \rho_2$  où  $\rho_1$  est diffuse et  $\rho_2$  est atomique.

## 11 MESURES PRODUITS

Dans ce chapitre, nous allons définir les intégrales multiples et apprendre à les calculer au moyen d'intégrales simples itérées et de changements de variables appropriés.

Soit  $X$  un ensemble. Une **classe monotone**  $\mathfrak{M}$  sur  $X$  est une famille de parties de  $X$  telle que :

**MO1**  $E_n \in \mathfrak{M}$  et  $E_n \subseteq E_{n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  impliquent  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathfrak{M}$  ;

**MO2**  $E_n \in \mathfrak{M}$  et  $E_n \supseteq E_{n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  impliquent  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathfrak{M}$ .

Toute tribu est une classe monotone.

Soit  $\mathfrak{G}$  une famille quelconque de parties de  $X$ . La **classe monotone engendrée** par  $\mathfrak{G}$ ,  $\mathfrak{M}(\mathfrak{G})$ , est l'intersection des classes monotones contenant  $\mathfrak{G}$ .

Soient  $(X_1, \mathfrak{T}_1)$  et  $(X_2, \mathfrak{T}_2)$  deux espaces mesurables. La tribu produit,  $\mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2$ , est la tribu sur l'ensemble produit  $X_1 \times X_2$  engendrée par la famille  $\mathfrak{R}$  des rectangles mesurables, c'est-à-dire par les ensembles  $R$  de la forme

$$R = E_1 \times E_2 \text{ avec } E_1 \in \mathfrak{T}_1 \text{ et } E_2 \in \mathfrak{T}_2 :$$

$$\mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2 = \mathfrak{T}(\mathfrak{R}).$$

L'algèbre de Boole engendrée par ces rectangles mesurables est constituée de leurs réunions disjointes finies, les **ensembles élémentaires**,

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{R}) = \left\{ \sum_{k=1}^n R_k \mid n \in \mathbb{N}, R_k \in \mathfrak{R} \right\}.$$

On a

$$\mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2 = \mathfrak{T}(\mathfrak{A}(\mathfrak{R})).$$

**Théorème 67** *La tribu  $\mathfrak{T}(\mathfrak{A})$  et la classe monotone  $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$  engendrées par une algèbre de Boole  $\mathfrak{A}$  sur un ensemble  $X$  coïncident.*

Démonstration.

Il suffit de voir que  $\mathfrak{T}(\mathfrak{A}) \subseteq \mathfrak{M}(\mathfrak{A})$  et, pour cela, il suffit de voir que  $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$  est une tribu sur  $X$ . À chaque  $A \subseteq X$ , associons

$$\mathfrak{M}_A = \{B \mid A \cup B, AB^c, A^c B \in \mathfrak{M}(\mathfrak{A})\}.$$

$\mathfrak{M}_A$  est une classe monotone. Si  $A \in \mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{M}_A$  contient  $\mathfrak{A}$  donc  $\mathfrak{M}_A$  contient  $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ . Si  $B \in \mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ ,  $\mathfrak{M}_B$  contient  $\mathfrak{A}$  (puisque  $A \in \mathfrak{M}_B$  si et seulement si  $B \in \mathfrak{M}_A$ ) donc  $\mathfrak{M}_B$  contient  $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ .

Puisque  $X \in \mathfrak{A}$ ,  $X \in \mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ . Si  $E \in \mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ ,  $X \in \mathfrak{M}_E$  donc  $E^c \in \mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ . Si  $E, F \in \mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ ,  $E \in \mathfrak{M}_F$  donc  $E \cup F \in \mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ . Si, enfin,  $E_n \in \mathfrak{M}(\mathfrak{A})$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\bigcup_{n=1}^N E_n \in \mathfrak{M}(\mathfrak{A}) \text{ pour tout } N \in \mathbb{N}$$

donc, par monotonie,

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n \in \mathfrak{M}(\mathfrak{A}).$$

C.Q.F.D.

On a donc une troisième expression pour la tribu produit :

$$\mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2 = \mathfrak{M}(\mathfrak{A}(\mathfrak{R})).$$

**Lemme 4** *Si  $E \in \mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2$ , ses sections  $E_{x_1} = \{x_2 \mid (x_1, x_2) \in E\}$  et  $E^{x_2} = \{x_1 \mid (x_1, x_2) \in E\}$  sont mesurables (sont dans  $\mathfrak{T}_2$  et dans  $\mathfrak{T}_1$  respectivement).*

*Si  $f \in \mathcal{L}^0(X_1 \times X_2, \mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2)$ , les fonctions partielles  $f_{x_1}$  et  $f^{x_2}$  définies par  $f_{x_1}(x_2) = f(x_1, x_2) = f^{x_2}(x_1)$  sont mesurables (sont dans  $\mathcal{L}^0(X_2, \mathfrak{T}_2)$  et dans  $\mathcal{L}^0(X_1, \mathfrak{T}_1)$  respectivement).*

Démonstration.

Pour  $x_1 \in X_1$  fixé, considérons

$$\mathfrak{T}_{x_1} = \{E \in \mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2 \mid E_{x_1} \in \mathfrak{T}_2\}.$$

En vertu des relations

$$(E^c)_{x_1} = (E_{x_1})^c \text{ et } \left( \bigcup_n E_n \right)_{x_1} = \bigcup_n (E_n)_{x_1},$$

$\mathfrak{T}_{x_1}$  est une tribu sur  $X_1 \times X_2$  qui contient les rectangles mesurables donc qui coïncide avec  $\mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2$ .

Le deuxième énoncé suit de ce que  $(f_{x_1})^{-1}(E) = (f^{-1}(E))_{x_1}$ . C.Q.F.D.

**Théorème 68** Soient  $(X_1, \mathfrak{T}_1, \mu_1)$  et  $(X_2, \mathfrak{T}_2, \mu_2)$  deux espaces mesurés  $\sigma$ -finis. Il existe une et une seule mesure positive  $\mu_1 \times \mu_2$  sur  $X_1 \times X_2$  (définie sur  $\mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2$ ), la **mesure produit** de  $\mu_1$  par  $\mu_2$ , telle que pour tout rectangle mesurable  $E_1 \times E_2$  on ait

$$\mu_1 \times \mu_2(E_1 \times E_2) = \mu_1(E_1)\mu_2(E_2).$$

Démonstration.

Soient  $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  et  $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  des suites croissantes d'ensembles mesurables de mesure finie qui épuisent  $X_1$  et  $X_2$  respectivement et posons

$$R_n = D_n \times C_n.$$

• Unicité.

Soient  $\mu$  et  $\nu$  deux mesures positives sur  $X_1 \times X_2$  (définies sur  $\mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2$ ) telles que pour tout rectangle mesurable  $E_1 \times E_2$  on ait

$$\mu(E_1 \times E_2) = \mu_1(E_1)\mu_2(E_2) = \nu(E_1 \times E_2).$$

Considérons

$$\mathfrak{M}_1 = \{E \in \mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2 \mid \mu(ER_n) = \nu(ER_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\}.$$

$\mathfrak{M}_1$  est une classe monotone qui contient les ensembles élémentaires de  $X_1 \times X_2$  donc  $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2$ . On a ainsi pour tout  $E \in \mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2$

$$\mu(E) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(ER_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \nu(ER_n) = \nu(E).$$

• Existence.

Si  $E \in \mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2$ , l'application  $X_1 \rightarrow [0, +\infty]$  définie par

$$x_1 \mapsto \int_{X_2} \mathbb{I}_E(x_1, x_2) d\mu_2(x_2)$$

est mesurable. En effet, considérons

$$\mathfrak{M}_2 = \{E \in \mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2 \mid \int_{X_2} \mathbb{I}_{ER_n}(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \in \mathcal{L}^0(X_1, \mathfrak{T}_1) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\}.$$

$\mathfrak{M}_2$  est une classe monotone (convergence monotone pour les suites croissantes, convergence dominée pour les suites décroissantes) qui contient les ensembles élémentaires de  $X_1 \times X_2$  donc  $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2$ . On a ainsi pour tout  $E \in \mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2$  que

$$\int_{X_2} \mathbb{I}_E(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{X_2} \mathbb{I}_{ER_n}(x_1, x_2) d\mu_2(x_2)$$

est mesurable.

On peut donc poser

$$\mu_1 \times \mu_2(E) = \int_{X_1} d\mu_1(x_1) \int_{X_2} \mathbb{I}_E(x_1, x_2) d\mu_2(x_2).$$

Alors  $\mu_1 \times \mu_2 \in M_+(X_1 \times X_2, \mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2)$  et

$$\mu_1 \times \mu_2(E_1 \times E_2) = \mu_1(E_1)\mu_2(E_2)$$

pour tout rectangle mesurable  $E_1 \times E_2$ . C.Q.F.D.

**Théorème 69 (Fubini-Tonelli)** Soient  $(X_1, \mathfrak{T}_1, \mu_1)$  et  $(X_2, \mathfrak{T}_2, \mu_2)$  deux espaces mesurés  $\sigma$ -finis.

1. Soit  $f \in \mathcal{L}^0(X_1 \times X_2, \mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2)$  une fonction positive. Alors la fonction  $X_1 \rightarrow [0, +\infty]$  définie par

$$x_1 \mapsto \int_{X_2} f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2)$$

est mesurable et (dans  $[0, +\infty]$ ) on a

$$\int_{X_1 \times X_2} f d\mu_1 \times \mu_2 = \int_{X_1} d\mu_1(x_1) \int_{X_2} f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2).$$

2. Soit  $f \in \mathcal{L}^1(X_1 \times X_2, \mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2, \mu_1 \times \mu_2)$ . Alors pour  $\mu_1$ -presque tout  $x_1 \in X_1$ , la fonction partielle  $x_2 \mapsto f(x_1, x_2)$  est intégrable, la fonction  $X_1 \rightarrow \mathbb{R}$  définie  $\mu_1$ -presque partout sur  $X_1$  par

$$x_1 \mapsto \int_{X_2} f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2)$$

est intégrable et

$$\int_{X_1 \times X_2} f d\mu_1 \times \mu_2 = \int_{X_1} d\mu_1(x_1) \int_{X_2} f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2).$$

Démonstration.

Le théorème de Tonelli (l'énoncé pour les fonctions positives) est vrai pour les fonctions indicatrices des ensembles mesurables donc, par linéarité, pour les fonctions mesurables positives étagées donc, par convergence monotone, pour les fonctions mesurables positives quelconques.

Le théorème de Fubini (l'énoncé pour les fonctions intégrables) s'en déduit en l'appliquant aux fonctions  $f^+$  et  $f^-$  et en remarquant que

$$\int_{X_1 \times X_2} f^+ d\mu_1 \times \mu_2 = \int_{X_1} d\mu_1(x_1) \int_{X_2} f^+(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) < +\infty$$

et que

$$\int_{X_1 \times X_2} f^- d\mu_1 \times \mu_2 = \int_{X_1} d\mu_1(x_1) \int_{X_2} f^-(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) < +\infty.$$

C.Q.F.D.

La tribu produit  $\mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2$  n'est en général pas complète relativement à la mesure produit  $\mu_1 \times \mu_2$ . Si en effet  $E_1 \subseteq X_1$  n'est pas mesurable et  $N_2 \subseteq X_2$  est de mesure nulle, l'ensemble produit  $E_1 \times N_2$  sera négligeable pour  $\mu_1 \times \mu_2$  sans être mesurable.

Soit  $(X, \mathfrak{T}_\mu, \mu)$  la complétion de l'espace  $(X, \mathfrak{T}, \mu)$ . Tout ensemble  $E \in \mathfrak{T}_\mu$  peut s'écrire sous la forme

$$E = E_1 + E_2 \text{ avec } E_1 \in \mathfrak{T} \text{ et } \mu(E_2) = 0.$$

Toute fonction  $f \in \mathcal{L}^0(X, \mathfrak{T}_\mu)$  peut s'écrire sous la forme

$$f = f_1 + f_2 \text{ avec } f_1 \in \mathcal{L}^0(X, \mathfrak{T}) \text{ et } f_2 = 0 \mu - \text{presque partout sur } X$$

(cela est vrai pour une fonction indicatrice donc, par linéarité, pour une fonction étagée donc, par passage à la limite, pour une fonction mesurable quelconque). La fonction  $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{T}_\mu, \mu)$  si et seulement si la fonction  $f_1 \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{T}, \mu)$  auquel cas

$$\int_X f d\mu = \int_X f_1 d\mu.$$

**Lemme 5** Soient  $(X_1, \mathfrak{T}_1, \mu_1)$  et  $(X_2, \mathfrak{T}_2, \mu_2)$  deux espaces mesurés  $\sigma$ -finis et complets. Si la fonction  $f_2 \in \mathcal{L}^0(X_1 \times X_2, (\mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2)_{\mu_1 \times \mu_2})$  est nulle  $\mu_1 \times \mu_2$ -presque partout sur  $X_1 \times X_2$ , pour  $\mu_1$ -presque tout  $x_1 \in X_1$ , la fonction partielle  $x_2 \mapsto f_2(x_1, x_2)$  est nulle  $\mu_2$ -presque partout sur  $X_2$  et, en particulier, elle est mesurable et

$$\int_{X_1 \times X_2} f_2 d\mu_1 \times \mu_2 = \int_{X_1} d\mu_1(x_1) \int_{X_2} f_2(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) = 0.$$

Démonstration.

Soit  $E = \{(x_1, x_2) \mid f_2(x_1, x_2) \neq 0\}$ . Il existe  $F \in \mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2$  tel que  $E \subseteq F$  et que  $\mu_1 \times \mu_2(F) = 0$ . Donc

$$\int_{X_1} d\mu_1(x_1) \int_{X_2} \mathbb{I}_F(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) = 0$$

et

$$\mu_2(F_{x_1}) = \int_{X_2} \mathbb{I}_F(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) = 0$$

pour  $\mu_1$ -presque tout  $x_1 \in X_1$ . Puisque  $E_{x_1} \subseteq F_{x_1}$  et que  $(X_2, \mathfrak{T}_2, \mu_2)$  est complet,  $E_{x_1} \in \mathfrak{T}_2$  et  $\mu_2(E_{x_1}) = 0$  pour  $\mu_1$ -presque tout  $x_1 \in X_1$ . Mais alors la fonction  $x_2 \mapsto f_2(x_1, x_2)$  est nulle  $\mu_2$ -presque partout sur  $X_2$ . C.Q.F.D.

Il suit de ce lemme que, lorsque les espaces  $(X_1, \mathfrak{T}_1, \mu_1)$  et  $(X_2, \mathfrak{T}_2, \mu_2)$  sont complets, le théorème de Fubini-Tonelli reste valable si l'on y suppose seulement que la fonction  $f$  est mesurable relativement à la tribu complétée  $(\mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2)_{\mu_1 \times \mu_2}$ .

Remarque. Le théorème de Fubini-Tonelli est souvent appliqué de la façon suivante. Soit  $f \in \mathcal{L}^0(X_1 \times X_2, (\mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2)_{\mu_1 \times \mu_2})$ . Alors

$$\int_{X_1} d\mu_1 \int_{X_2} f d\mu_2 = \int_{X_2} d\mu_2 \int_{X_1} f d\mu_1$$

pourvu que

$$\int_{X_1} d\mu_1 \int_{X_2} |f| d\mu_2 < +\infty.$$

La **tribu de Lebesgue** sur  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathfrak{L}_{\mathbb{R}^2}$ , est la complétion de la tribu produit  $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \times \mathfrak{B}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^2}$  relativement à la mesure produit  $\lambda_2 = \lambda \times \lambda$ . Remarquons que  $\mathfrak{L}_{\mathbb{R}^2}$  est aussi la complétion de  $\mathfrak{L}_{\mathbb{R}} \times \mathfrak{L}_{\mathbb{R}}$  par rapport à la mesure  $\lambda_2$ . Si, en effet,  $E_1 = B_1 + N_1$  et  $E_2 = B_2 + N_2$  avec  $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$  et  $\lambda(N_1) = \lambda(N_2) = 0$ , on peut écrire que  $E_1 \times E_2 = B_1 \times B_2 + N$  où  $N$  est négligeable pour  $\lambda_2$ . On en tire

$$\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^2} \subseteq \mathfrak{L}_{\mathbb{R}} \times \mathfrak{L}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathfrak{L}_{\mathbb{R}^2}$$

puis

$$\mathfrak{L}_{\mathbb{R}^2} = (\mathfrak{L}_{\mathbb{R}} \times \mathfrak{L}_{\mathbb{R}})_{\lambda_2}.$$

Pour tout rectangle  $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ , on a

$$\lambda_2((a_1, b_1) \times (a_2, b_2)) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2).$$



De plus, pour tout  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  et pour tout  $E \in \mathfrak{L}_{\mathbb{R}^2}$ ,  $E + (x_1, x_2) \in \mathfrak{L}_{\mathbb{R}^2}$  et

$$\lambda_2(E + (x_1, x_2)) = \lambda_2(E).$$

En effet,

$$\mathfrak{T}_{(x_1, x_2)} = \{E \in \mathfrak{L}_{\mathbb{R}^2} \mid E + (x_1, x_2) \in \mathfrak{L}_{\mathbb{R}^2}\}$$

est une tribu contenant les rectangles mesurables donc  $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \times \mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathfrak{T}_{(x_1, x_2)} \subseteq \mathfrak{L}_{\mathbb{R}^2}$ . Si  $E \in \mathfrak{T}_{(x_1, x_2)}$ ,

$$\begin{aligned} \lambda_2(E + (x_1, x_2)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}_{E+(x_1, x_2)} dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda((E + (x_1, x_2))_x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(E_{x-x_1} + x_2) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(E_{x-x_1}) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}_{E+(x_1, 0)} dy = \lambda_2(E). \end{aligned}$$

On en tire que  $\mathfrak{T}_{(x_1, x_2)}$  est complète relativement à  $\lambda_2$  donc que  $\mathfrak{T}_{(x_1, x_2)} = \mathfrak{L}_{\mathbb{R}^2}$ .

La tribu de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^n$  est définie par récurrence sur  $n$ . Comme  $\mathbb{R}$  est séparable et  $\lambda$  est  $\sigma$ -finie, pour toute décomposition  $n = p + q$ , on a que

$$\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n} = \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^p} \times \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^q} \text{ et } \lambda_n = \lambda_p \times \lambda_q$$

(en identifiant  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  avec  $((x_1, x_2, \dots, x_p), (x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n))$ ) en vertu des théorèmes (25) page (45) et (68) page (132). Par définition, la tribu  $\mathfrak{L}_{\mathbb{R}^n}$  est la complétion de  $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n}$  relativement à  $\lambda_n$ . Elle est invariante sous translation,

$$\lambda_n(E + (x_1, x_2, \dots, x_n)) = \lambda_n(E)$$

et, pour tout pavé  $P = \prod_{j=1}^n (a_j, b_j)$ ,

$$\lambda_n(P) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j).$$

En particulier, le diamètre  $\delta(C)$  et la mesure  $\lambda_n(C)$  d'un hypercube  $C = (a, b)^n$  sont liés par la relation  $\delta(C) = \sqrt[n]{\lambda_n(C)}$ .

Il est possible de construire « directement » comme au chapitre (6) page (67) la mesure  $\lambda_n$  à partir de la famille  $\mathfrak{I}_n$  des pavés  $P$  de  $\mathbb{R}^n$  qui sont de la forme

$$P = \prod_{j=1}^n (a_j, b_j), \quad (a_j, b_j) \in \mathfrak{I}$$

(page (73)) en posant

$$\lambda_n \left( \sum_{k=1}^N P_k \right) = \sum_{k=1}^N \prod_{j=1}^n (b_{k,j} - a_{k,j}).$$

Le théorème (42) page (72) nous assure que les deux approches conduisent au même résultat.

**Lemme 6** *Soit  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  un ensemble mesurable. Alors  $E$  est négligeable si et seulement si à chaque  $\epsilon > 0$  correspond une suite d'hypercubes  $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  tels que*

$$E \subseteq \bigcup_k C_k \text{ et } \sum_k \lambda_n(C_k) < \epsilon.$$

Démonstration.

Il suffit de voir que la condition est nécessaire. Puisque

$$\lambda_n(E) = \inf \left\{ \sum_k \lambda_n(P_k) \mid E \subseteq \bigcup_k P_k, P_k \in \mathfrak{I}_n \right\},$$

il existe  $P_k \in \mathfrak{I}_n$  tels que

$$E \subseteq \bigcup_k P_k \text{ et } \sum_k \lambda_n(P_k) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Il suffit donc de voir qu'à tout pavé borné  $P_k = \prod_{j=1}^n ]a_{k,j}, b_{k,j}]$  correspond une suite finie d'hypercubes  $C_1, C_2, \dots, C_{N_k}$  tels que

$$P_k \subseteq \bigcup_{p=1}^{N_k} C_p \text{ et } \sum_{p=1}^{N_k} \lambda_n(C_p) < \lambda_n(P_k) + \frac{\epsilon}{2k}.$$

Soient  $r_k > 0$  et

$$d_{k,j} = \left\lceil \frac{b_{k,j} - a_{k,j}}{r_k} \right\rceil, \quad 1 \leq j \leq n$$

( $\lceil x \rceil$  désigne le plus petit entier plus grand que  $x$ ). Alors le pavé

$$Q_k = \prod_{j=1}^n ]a_{k,j}, a_{k,j} + r_k d_{k,j}]$$

contient  $P_k$  et est la réunion de  $d_{k,1}d_{k,2} \cdots d_{k,n}$  hypercubes. On a

$$\lambda_n(Q_k) - \lambda_n(P_k) \leq \prod_{j=1}^n (b_{k,j} - a_{k,j} + r_k) - \prod_{j=1}^n (b_{k,j} - a_{k,j}) < \frac{\epsilon}{2^k}$$

si  $r_k > 0$  est convenablement choisi. C.Q.F.D.

**Lemme 7** Soit  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  un ensemble mesurable. Alors

$$\lambda_n(E) = \inf \{ \lambda_n(O) \mid E \subseteq O, O \text{ ouvert} \}.$$

Démonstration.

On peut supposer que  $\lambda_n(E) < +\infty$ . Puisque

$$\lambda_n(E) = \inf \left\{ \sum_k \lambda_n(P_k) \mid E \subseteq \bigcup_k P_k, P_k \in \mathfrak{J}_n \right\},$$

il existe  $P_k \in \mathfrak{J}_n$  tels que

$$E \subseteq \bigcup_k P_k \text{ et } \sum_k \lambda_n(P_k) < \lambda_n(E) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Il suffit donc de voir qu'à tout pavé borné  $P_k = \prod_{j=1}^n ]a_{k,j}, b_{k,j}]$  correspond un pavé ouvert  $Q_k$  tel que

$$P_k \subseteq Q_k \text{ et } \lambda_n(Q_k) < \lambda_n(P_k) + \frac{\epsilon}{2^k}.$$

On peut choisir

$$Q_k = \prod_{j=1}^n ]a_{k,j}, b_{k,j} + r_k[$$

où  $r_k > 0$  est tel que

$$\prod_{j=1}^n (b_{k,j} - a_{k,j} + r_k) - \prod_{j=1}^n (b_{k,j} - a_{k,j}) < \frac{\epsilon}{2^k}.$$

C.Q.F.D.

**Lemme 8** Soit  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  un ensemble mesurable. Alors

$$\lambda_n(E) = \sup \{ \lambda_n(K) \mid E \supseteq K, K \text{ compact} \}.$$

Démonstration.

Lorsque  $E$  est borné, soit  $P$  un pavé compact tel que  $E \subseteq P$ . Soit  $O$  un ouvert tel que  $PE^c \subseteq O$  et que  $\lambda_n(O) < \lambda_n(PE^c) + \epsilon$ . Alors  $PO^c \subseteq E$  est compact et  $\lambda_n(E) < \lambda_n(PO^c) + \epsilon$ . Le cas où  $E$  n'est pas borné suit de la relation  $\lambda_n(E) = \sup_k \lambda_n(E[-k, k]^n)$ . C.Q.F.D.

Soient  $O, U \subseteq \mathbb{R}^n$  des ensembles ouverts. Un **difféomorphisme de classe  $C^{(1)}$**  entre  $O$  et  $U$  est une application bijective  $\Phi : O \rightarrow U$ ,  $\mathbf{y} = \Phi(\mathbf{x})$ , telle que les composantes  $\Phi_i$  et  $\Phi_j^{-1}$  de  $\Phi$  et  $\Phi^{-1}$  admettent des dérivées partielles continues. Le jacobien  $J_\Phi$  de  $\Phi$  est le déterminant de la matrice  $\Phi'$  des dérivées partielles des fonctions  $\Phi_i$  (la matrice de Jacobi de la transformation) :

$$J_\Phi(\mathbf{x}) = \det \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \right).$$

**Théorème 70** Soient  $O, U \subseteq \mathbb{R}^n$  des ensembles ouverts et  $\Phi : O \rightarrow U$  un difféomorphisme de classe  $C^{(1)}$  entre  $O$  et  $U$ . Si  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  est mesurable et positive ou si elle est intégrable sur  $U$ , on a

$$\int_U f(\mathbf{y}) d\lambda_n(\mathbf{y}) = \int_O f(\Phi(\mathbf{x})) |J_\Phi(\mathbf{x})| d\lambda_n(\mathbf{x}).$$

Démonstration.

Observons d'abord que le résultat suit du théorème de Fubini-Tonelli lorsque  $O$  est un pavé et que  $\Phi$  est une permutation des coordonnées et ensuite qu'il suffit de considérer le cas où  $f$  est une fonction mesurable positive.

- La relation

$$\mu(E) = \lambda_n(\Phi(E))$$

définit une mesure borélienne positive sur  $O$ . Montrons que cette mesure est absolument continue par rapport à  $\lambda_n$ .

Si  $C$  est un hypercube tel que  $\overline{C} \subseteq O$ , le théorème des accroissements finis entraîne que

$$\|\Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{y})\|_2 \leq n^{1/2} \sup\{\|\Phi'(\mathbf{z})\|_2 \mid \mathbf{z} \in C\} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2$$

pour tout  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$  donc

$$\begin{aligned} \lambda_n(\Phi(C)) &\leq \delta(\Phi(C))^n \leq (n^{1/2} \sup\{\|\Phi'(\mathbf{z})\|_2 \mid \mathbf{z} \in C\} \delta(C))^n \\ &\leq (n \sup\{\|\Phi'(\mathbf{z})\|_2 \mid \mathbf{z} \in C\})^n \lambda_n(C). \end{aligned}$$

Donné un ensemble compact  $K \subseteq O$  négligeable pour  $\lambda_n$ , soit

$$K_d = \{\mathbf{x} \mid d(\mathbf{x}, K) < d\}.$$

Choisissons  $d > 0$  pour que

$$K \subseteq K_d \subseteq \overline{K_d} \subseteq O$$

et recouvrons  $K$  par des hypercubes  $C_k$  tels que  $\overline{C_k} \subseteq K_d$  et

$$\sum_k \lambda_n(C_k) < \epsilon.$$

Alors

$$\lambda_n(\Phi(C_k)) \leq (n \sup\{\|\Phi'(\mathbf{z})\|_2 \mid \mathbf{z} \in K_d\})^n \lambda_n(C_k)$$

et

$$\begin{aligned} \lambda_n(\Phi(K)) &\leq \sum_k \lambda_n(\Phi(C_k)) \leq (n \sup\{\|\Phi'(\mathbf{z})\|_2 \mid \mathbf{z} \in K_d\})^n \sum_k \lambda_n(C_k) \\ &\leq (n \sup\{\|\Phi'(\mathbf{z})\|_2 \mid \mathbf{z} \in K_d\})^n \epsilon. \end{aligned}$$

Ainsi  $K$  est aussi négligeable pour  $\mu$  et  $\mu$  est absolument continue par rapport à  $\lambda_n$ .

• Soit  $g$  la dérivée de Radon-Nikodym de  $\mu$  par rapport à  $\lambda_n$ . La fonction  $g : O \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction mesurable, positive et intégrable sur tout compact et pour tout ensemble mesurable  $E \subseteq O$ , on a

$$\mu(E) = \int_{\Phi(E)} d\lambda_n = \int_E g d\lambda_n,$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{I}_{\Phi(E)} d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{I}_E g d\lambda_n$$

c'est-à-dire que pour tout ensemble mesurable  $F \subseteq U$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{I}_F(\mathbf{y}) d\lambda_n(\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{I}_{\Phi^{-1}(F)}(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) d\lambda_n(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{I}_F(\Phi(\mathbf{x})) g(\mathbf{x}) d\lambda_n(\mathbf{x}),$$

ou encore

$$\int_U \mathbb{I}_F(\mathbf{y}) d\lambda_n(\mathbf{y}) = \int_O \mathbb{I}_F(\Phi(\mathbf{x})) g(\mathbf{x}) d\lambda_n(\mathbf{x}).$$

Par linéarité, pour toute fonction mesurable positive étagée  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\phi = \sum_k a_k \mathbb{I}_{F_k},$$

$$\int_U \phi(\mathbf{y}) d\lambda_n(\mathbf{y}) = \int_O \phi(\Phi(\mathbf{x})) g(\mathbf{x}) d\lambda_n(\mathbf{x})$$

et, par convergence monotone, pour toute fonction mesurable positive  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\int_U f(\mathbf{y}) d\lambda_n(\mathbf{y}) = \int_O f(\Phi(\mathbf{x})) g(\mathbf{x}) d\lambda_n(\mathbf{x}).$$

- Il reste à voir que

$$g(\mathbf{x}) = |J_\Phi(\mathbf{x})| \quad \lambda_n - \text{presque partout}$$

autrement dit que

$$\lambda_n(\Phi(E)) = \int_E |J_\Phi| d\lambda_n$$

pour tout ensemble mesurable  $E \subseteq O$ . Il suffit pour cela de voir que chaque point  $\mathbf{x} \in O$  est contenu dans un pavé ouvert  $P_{\mathbf{x}} \subseteq O$  tel que

$$\lambda_n(\Phi(P)) = \int_P |J_\Phi| d\lambda_n \quad (3)$$

pour tout pavé  $P \subseteq P_{\mathbf{x}}$ . La relation à démontrer s'ensuivra alors, d'abord pour tout pavé compact (exercice (1) page (16)), ensuite pour tout pavé borné, pour tout ouvert et enfin pour  $E$  mesurable quelconque. Nous démontrons l'équation (3) par récurrence sur la dimension  $n$  car lorsque  $n = 1$ , elle découle du théorème fondamental du calcul :

$$|\Phi(b) - \Phi(a)| = \int_a^b |\Phi'(x)| dx.$$

Supposons donc l'équation (3) vérifiée pour  $n - 1$ .

La relation (3) est vraie si  $\Phi$  laisse une coordonnée invariante. Supposons pour simplifier l'écriture que  $\Phi$  ne change pas la dernière coordonnée. Alors

$$|J_\Phi| = |J_{\tilde{\Phi}}|$$

en désignant par  $J_{\tilde{\Phi}}$  le jacobien des fonctions  $\tilde{\Phi} = (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{n-1})$  par rapport aux variables  $\tilde{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$  et

$$\mathbb{I}_P = \mathbb{I}_{\tilde{P}} \mathbb{I}_{(a_n, b_n)}$$

en écrivant

$$P = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_{n-1}, b_{n-1}) \times (a_n, b_n) = \tilde{P} \times (a_n, b_n).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{I}_P(\mathbf{x}) |J_\Phi(\mathbf{x})| d\lambda_n(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{R}} d\lambda(x_n) \mathbb{I}_{(a_n, b_n)}(x_n) \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathbb{I}_{\tilde{P}}(\tilde{\mathbf{x}}) |J_{\tilde{\Phi}}(\tilde{\mathbf{x}})| d\lambda_{n-1}(\tilde{\mathbf{x}}) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_{(a_n, b_n)}(x_n) \lambda_{n-1}(\tilde{\Phi}(\tilde{P})) d\lambda(x_n) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_{n-1}(\Phi(P)_{x_n}) d\lambda(x_n) = \lambda_n(\Phi(P)). \end{aligned}$$

Finalement, tout difféomorphisme de classe  $C^{(1)}$  peut localement s'écrire comme la composition de difféomorphismes de classe  $C^{(1)}$  qui laissent au moins une coordonnée invariante. En effet, en effectuant si nécessaire une permutation des coordonnées, on peut supposer que

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \neq 0.$$

En posant

$$\Psi(\mathbf{x}) = (x_1, \dots, x_{n-1}, \Phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

le théorème des fonctions inverses garantit l'existence d'une fonction inverse  $\Psi^{-1}$  dans un voisinage de  $\mathbf{x}_0$  ce qui permet d'écrire

$$\Phi = (\Phi \circ \Psi^{-1}) \circ \Psi$$

où  $\Psi$  et  $\Phi \circ \Psi^{-1}$  laissent toutes deux une coordonnée invariante, d'où, par hypothèse de récurrence,

$$\int_P |J_\Phi| d\lambda_n = \int_{\Psi(P)} |J_{\Phi \circ \Psi^{-1}}| d\lambda_n = \lambda_n(\Phi(P)).$$

C.Q.F.D.

Exemple. Si  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une transformation affine,

$$\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

on a

$$\lambda_n(\Phi(E)) = \det(\mathbf{A}) \lambda_n(E).$$

En particulier, la mesure de Lebesgue est invariante sous les transformations orthogonales et la mesure d'un hyperplan  $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0\}$  est nulle.

Exemple. L'intégrale

$$\int_{\|\mathbf{x}\|_2 > 1} \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^{p/2}} d\lambda_2$$

est convergente si et seulement si  $p > 2$ . En effet, les **coordonnées polaires**

$$x_1 = r \cos \theta_1, \quad x_2 = r \sin \theta_1$$

établissent un difféomorphisme de classe  $C^\infty$  entre  $]0, +\infty[ \times ]-\pi, \pi[$  et le plan privé du demi-axe  $\{(x_1, x_2) \mid x_2 = 0, x_1 \leq 0\}$ . Comme ce dernier ensemble est de mesure nulle et que le jacobien vaut  $r$ ,

$$\int_{\|\mathbf{x}\|_2 > 1} \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^{p/2}} d\lambda_2 = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_1 \int_1^{+\infty} \frac{dr}{r^{p-1}} = \frac{2\pi}{p-2}$$

lorsque  $p > 2$  (et  $+\infty$  dans le cas contraire).

### 11.1 Exercices

1. Donner un exemple
  - d’une classe monotone sur  $X$  contenant l’espace  $X$  et l’ensemble vide mais qui n’est pas une tribu,
  - d’une mesure qui n’est pas  $\sigma$ -finie.
2. Soient  $\mu_{card}$  la mesure du cardinal sur  $\mathbb{N}$  et

$$f(n, m) = \begin{cases} 2 - 2^{-n} & \text{si } m = n, \\ -2 + 2^{-n} & \text{si } m = n + 1 \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Calculer

$$\int_{\mathbb{N}} d\mu_{card}(m) \int_{\mathbb{N}} f(m, n) d\mu_{card}(n)$$

et

$$\int_{\mathbb{N}} d\mu_{card}(n) \int_{\mathbb{N}} f(m, n) d\mu_{card}(m).$$

3. Soient  $(X, \mathfrak{T}, \mu)$  un espace mesuré  $\sigma$ -fini complet,  $f, g \in \mathcal{L}^2(X, \mathfrak{T}, \mu)$  et

$$h(x_1, x_2) = (f(x_1)g(x_2) - f(x_2)g(x_1))^2.$$

Montrer que  $h \in \mathcal{L}^1(X \times X, \mathfrak{T} \times \mathfrak{T}, \mu \times \mu)$  et en déduire l’inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

4. Soient  $(X_1, \mathfrak{T}_1, \mu_1)$  et  $(X_2, \mathfrak{T}_2, \mu_2)$  deux espaces mesurés  $\sigma$ -finis complets,  $K \in \mathcal{L}^2(X_1 \times X_2, \mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2, \mu_1 \times \mu_2)$  et  $f \in \mathcal{L}^2(X_1, \mathfrak{T}_1, \mu_1)$ . Montrer que



- Pour  $\mu_2$ -presque tout  $x_2 \in X_2$ , la fonction  $x_1 \mapsto f(x_1)K(x_1, x_2)$  est intégrable.
- La fonction

$$g(x_2) = \int_{X_1} f(x_1)K(x_1, x_2) d\mu_1$$

est mesurable.

- $g \in \mathcal{L}^2(X_2, \mathfrak{T}_2, \mu_2)$  et

$$\|g\|_2 \leq \|f\|_2 \|K\|_2.$$

- Montrer que  $\mathfrak{L}_{\mathbb{R}} \times \mathfrak{L}_{\mathbb{R}} \neq \mathfrak{L}_{\mathbb{R}^2}$ .
- Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction mesurable positive. Montrer que l'ensemble

$$E = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

est mesurable (relativement à la tribu produit) et calculer sa mesure.

- À  $E \subseteq \mathbb{R}$  associons l'ensemble  $\tilde{E} \subseteq \mathbb{R}^2$  défini par

$$\tilde{E} = \{(x, y) \mid x - y \in E\}$$

et considérons la famille

$$\mathfrak{T} = \{E \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \mid \tilde{E} \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^2}\}.$$

Montrer que  $\mathfrak{T} = \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ .

- Déduire du théorème de Tonelli et de la relation

$$\int_0^{+\infty} e^{-z^2} dz = \int_0^{+\infty} x e^{-x^2 y^2} dy \quad \text{si } x > 0$$

que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}.$$

- Calculer

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy, \quad \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx \quad \text{et} \quad \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y)| dx dy$$

pour la fonction

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

10. Utiliser le théorème de Tonelli pour calculer de deux manières l'intégrale

$$\int_a^b dx \int_0^1 y^x dy, \quad 0 < a < b$$

et en déduire la valeur de

$$\int_0^1 \frac{y^b - y^a}{\log y} dy.$$

11. Utiliser le théorème de Fubini pour calculer de deux manières l'intégrale

$$\int_0^A \int_0^A e^{-xy} \sin x \, dx dy$$

et en déduire que

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

12. Déterminer les valeurs de  $p$  pour lesquelles l'intégrale

$$\int_{\|\mathbf{x}\|_2 > 1} \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{p/2}} d\lambda_3$$

est convergente.

## 12 APPLICATIONS

La représentation d'une fonction par une série trigonométrique

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ik\pi x/L}$$

sur un intervalle fini  $(-L, +L)$  ou par une intégrale trigonométrique

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

sur l'axe réel tout entier sont des outils essentiels des mathématiques appliquées, à la base du génie électrique, par exemple. Historiquement, elles furent l'une des principales motivations du développement de la théorie de l'intégration. Nous allons illustrer cette théorie en présentant les démonstrations de quelques résultats de base de « l'analyse harmonique », la branche des mathématiques qui traite de la représentation des fonctions par des séries ou par des intégrales trigonométriques et de ses diverses conséquences.

### 12.1 Série de Fourier

Soit  $E \subseteq \mathbb{R}$ . Une fonction à valeurs complexes  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$  est mesurable si sa partie réelle  $\Re f$  et sa partie imaginaire  $\Im f$  le sont. Une fonction mesurable  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$  est dite intégrable si son module  $|f| = \sqrt{(\Re f)^2 + (\Im f)^2}$  l'est. Il revient au même de supposer que  $\Re f$  et  $\Im f$  sont intégrables. Si  $f$  est intégrable, on pose

$$\int_E f = \int_E \Re f + i \int_E \Im f.$$

L'espace  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^1(E)$  des fonctions complexes intégrables sur  $E$  forme un espace vectoriel complexe sur lequel  $f \mapsto \int_E f$  est une forme linéaire. L'inégalité de triangle

$$\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f|$$

reste valable pour les fonctions à valeurs complexes. Il suit de ces définitions que le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, les inégalités de Hölder et Minkowski, le théorème de Riesz-Fischer sur la complétude des espaces  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^p(E)$  et le théorème de Fubini sur les intégrales itérées restent valables pour les fonctions à valeurs complexes.

Les définitions et les calculs qui suivent sont tous basées sur l'**orthogonalité** des exponentielles complexes :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{ikt} e^{-ijt} dt = \mathbb{I}_{\{k\}}(j).$$

On dénotera par  $\mathcal{L}_{2\pi}^p$  l'espace des fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  périodiques de période  $2\pi$  et appartenant à l'espace  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^p([-\pi, \pi[)$  et par  $C_{2\pi}$  l'espace des fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  périodiques de période  $2\pi$  et continues (pour appartenir à  $C_{2\pi}$  une fonction  $f$  continue sur  $[-\pi, \pi]$  doit donc satisfaire la relation  $f(-\pi) = f(\pi)$ ).

Soit  $f \in \mathcal{L}_{2\pi}^1$ . Les **coefficients de Fourier** de  $f$  sont les nombres  $c_k(f)$  définis par les équations

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) e^{-ikt} dt$$

et sa **série de Fourier** est la série trigonométrique

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ikx}.$$

Les sommes partielles de cette série seront dénotées par  $S_n(f)$ ,

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikx},$$

et il s'agit d'étudier la question de leur convergence vers la fonction  $f$  qui les a engendrées.

**Théorème 71** *Deux fonctions  $f, g \in \mathcal{L}_{2\pi}^1$  ayant les mêmes coefficients de Fourier coïncident presque partout.*

Démonstration.

Il revient au même de montrer qu'une fonction  $f \in \mathcal{L}_{2\pi}^1$  ayant tous ses coefficients de Fourier nuls doit s'annuler presque partout. En utilisant la formule d'Euler, on voit que  $c_k(f) = 0$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  si et seulement si  $c_k(\Re f) = 0$  et  $c_k(\Im f) = 0$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ . On peut donc supposer  $f$  réelle.

Considérons d'abord une fonction  $f \in C_{2\pi}$  (à valeurs réelles). Si ses coefficients de Fourier sont tous nuls, on aura

$$\frac{1}{2\pi} \int_{a-\pi}^{a+\pi} f(t) T_n(t) dt = 0 \quad (4)$$

quelque soit  $a \in \mathbb{R}$  et quel que soit le polynôme trigonométrique

$$T_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}.$$

Supposons qu'elle est strictement positive en un point  $a$ . Si  $\delta > 0$  est assez petit, on a

$$f(x) \geq \frac{f(a)}{2} > 0 \text{ pour tout } x \in [a - \delta, a + \delta].$$

Considérons le polynôme trigonométrique

$$T_n(x) = \left( \frac{1 + \cos(x - a)}{1 + \cos \delta} \right)^n.$$

Alors, en contradiction avec l'équation (4), on a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{a-\pi}^{a+\pi} f(t) T_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(s+a) T_n(s+a) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{|s| < \delta} f(s+a) T_n(s+a) ds + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |s| < \pi} f(s+a) T_n(s+a) ds > 0 \end{aligned}$$

dès que  $n$  est assez grand puisque la première intégrale tend vers  $+\infty$  et que la seconde tend vers 0 lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

Pour traiter le cas général, introduisons la fonction

$$F(x) = \int_{-\pi}^x f(t) dt.$$

Elle est absolument continue et  $F(-\pi) = F(\pi) = 0$  (car  $c_0(f) = 0$ ). Si  $k \neq 0$ , une intégration par parties montre que

$$c_k(F) = \frac{c_k(f)}{ik} = 0.$$

En vertu du cas continu, la fonction

$$F(x) - c_0(F)$$

est identiquement nulle et la fonction  $f$  qui en est la dérivée presque partout est nulle presque partout. C.Q.F.D.

Remarque. Il suit de ce théorème que si

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_k(f)| < +\infty,$$

on a

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ikx}$$

presque partout. La somme  $g$  de la série trigonométrique précédente est en effet un fonction dans  $C_{2\pi}$  admettant les nombres  $c_k(f)$  pour coefficients de Fourier comme on le voit en intégrant la série terme à terme (convergence dominée) :

$$\begin{aligned} c_j(g) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left( \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ikx} \right) e^{-ijx} dx \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k(f) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{ikx} e^{-ijx} dx = c_j(f). \end{aligned}$$

On ne peut donc avoir

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_k(f)| < +\infty$$

que si la fonction  $f$  coïncide presque partout avec une fonction dans  $C_{2\pi}$ . Le théorème suivant, chronologiquement l'un des premiers de l'analyse harmonique, est d'applicabilité plus générale puisqu'il couvre effectivement tous les cas rencontrés en pratique.

**Théorème 72 (Dirichlet)** Soit  $f \in \mathcal{L}_{2\pi}^1$  une fonction à variation bornée sur  $[-\pi, \pi]$ . Alors

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ikx} = \frac{f(x-) + f(x+)}{2}.$$

Démonstration.

Une fonction complexe est à variation bornée si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont. On peut donc supposer  $f$  réelle. On a

$$f(x) = \frac{f(x-) + f(x+)}{2}$$

partout sauf peut-être aux points d'un ensemble fini ou dénombrable  $N$ . Modifions la fonction sur cet ensemble  $N$  de telle sorte que l'équation précédente soit valable partout et montrons que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f)(x) = f(x)$$

en un point  $x$  arbitraire. On a

$$\begin{aligned} S_n(f)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \sum_{k=-n}^n e^{ik(x-t)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \frac{\sin(2n+1)(x-t)/2}{\sin(x-t)/2} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x-t) \frac{\sin(2n+1)t/2}{\sin t/2} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left( \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2} \right) \frac{\sin(2n+1)t/2}{\sin t/2} dt. \end{aligned}$$

Comme, en particulier,

$$S_n(1)(x) = 1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(2n+1)t/2}{\sin t/2} dt,$$

on peut écrire

$$S_n(f)(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left( \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2} - f(x) \right) \frac{\sin(2n+1)t/2}{\sin t/2} dt.$$

Introduisons la fonction de  $\mathcal{L}_{2\pi}^1$  définie sur l'intervalle  $[-\pi, \pi[$  par la relation

$$\varphi_x(t) = \left( \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2} - f(x) \right) \mathbb{I}_{[0, \pi[}(t).$$

Elle est à variation bornée sur  $[-\pi, \pi]$ , continue à l'origine et il s'agit de montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \varphi_x(t) \frac{\sin(2n+1)t/2}{\sin t/2} dt = 0.$$

Puisque, en vertu de l'exercice (1) page (165), les coefficients de Fourier d'une fonction intégrable tendent vers 0, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \varphi_x(t) \cos nt \, dt = 0,$$

et il faut en fait voir que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \varphi_x(t) \cot \frac{t}{2} \sin nt \, dt = 0. \quad (5)$$

Le raisonnement qui nous le permettra repose sur l'observation que  $\varphi_x$  étant à variation bornée sur  $[-\pi, \pi]$ ,  $\text{var}(\varphi_x, [\psi, \eta])$  tend vers 0 lorsque  $\eta$  tend vers 0 et ce, quel que soit  $\psi$  tel que  $0 < \psi < \eta$ . Si cela était faux en effet, on pourrait trouver un nombre  $\delta > 0$  et une suite d'intervalles disjoints  $[\psi_k, \eta_k]$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) tels que  $\text{var}(\varphi_x, [\psi_k, \eta_k]) > \delta$ . On en déduirait que  $\text{var}(\varphi_x, [\psi_K, \eta_1]) > K\delta$  quel que soit  $K \in \mathbb{N}$  contredisant ainsi l'hypothèse que  $\varphi_x$  est à variation bornée sur  $[-\pi, \pi]$ .

Soit donc  $\epsilon > 0$  arbitraire. Choisissons  $\eta > 0$  tel que  $\text{var}(\varphi_x, [\psi, \eta]) < \epsilon/3$  quel que soit  $\psi$  tel que  $0 < \psi < \eta$ . Les calculs suivants utilisent les inégalités

$$\frac{2}{\pi} x \leq \sin x \leq x \quad \text{si } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

qui traduisent la concavité du sinus sur  $[0, \pi/2]$ . On obtient d'abord

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_\eta^\pi \varphi_x(t) \cot \frac{t}{2} \sin nt \, dt \right| < \frac{\epsilon}{3}$$

dès que  $n \geq n_1$  en vertu de l'exercice (1) page (165) appliqué à la fonction

$$t \mapsto \varphi_x(t) \cot \frac{t}{2} \mathbb{I}_{[\eta, \pi]}(t)$$

puis

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\pi} \int_{\pi/n}^\eta \varphi_x(t) \cot \frac{t}{2} \sin nt \, dt \right| &= \cot \frac{\pi}{2n} \left| \frac{1}{\pi} \int_{\pi/n}^\psi \varphi_x(t) \sin nt \, dt \right| \\ &\leq n \frac{1}{4n} \text{var}(\varphi_x, [\pi/n, \psi]) < \frac{\epsilon}{3} \end{aligned}$$

en vertu des exercices (17) page (114) (le deuxième théorème de la moyenne) et (2) page (166) (les coefficients d'une fonction à variation bornée sont



majorés par la variation de la fonction divisée par l'indice du coefficient) et enfin, utilisant la continuité de la fonction  $\varphi_x$  à l'origine,

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/n} \varphi_x(t) \cot \frac{t}{2} \sin nt \, dt \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/n} \sup\{|\varphi_x(t)| \mid 0 \leq t \leq \pi/n\} \pi n \, dt < \frac{\epsilon}{3}$$

dès que  $n \geq n_2$ . On aura donc

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi_x(t) \cot \frac{t}{2} \sin nt \, dt \right| < \epsilon$$

dès que  $n$  est assez grand. C.Q.F.D.

Les sommes partielles  $S_n(f)$  peuvent converger vers la fonction  $f$  de plus d'une manière.

**Théorème 73** Soit  $f \in \mathcal{L}_{2\pi}^2$ . Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|S_n(f) - f\|_2 = 0.$$

De plus,

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(t)|^2 \, dt.$$

Réciproquement, si

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 < +\infty,$$

il existe  $f \in \mathcal{L}_{2\pi}^2$  telle que

$$c_k(f) = c_k.$$

Démonstration.

Les sommes partielles  $S_n(f)$  d'une fonction  $f \in \mathcal{L}_{2\pi}^2$  possèdent une propriété de meilleure approximation. Soit

$$T_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$$

un polynôme trigonométrique arbitraire de degré  $n$ . Alors

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(t) - T_n(t)|^2 dt \\
= & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(t)|^2 dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \overline{T_n(t)} dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \overline{f(t)} T_n(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |T_n(t)|^2 dt \\
= & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(t)|^2 dt - \sum_{k=-n}^n c_k(f) \overline{c_k} - \sum_{k=-n}^n \overline{c_k(f)} c_k + \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \\
= & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(t)|^2 dt - \sum_{k=-n}^n |c_k(f)|^2 + \sum_{k=-n}^n |c_k(f) - c_k|^2 \\
\geq & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(t)|^2 dt - \sum_{k=-n}^n |c_k(f)|^2.
\end{aligned}$$

On a égalité si et seulement si  $c_k = c_k(f)$  pour tout  $-n \leq k \leq n$ . Ceci montre que, de tous les polynômes trigonométriques d'ordre  $n$  possibles,  $S_n(f)$  est celui qui approche le mieux la fonction  $f$  en moyenne quadratique et entraîne

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(t) - S_n(f)(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(t)|^2 dt - \sum_{k=-n}^n |c_k(f)|^2 \quad (6)$$

donc

$$0 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(t)|^2 dt - \sum_{k=-n}^n |c_k(f)|^2.$$

L'entier  $n$  étant arbitraire, on en déduit l'inégalité de Bessel

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(t)|^2 dt$$

et, en particulier, la convergence de la série  $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2$ . Alors

$$\|S_n(f) - S_m(f)\|_2^2 = \int_{-\pi}^{+\pi} \left| \sum_{n < |k| \leq m} c_k(f) e^{ikt} \right|^2 dt = 2\pi \sum_{n < |k| \leq m} |c_k(f)|^2$$

et

$$\lim_{n, m \rightarrow +\infty} \|S_n(f) - S_m(f)\|_2 = 0.$$

Le théorème de Riesz-Fischer implique qu'il existe une fonction  $g \in \mathcal{L}_{2\pi}^2$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|S_n(f) - g\|_2 = 0.$$

Cette fonction  $g$  a les mêmes coefficients de Fourier que la fonction  $f$ . En effet,

$$c_k(g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} g(t) e^{-ikt} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} S_n(f)(t) e^{-ikt} dt = c_k(f),$$

la permutation de la limite et de l'intégrale étant justifiée par la convergence en moyenne quadratique de  $S_n(f)$  vers  $g$  et l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} S_n(f)(t) e^{-ikt} dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} g(t) e^{-ikt} dt \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|S_n(f) - g\|_2.$$

On a donc  $f = g$  presque partout et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|S_n(f) - f\|_2 = 0.$$

En vertu de l'équation (6), l'identité de Parseval

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(t)|^2 dt - \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2$$

est équivalente à la convergence en moyenne quadratique des sommes  $S_n(f)$  vers la fonction  $f$ .

Enfin, si les nombres  $c_k$  sont tels que

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 < +\infty,$$

le raisonnement précédent montre que les sommes partielles de la série

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$$

satisfont le critère de Cauchy et donc convergent en moyenne quadratique vers une fonction  $f \in \mathcal{L}_{2\pi}^2$  qui admet pour coefficients de Fourier les nombres  $c_k$  donnés. C.Q.F.D.

## 12.2 Transformée de Fourier

Soit  $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ . Sa **transformée de Fourier** est la fonction  $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  définie par

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\xi t} dt.$$

En vertu du théorème de Lebesgue sur la convergence dominée,  $\hat{f}$  est une fonction continue, bornée et

$$\|\hat{f}\|_{\infty} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1.$$

Exemple. Soit

$$n(x) = e^{-x^2/2}.$$

Alors, la dérivation sous le signe intégral et l'intégration par parties sur un intervalle de longueur infinie étant toutes les deux justifiées à l'aide du théorème de la convergence dominée, on a

$$\begin{aligned} \hat{n}'(\xi) &= \frac{d}{d\xi} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} e^{-i\xi t} dt \right) \\ &= \frac{d}{d\xi} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} \cos \xi t dt \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} -t e^{-t^2/2} \sin \xi t dt \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} \xi \cos \xi t dt = -\xi \hat{n}(\xi). \end{aligned}$$

Cette équation différentielle, jointe à la condition initiale  $\hat{n}(0) = 1$ , entraîne

$$\hat{n}(\xi) = e^{-\xi^2/2}.$$

La fonction  $n$  est donc sa propre transformée de Fourier.

Considérons la fonction

$$n_{\sigma}(x) = n\left(\frac{x}{\sigma}\right) = e^{-x^2/2\sigma^2}.$$

Sa transformée de Fourier est

$$\hat{n}_{\sigma}(\xi) = \sigma \hat{n}(\sigma\xi) = \sigma e^{-\sigma^2\xi^2/2}.$$

Ces deux fonctions jouissent des propriétés suivantes :

1. la fonction  $n_\sigma$  est positive et croît vers 1 lorsque  $\sigma$  tend vers  $+\infty$  ;
2. la fonction  $\hat{n}_\sigma$  est positive et

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{n}_\sigma(\xi) d\xi = 1;$$

3. si  $\varphi \in \mathcal{L}_\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$  est continue à l'origine,

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{n}_\sigma(\xi) \varphi(\xi) d\xi = \varphi(0); \quad (7)$$

les calculs suivants et le théorème de la convergence dominée justifient en effet cette relation :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{n}_\sigma(\xi) \varphi(\xi) d\xi - \varphi(0) \right| &= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{n}_\sigma(\xi) (\varphi(\xi) - \varphi(0)) d\xi \right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{n}_\sigma(\xi) |\varphi(\xi) - \varphi(0)| d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2/2} |\varphi(\eta/\sigma) - \varphi(0)| d\eta; \end{aligned}$$

4. pour toute fonction  $f \in \mathcal{L}_\mathbb{C}^1(\mathbb{R})$ , on a :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - \xi) \hat{n}_\sigma(\xi) d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t) n_\sigma(t) e^{ixt} dt; \quad (8)$$

le théorème de Fubini justifie en effet les calculs suivants :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t) n_\sigma(t) e^{ixt} dt &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} n_\sigma(t) e^{ixt} dt \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-ity} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) dy \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} n_\sigma(t) e^{i(x-y)t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \hat{n}_\sigma(y - x) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - z) \hat{n}_\sigma(-z) dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - z) \hat{n}_\sigma(z) dz. \end{aligned}$$

**Théorème 74 (formule d'inversion de Fourier)** Soit  $f \in \mathcal{L}_\mathbb{C}^1(\mathbb{R})$ . Supposons que  $\hat{f} \in \mathcal{L}_\mathbb{C}^1(\mathbb{R})$ . Alors

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

presque partout sur  $\mathbb{R}$ .

Démonstration.

Introduisons le produit de convolution

$$f_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - \xi) \hat{n}_\sigma(\xi) d\xi.$$

On a

$$|f_\sigma(x) - f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{n}_\sigma(\xi) |f(x - \xi) - f(x)| d\xi$$

et le théorème de Tonelli implique

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_\sigma(x) - f(x)| dx &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{n}_\sigma(\xi) |f(x - \xi) - f(x)| d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{n}_\sigma(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x - \xi) - f(x)| dx \end{aligned}$$

de telle sorte que

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \|f_\sigma - f\|_1 = 0$$

(en choisissant

$$\varphi(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x - \xi) - f(x)| dx$$

dans l'équation (7) et en utilisant le résultat de l'exercice (15) page (97)). D'autre part, en vertu de l'équation (8), on a aussi

$$f_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t) n_\sigma(t) e^{ixt} dt.$$

Cette deuxième représentation, les propriétés de la fonction  $n_\sigma$  et le théorème de la convergence dominée ( $\hat{f}$  est intégrable par hypothèse) entraînent

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} f_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t) e^{ixt} dt.$$

On doit donc avoir

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t) e^{ixt} dt$$

pour presque tout  $x \in \mathbb{R}$ . C.Q.F.D.

Remarque. Il suit de ce théorème qu'une fonction intégrable est uniquement déterminée par sa transformée de Fourier. Si deux fonctions  $f, g \in \mathcal{L}_\mathbb{C}^1(\mathbb{R})$  ont la même transformée de Fourier, le théorème s'appliquera en effet à la fonction  $f - g$ .

**Théorème 75** Soit  $f \in \mathcal{L}_\mathbb{C}^1(\mathbb{R})$  une fonction à variation bornée sur tout intervalle compact. Alors

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^A \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi = \frac{f(x-) + f(x+)}{2}.$$

Démonstration.

Comme dans le théorème de Dirichlet, on peut supposer que  $f$  est réelle et que

$$f(x) = \frac{f(x-) + f(x+)}{2}$$

partout. Puisque, en vertu de l'exercice (6) page (166), la transformée de Fourier d'une fonction intégrable tend vers 0,

$$\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \hat{f}(\xi) = 0,$$

on a

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^A \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-[\![A]]}^{[\!]\!A]} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

( $[\![A]]$  est la partie entière de  $A$ ) et il suffit de voir que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^n \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi = f(x)$$

en un point  $x$  arbitraire. En vertu du théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^n \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi &= \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\xi t} dt \right) e^{ix\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{\sin n(x-t)}{x-t} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) \frac{\sin nt}{t} dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2} \frac{\sin nt}{t} dt. \end{aligned}$$

Comme d'autre part (exercice (11) page (145)) on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\sin nt}{t} dt = 1,$$

on peut écrire que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^n \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi - f(x) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 \left( \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2} - f(x) \right) \frac{\sin nt}{t} dt \\ &+ \frac{2}{\pi} \int_1^{+\infty} \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2} \frac{\sin nt}{t} dt + \left( \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\sin nt}{t} dt - 1 \right) f(x) \end{aligned}$$

et il suffit de s'assurer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^1 \left( \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2} - f(x) \right) \frac{\sin nt}{t} dt = 0$$

et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \int_1^{+\infty} \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2} \frac{\sin nt}{t} dt = 0.$$

Cette dernière équation est valable en vertu de l'exercice (6) page (166) et on démontre celle qui la précède de la même manière que l'on a démontré l'équation (5). C.Q.F.D.

**Théorème 76 (produit de convolution)** Soient  $f, g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ . Alors, pour presque tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)g(y)| dy < +\infty,$$

la fonction  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  définie presque partout par l'équation

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y) dy$$

est intégrable sur  $\mathbb{R}$  et

$$\hat{h}(\xi) = \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi).$$

Démonstration.

En vertu de l'exercice (20) page (66), on peut supposer que les fonctions  $f$  et  $g$  sont boréliennes. Alors la fonction

$$(x, y) \mapsto f(x-y)$$



est aussi borélienne (en vertu de l'exercice (7) page (144) pour la fonction indicatrice d'un ensemble borélien, par linéarité et par passage à la limite pour une fonction borélienne arbitraire). La fonction

$$(x, y) \mapsto f(x - y)g(y)$$

est donc mesurable et on peut lui appliquer le théorème de Fubini-Tonelli. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x - y)g(y)| dy = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x - y)g(y)| dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |g(y)| dy \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x - y)| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(y)| dy \int_{-\infty}^{+\infty} |f(z)| dz < +\infty. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x - y)g(y)| dy < +\infty$$

pour presque tout  $x \in \mathbb{R}$  et la fonction définie pour ces valeurs de  $x$  par la relation

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - y)g(y) dy$$

(et par 0 ailleurs) est intégrable sur  $\mathbb{R}$  et

$$\begin{aligned} \hat{h}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)e^{-i\xi x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - y)g(y) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)e^{-i\xi y} dy \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - y)e^{-i\xi(x-y)} dx \\ &= \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi). \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

Remarque. On dénote généralement le produit de convolution de  $f$  avec  $g$  par  $f * g$ .

L'objet du dernier théorème de ce cours est d'obtenir l'analogie de l'identité de Parseval pour la transformée de Fourier. La situation est un peu compliquée ici du fait que l'espace  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R})$  n'est pas un sous-espace de l'espace  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R})$ .

**Théorème 77 (Plancherel)** Soit  $f \in \mathcal{L}_\mathbb{C}^2(\mathbb{R})$ . Il existe  $\hat{f} \in \mathcal{L}_\mathbb{C}^2(\mathbb{R})$  telle que

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \hat{f}(\xi) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^A f(x) e^{-ix\xi} dx \right|^2 d\xi = 0$$

et que

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^A \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi \right|^2 dx = 0.$$

On a

$$\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2.$$

Si  $f \in \mathcal{L}_\mathbb{C}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}_\mathbb{C}^2(\mathbb{R})$ , on a

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\xi t} dt.$$

pour presque tout  $x$ .

Démonstration.

Supposons d'abord que  $f \in \mathcal{L}_\mathbb{C}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}_\mathbb{C}^2(\mathbb{R})$ , posons  $f_1(x) = \overline{f(-x)}$  et introduisons la fonction  $h$  définie presque partout par

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+y) \overline{f(y)} dy.$$

Cette fonction  $h$  appartient à l'espace  $\mathcal{L}_\mathbb{C}^1(\mathbb{R})$ , est continue :

$$|h(x_2) - h(x_1)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x_2+y) - f(x_1+y)|^2 dy} \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|^2 dy}$$

et bornée :

$$|h(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|^2 dy.$$

On a de plus

$$\hat{h}(\xi) = |\hat{f}(\xi)|^2.$$

En vertu de l'équation (8), on peut écrire que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x-t) \hat{n}_\sigma(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{h}(t) n_\sigma(t) e^{ixt} dt,$$

donc, en faisant  $x = 0$ , que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} h(-t) \hat{n}_\sigma(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{h}(t) n_\sigma(t) dt.$$

En laissant  $\sigma$  tendre vers  $+\infty$  dans cette dernière relation, on obtient

$$h(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{h}(t) dt.$$

(Pour le membre de gauche, en vertu de l'équation (7) et pour le membre de droite en vertu du théorème de la convergence monotone). Mais ceci implique que  $\hat{f}$  appartient à l'espace  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R})$  et que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Dans le cas général où  $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R})$ , les fonctions  $f_A(x) = f(x)\mathbb{I}_{(-A,A)}(x)$  appartiennent à  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R})$  et

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \|f_A - f\|_2 = 0.$$

Pour les transformées de Fourier

$$\hat{f}_A(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^A f(x)e^{-i\xi x} dx,$$

on a

$$\|\hat{f}_A\|_2 = \|f_A\|_2.$$

Il s'ensuit que les fonctions  $\hat{f}_A$  satisfont la condition de Cauchy et, l'espace  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R})$  étant complet, il existe  $\hat{f} \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R})$  telle que

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \|\hat{f}_A - \hat{f}\|_2 = 0.$$

Puisque, si  $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R})$ , les fonctions  $\hat{f}_A$  convergent presque partout vers

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\xi x} dx,$$

on retrouve

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\xi x} dx$$

(presque partout) dans ce cas. Dans tous les cas,

$$\|\hat{f}\|_2 = \lim_{A \rightarrow +\infty} \|\hat{f}_A\|_2 = \lim_{A \rightarrow +\infty} \|f_A\|_2 = \|f\|_2.$$

Associons ensuite à  $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R})$  les fonctions  $g_A(x) = g(-x)\mathbb{I}_{(-A,A)}(x)$  et leurs transformées de Fourier

$$\hat{g}_A(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^A g(x)e^{i\xi x} dx.$$

Comme précédemment, on voit qu'il existe  $\check{g} \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R})$  telle que

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \|\hat{g}_A - \check{g}\|_2 = 0.$$

La démonstration sera complétée lorsque nous aurons vérifiée la formule d'inversion dans  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R})$ . Introduisant les opérateurs linéaires sur  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R})$  définis par  $\mathbb{F}(f) = \hat{f}$  et  $\mathbb{F}_1(g) = \check{g}$ , il s'agit de voir que

$$\mathbb{F}_1 \circ \mathbb{F}(f) = f.$$

Lorsque

$$f, \hat{f} \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R}), \quad (9)$$

cette relation est certainement satisfaite, en vertu de la formule d'inversion de Fourier. Reste à supprimer les hypothèses supplémentaires (9). Or, si  $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R})$ , la fonction  $f_{\sigma}$ ,

$$f_{\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\xi)\hat{n}_{\sigma}(\xi) d\xi,$$

satisfait les conditions (9). En effet, il est clair que  $f_{\sigma} \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R})$  et que  $\hat{f}_{\sigma} = \hat{f}\hat{n}_{\sigma} \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R})$ . On a aussi  $f_{\sigma} \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R})$ ; en effet,

$$\begin{aligned} |f_{\sigma}(x)|^2 &\leq \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-\xi)|\hat{n}_{\sigma}(\xi) d\xi \right)^2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-\xi)|\hat{n}_{\sigma}(\xi) d\xi \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-\eta)|\hat{n}_{\sigma}(\eta) d\eta \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(x-\xi)|^2 + |f(x-\eta)|^2}{2} \hat{n}_{\sigma}(\xi) d\xi \hat{n}_{\sigma}(\eta) d\eta \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-\xi)|^2 \hat{n}_{\sigma}(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

en vertu du théorème de Tonelli et de l'inégalité élémentaire

$$ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2},$$

de telle sorte que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_\sigma(x)|^2 dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx.$$

De façon similaire,

$$|f_\sigma(x) - f(x)|^2 \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x - \xi) - f(x)|^2 \hat{n}_\sigma(\xi) d\xi$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_\sigma(x) - f(x)|^2 dx \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{n}_\sigma(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x - \xi) - f(x)|^2 dx,$$

ce qui entraîne, comme précédemment, que

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \|f_\sigma - f\|_2 = 0.$$

On en déduit que si  $f \in \mathcal{L}_\mathbb{C}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}_\mathbb{C}^2(\mathbb{R})$ , on a

$$\|\mathbb{F}_1 \circ \mathbb{F}(f) - f\|_2 \leq \|\mathbb{F}_1 \circ \mathbb{F}(f_\sigma) - \mathbb{F}_1 \circ \mathbb{F}(f)\|_2 + \|f_\sigma - f\|_2 = 2\|f_\sigma - f\|_2 < \epsilon$$

si  $\sigma$  est assez grand, donc que

$$\mathbb{F}_1 \circ \mathbb{F}(f) = f$$

dans ce cas également. Finalement, l'espace  $\mathcal{L}_\mathbb{C}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}_\mathbb{C}^2(\mathbb{R})$  étant dense dans l'espace  $\mathcal{L}_\mathbb{C}^2(\mathbb{R})$  (grâce aux fonctions de test), soit  $f_1 \in \mathcal{L}_\mathbb{C}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}_\mathbb{C}^2(\mathbb{R})$  telle que

$$\|f_1 - f\|_2 < \frac{\epsilon}{2}.$$

Alors

$$\|\mathbb{F}_1 \circ \mathbb{F}(f) - f\|_2 \leq \|\mathbb{F}_1 \circ \mathbb{F}(f) - \mathbb{F}_1 \circ \mathbb{F}(f_1)\|_2 + \|f_1 - f\|_2 < \epsilon$$

ce qui entraîne

$$\mathbb{F}_1 \circ \mathbb{F}(f) = f$$

pour toute fonction  $f \in \mathcal{L}_\mathbb{C}^2(\mathbb{R})$ . C.Q.F.D.

Remarque. On trouve d'autres notations pour les notions précédentes.

Si

$$\tilde{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\xi t} dt = \sqrt{2\pi} \hat{f}(\xi),$$

la formule d'inversion de Fourier s'écrit

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

et l'identité de Parseval devient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

De même, si

$$f \tilde{*} g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y) dy = \sqrt{2\pi} f * g(x),$$

on a encore

$$\widetilde{(f \tilde{*} g)} = \tilde{f} \tilde{g}.$$

Ou encore, si

$$\tilde{\tilde{f}}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi\xi t} dt = \sqrt{2\pi} \hat{f}(2\pi\xi),$$

la formule d'inversion est

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\tilde{f}}(\xi) e^{i2\pi x\xi} d\xi,$$

celle de Parseval demeure

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{\tilde{f}}(\xi)|^2 d\xi$$

et

$$\widetilde{\widetilde{(f \tilde{*} g)}} = \tilde{\tilde{f}} \tilde{\tilde{g}}.$$

### 12.3 Exercices

1. Soit  $f \in \mathcal{L}_{2\pi}^1$ . Montrer que

$$\lim_{|k| \rightarrow +\infty} c_k(f) = 0.$$

Suggestion : considérer d'abord le cas d'une fonction continue.

2. Soit  $f \in \mathcal{L}_{2\pi}^1$  une fonction à variation bornée sur  $[-\pi, \pi]$ . Montrer que

$$|c_k(f)| \leq \frac{\text{var}(f, [-\pi, \pi])}{4k}.$$

Suggestion : remarquer que

$$c_k(f) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f\left(s - \frac{\pi}{k}\right) e^{-iks} ds.$$

3. Développer la fonction  $f(x) = \pi^2 - x^2$  en une série trigonométrique sur l'intervalle  $(-\pi, \pi)$ . En déduire la valeur des sommes

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4}.$$

4. Développer la fonction  $f(x) = x$  en une série trigonométrique sur l'intervalle  $(-\pi, \pi)$ . En déduire la valeur des sommes

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin kx}{k}.$$

5. Soient  $f \in \mathcal{L}_{2\pi}^1$  une fonction réelle et

$$S(f)(x) = \frac{1}{2}a_0(f) + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx)$$

sa série de Fourier écrite sous « forme réelle ». Quelle est l'expression intégrale des coefficients ? Que devient l'identité de Parseval ?

6. Soit  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  une fonction indéfiniment dérivable à support compact. Montrer que, quel que soit  $N \in \mathbb{N}$ ,

$$\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \xi^N \hat{f}(\xi) = 0.$$

En déduire que, si  $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R})$ ,

$$\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \hat{f}(\xi) = 0.$$

7. Calculer la transformée de Fourier de la fonction

$$f(x) = e^{-|x|}.$$

En déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \xi x}{1 + \xi^2} d\xi.$$

8. Calculer la transformée de Fourier de la fonction

$$f(x) = \mathbb{I}_{[-1,1]}(x).$$

En déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx.$$

9. Calculer la convolution  $\mathbb{I}_{[-1,1]} * \mathbb{I}_{[-1,1]}$  et vérifier l'équation  $\widehat{f * g} = \hat{f} \hat{g}$  dans ce cas.

10. Montrer que si  $f, g \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$  on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \hat{g}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x) g(x) dx.$$

Suggestion : considérer d'abord le cas où  $f, g \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ .

11. Soit  $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$  une fonction telle que

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |f(k)| < +\infty.$$

Supposons que  $\text{supp}(\hat{f}) = [\pi, \pi]$ . Montrer que

$$c_k(\hat{f}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(-k).$$

En déduire que la formule d'interpolation suivante

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f(k) \frac{\sin \pi(x - k)}{\pi(x - k)}$$

est vraie presque partout sur  $\mathbb{R}$ . Que donne cette formule lorsque

$$\hat{f}(\xi) = (\pi - |\xi|) \mathbb{I}_{[-\pi, \pi]}(\xi)?$$



## Références

- [1] Nicolas Bourbaki. *Topologie générale*. Éléments de mathématique. Hermann, Paris, 1940-1953.  
La section du traité de Bourbaki consacrée à la topologie.  
Math-Info QA 3 B682.
- [2] Nicolas Bourbaki. *Éléments d'histoire des mathématiques*. Collection Histoire de la pensée. Hermann, Paris, 1969.  
Le traité de Bourbaki est parsemé de notes historiques qui ont été colligées en un volume.  
Math-Info QA 21 B68 1974.
- [3] Marc Briane et Gilles Pagès. *Théorie de l'intégration*. Vuibert, Paris, 2000.  
Cours de deuxième cycle avec exercices et solutions.  
Math-Info QA 308 B75 2000.
- [4] Paul Malliavin et H. Airault. *Intégration, analyse de Fourier, probabilités, analyse gaussienne*. Masson, Paris, 1993.  
Cours de deuxième cycle, pas d'exercices.  
Math-Info QA 403.5 M35 94.
- [5] Bernard R. Gelbaum et John M.H. Olmsted. *Counterexamples in Analysis*. Holden-Day, San Francisco, 1964.  
Recueil de contre-exemples, niveau deuxième cycle.  
Math-Info QA 300 G44.
- [6] André Gramain. *Intégration*. Collection Méthodes. Hermann, Paris, 1988.  
Manuel de niveau premier cycle, approche abstraite, exercices.  
Math-Info QA 312 G73 1988.
- [7] M. Guinot. *Le paradoxe de Banach-Tarski*. Aléas, Paris, 1991.  
Sur une conséquence curieuse de l'axiome du choix.  
Math-Info QA 248 G84 1991.
- [8] Bertrand Hauchecorne. *Les contre-exemples en mathématiques*. Ellipses, Paris, 1988.  
Un recueil de contre-exemples tirés de toutes les branches des mathématiques.  
Math-Info QA 43 H38 1988.
- [9] Thomas W. Korner. *Fourier Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.  
Présentation originale de sujet, niveau premier cycle.  
Math-Info QA 403.5 K675 1989.

- [10] Henri Lebesgue. *Oeuvres scientifiques*. L'enseignement mathématique, Genève, 1972.  
Les oeuvres complètes de Lebesgue en cinq volumes.  
Math-Info QA 3 L42.
- [11] Michel Métivier. *Probabilités : dix leçons d'introduction*. Ellipses, Paris, 1987.  
Survol des probabilités et de la théorie de la mesure. Bonne bibliographie.  
Math-Info QA M463 1987.
- [12] Walter Rudin. *Analyse réelle et complexe*. Masson, Paris, 1975.  
Manuel complet d'analyse mathématique, incluant l'essentiel de la théorie de la mesure. Nombreux exercices.  
Math-Info QA 300 R8312.
- [13] Walter Rudin. *Principes d'analyse mathématique*. Ediscience, Paris, 1995.  
Manuel de premier cycle très complet, nombreux exercices.  
Math-Info QA 300 R 8212 1995.
- [14] Murray R. Spiegel. *Lebesgue Measure and Integration*. Schaum's outline series. Mc Graw-Hill, New-York, 1969.  
Manuel de niveau premier cycle, beaucoup d'exercices.  
Math-Info QA 331.5 S64.
- [15] George Temple. *100 Years of Mathematics*. Duckworth, Londres, 1981.  
Panorama de l'histoire des mathématiques au XX<sup>e</sup> siècle.  
Math-Info QA 26 T46.

## Index

- additivité de l'intégrale, 36, 60
- additivité de la mesure, 5, 49
- additivité finie de l'intégrale, 31
- additivité finie de la mesure, 18
- algèbre de Banach, 86
- algèbre de Boole, 41
- application continue, 44
- application mesurable, 43
- approximation par fonctions étagées, 23
- approximation par fonctions dérivables, 93
- approximation trigonométrique, 152
- axiome du choix, 15
  
- base ouverte, 45
- Bessel, inégalité de, 153
- Borel-Cantelli, lemme de, 51
- Borel-Lebesgue, théorème de, 6
  
- Cantor, ensemble de, 15
- Carathéodory, construction de, 69
- changement de variables, 110, 139
- classe monotone, 130
- complétion d'une tribu, 53
- continuité de la mesure, 14, 50
- convergence dominée, 34, 61
- convergence en mesure, 81
- convergence en moyenne, 88, 91, 152
- convergence en probabilité, 82
- convergence essentiellement uniforme, 86
- convergence monotone, 28, 56
- convergence presque partout, 80
- convergence presque sûre, 82
- convolution, 95, 97, 157, 159
- coordonnées polaires, 143
- courbe rectifiable, 112
  
- dérivée de Radon-Nikodym, 121
- dérivation sous le signe intégral, 36
- densité de probabilité, 123
- difféomorphisme, 139
- Dini, nombres dérivés de, 102
- Dirichlet, théorème de, 149
- droite achevée, 47
  
- Egorov, théorème d', 80
- ensemble élémentaire, 130
- ensemble  $F$ - $\delta$ , 71
- ensemble  $F$ - $\sigma$ , 71
- ensemble fermé, 41
- ensemble mesurable, 9, 41
- ensemble négligeable, 52
- ensemble ouvert, 41
- équivalence modulo une mesure, 79
- espérance mathématique, 56, 76
- espace de Banach, 86
- espace de Hilbert, 91
- espace de Lebesgue, 27, 55, 85, 88, 89, 146, 147
- espace des fonctions continues, 44
- espace des classes d'équivalence, 79
- espace des fonctions mesurables, 43, 48
- espace dual, 125
- espace métrique, 46
- espace métrique complet, 83
- espace mesuré, 49
- espace mesuré complet, 52
- espace mesurable, 41
- espace préhilbertien, 91
- espace probabilisé, 49
- espace séparable, 45
- espace topologique, 41
- espace vectoriel normé, 85

événement, 49  
 exposants conjugués, 89  
 Fatou, lemme de, 34, 61  
 fonction étagée, 20, 53  
 fonction à variation bornée, 99  
 fonction absolument continue, 107  
 fonction de répartition, 76  
 fonction de test, 93  
 fonction essentiellement bornée, 85  
 fonction indicatrice, 4, 19  
 fonction intégrable, 27, 33, 55, 60, 146  
 fonction mesurable, 19, 33, 46, 146  
 fonction singulière, 114  
 forme linéaire continue, 125  
 forme linéaire positive, 32  
 Fourier, coefficients de, 147  
 Fourier, formule d'inversion de, 156  
 Fourier, série de, 147  
 Fourier, transformée de, 155  
 Fubini-Tonelli, théorème de, 133  
 Hölder, inégalité de, 89  
 Hahn-Jordan, décomposition de, 118  
 hypercube, 136  
 image directe d'une mesure, 50  
 image directe d'une tribu, 43  
 image réciproque d'une tribu, 42  
 inégalité du triangle, 32  
 intégrale, 27, 55  
 intégration par parties, 109  
 intégration terme à terme d'une série, 35  
 invariance sous translation de la mesure extérieure, 7  
 Jacobi, déterminant de, 139  
 Jensen, inégalité de, 95  
 Jordan, théorème de, 99  
 Lebesgue, décomposition de, 123  
 Lebesgue, théorème sur la dérivation de, 102  
 linéarité de l'intégrale, 29, 58  
 loi de probabilité, 76  
 mesure  $\sigma$ -finie, 49  
 mesure absolument continue, 120  
 mesure atomique, 129  
 mesure borélienne positive, 49  
 mesure complexe, 129  
 mesure de Lebesgue, 14, 135, 136  
 mesure de Lebesgue-Stieltjes, 73  
 mesure de probabilité, 49  
 mesure diffuse, 129  
 mesure du cardinal, 49  
 mesure extérieure, 67  
 mesure extérieure de Hausdorff, 77  
 mesure extérieure de Lebesgue, 6  
 mesure finie, 49  
 mesure positive, 49  
 mesure produit, 132  
 mesure signée, 115  
 mesures étrangères, 117  
 Minkowski, inégalité de, 90  
 monotonie de la mesure, 50  
 monotonie de la mesure extérieure, 7  
 orthogonalité, 147  
 parallélogramme, identité du, 96  
 Parseval, identité de, 154  
 partie négative d'une fonction, 21  
 partie positive d'une fonction, 21  
 partition d'un intervalle, 3  
 pavé, 136  
 Plancherel, théorème de, 161  
 polynôme trigonométrique, 148  
 positivité de l'intégrale, 31, 59  
 presque partout, 14, 52  
 presque sûrement, 52

Radon-Nikodym, théorème de, 121  
rectangle mesurable, 42  
rectangles ouverts, 45  
Riesz-Fischer, théorème de, 91

sommes de Lebesgue, 4, 29, 58  
sommes de Riemann, 3  
sous-additivité de la mesure, 50  
sous-additivité de la mesure extérieure,  
8  
support d'une fonction, 93  
supremum essentiel, 85

Tchebychev, inégalité de, 88  
théorème fondamental du calcul, 32,  
105, 108  
topologie, 41  
topologie produit, 45  
trace d'une mesure, 49  
trace d'une tribu, 42  
tribu, 41  
tribu borélienne, 42  
tribu de Lebesgue, 10, 135, 136  
tribu engendrée, 41  
tribu produit, 42

variable aléatoire, 49  
variance, 92  
variation d'une fonction, 99  
variation d'une mesure, 116  
Vitali, théorème de, 100