MESURE ET INTÉGRATION
EN UNE DIMENSION

Notes de cours

André Giroux
Département de Mathématiques et Statistique
Université de Montréal
Mai 2004

Table des matières

1 INTRODUCTION

L'aire d'un rectangle R de côtés a et b est ab, par définition. Lorsque a et b sont des entiers, cette aire est égale au nombre de carrés de côté unité nécessaires pour recouvrir R. L'aire du triangle rectangle de base a et de hauteur b est bien évidemment $ab/2$. On en déduit l'aire d'un triangle quelconque puis, par triangulation, celle d'un polygone arbitraire.

Le calcul de l'aire d'un domaine D délimité par des courbes plus complexes, par exemple des arcs de cercle ou des segments de parabole, nécessite un passage à la limite. Dans le cas où D est déterminé par le graphe d'une fonction f continue et positive sur un intervalle compact $[a, b]$ [1],

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b \ , \ 0 \leq y \leq f(x)\},$$

considérons avec Riemann une partition $\mathcal{P}$ de l'intervalle $[a, b]$:

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\} \ \text{ où } \ a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

Alors la somme supérieure

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} \sup\{f(x) \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k\}(x_k - x_{k-1})$$

fournit une borne supérieure pour l'aire requise et la somme inférieure

$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} \inf\{f(x) \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k\}(x_k - x_{k-1})$$

en fournit une borne inférieure. En utilisant les propriétés des fonctions continues sur les intervalles compacts, on montre que

$$\inf\{S(f, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P}\} = \sup\{s(f, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P}\}$$

et c'est cette valeur commune que l'on prend pour mesure de l'aire du domaine D. On exprime ceci en disant que la fonction f est intégrable au sens de Riemann sur l'intervalle $[a, b]$, d'intégrale

$$\int_a^b f(x) \ dx = \inf\{S(f, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P}\} = \sup\{s(f, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P}\}.$$

[1] $[a, b]$ désigne un intervalle contenant ses extrémités, $]a, b[$ désigne un intervalle ne contenant pas ses extrémités et (a, b) désigne un intervalle contenant peut-être ses extrémités.

Lorsque la fonction f n'est pas continue, il n'est plus certain qu'elle soit intégrable au sens de Riemann, même si elle est positive et bornée. Un exemple d'une telle fonction est fourni par la fonction indicatrice des nombres rationnels $f = \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}$, définie par

$$\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

qui n'est intégrable sur aucun intervalle $[a, b]$ puisque l'on a toujours

$$S(\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}, \mathcal{P}) = b - a \ , \ \ s(\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}, \mathcal{P}) = 0.$$

On peut essayer d'élargir la classe des fonctions intégrables, et ceci est l'objet de notre cours, en considérant avec Lebesgue des partitions de l'axe des ordonnées plutôt que des partitions de l'axe des abscisses. Nous étendrons d'abord la notion de longueur d'un intervalle,

$$\lambda([a, b]) = b - a,$$

à une classe plus vaste d'ensembles (nous les nommerons : ensembles mesurables et la longueur généralisée : mesure). Nous considérerons alors la somme

$$\sigma_m(f) = \sum_{k=0}^{m} \frac{k}{m} \ \lambda(E_k)$$

où

$$E_k = \left\{ x \mid \frac{k}{m} \leq f(x) < \frac{k+1}{m} \right\}$$

et $\lambda(E_k)$ est la mesure de E_k. (Pour alléger l'exposé, nous avons supposé ici que $0 \leq f(x) \leq 1$.) Cette somme d'aires de rectangles généralisés constitue une bonne approximation de l'aire du domaine D cherchée : lorsque m est grand en effet, f est presque constante sur E_k. La complexité de la fonction se traduit par la complexité des ensembles E_k. Si f est monotone par exemple, les ensembles E_k sont des intervalles et la somme $\sigma_m(f)$ se réduit à la somme $s(f, \mathcal{P})$ correspondante. Pour une classe très vaste de fonctions (nous les appellerons : fonctions mesurables), nous verrons que

$$\lim_{m \to +\infty} \sigma_m(f)$$

existe et généralise effectivement la notion d'aire précédemment obtenue. Une telle fonction sera dite intégrable au sens de Lebesgue, d'intégrale

$$\int_0^1 f = \lim_{m \to +\infty} \sigma_m(f).$$

La propriété de la mesure qui permettra ces développements est la propriété d'additivité : désignant par $\sum_n E_n$ la réunion d'une suite finie ou infinie d'ensembles mesurables deux à deux disjoints[2], nous aurons

$$\lambda\left(\sum_n E_n\right) = \sum_n \lambda(E_n)$$

et c'est sur cette propriété fondamentale que reposera toute la théorie.

1.1 Exercices

1. Vérifier que la fonction
$$x \mapsto \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x)$$
est partout discontinue.

2. Déterminer l'ensemble des points de continuité de la fonction
$$x \mapsto x\,\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x).$$

3. Déterminer les ensembles E_k associés à la fonction $\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}$.

[2] et par $E_1 + E_2$ la réunion de deux ensembles disjoints.

2 ENSEMBLES MESURABLES

Nous allons généraliser la notion de longueur en deux étapes. Nous associerons d'abord à tout ensemble $E \subseteq \mathbb{R}$ un élément $\lambda^*(E)$ de $[0, +\infty]$[3]appelé mesure extérieure de E qui, lorsque E est un intervalle, se réduit à sa longueur. Nous restreindrons ensuite la fonction $E \mapsto \lambda^*(E)$ ainsi définie sur l'ensemble $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$ de toutes les parties de $\mathbb{R}$ à une famille $\mathfrak{L}$ appropriée d'ensembles de façon à avoir la propriété d'additivité. Ces ensembles seront les ensembles mesurables et la fonction restreinte sera la mesure. Nous verrons ensuite des exemples d'ensembles mesurables et étudierons des propriétés supplémentaires de la mesure.

2.1 Mesure extérieure

La **mesure extérieure** $\lambda^*(E)$ d'un ensemble $E \subseteq \mathbb{R}$ est définie par l'équation

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \sum_k (b_k - a_k) \mid E \subseteq \bigcup_k \,]a_k, b_k[\right\}, \tag{1}$$

la borne inférieure étant calculée sur la famille des suites finies ou infinies d'intervalles ouverts $\{\ ]a_k, b_k[\ \}_k$ recouvrant E. Pour étudier ses propriétés, nous nous appuierons sur le théorème suivant.

Théorème 1 (Borel-Lebesgue) *Tout recouvrement d'un intervalle compact $[a, b]$ par des intervalles ouverts $\{\ ]a_\alpha, b_\alpha[\ \}_{\alpha \in A}$ contient un sous-recouvrement fini.*

Démonstration.

Supposons le contraire. Alors au moins l'un des deux intervalles

$$[a, \frac{a+b}{2}]\ ,\ [\frac{a+b}{2}, b]$$

ne pourrait être recouvert par un nombre fini des intervalles $]a_\alpha, b_\alpha[$. Donc au moins l'un des quatre intervalles

$$[a, \frac{3a+b}{4}]\ ,\ [\frac{3a+b}{4}, \frac{a+b}{2}]\ ,\ [\frac{a+b}{2}, \frac{a+3b}{4}]\ ,\ [\frac{a+3b}{4}, b]$$

[3]On convient que si $a \in [0, +\infty]$, $a + (+\infty) = +\infty$, que si $a \in]0, +\infty]$, $a \times (+\infty) = +\infty$ et enfin que $0 \times (+\infty) = 0$.

ne pourrait l'être. Ainsi de suite. On obtiendrait de cette façon une suite d'intervalles emboîtés,

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \cdots ,$$

dont le $n^{\text{ième}}$ aurait pour longueur $(b-a)/2^n$. L'intersection de tous ces intervalles se réduirait à un point x de $[a, b]$. Il existerait donc un intervalle $]a_\alpha, b_\alpha[$ contenant ce point et, par suite, tous les intervalles I_n à partir d'un certain rang, contredisant leur définition. C.Q.F.D.

Dans le théorème suivant, $E + x_0$ désigne le translaté de E par x_0 :

$$E + x_0 = \{y \mid y = x + x_0 \ , \ x \in E\}.$$

(Ne pas confondre $E + x_0$ avec $E + \{x_0\}$.)

Théorème 2 *La mesure extérieure $\lambda^* : \mathfrak{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ possède les propriétés suivantes :*

1. *$E \subseteq F$ implique que $\lambda^*(E) \leq \lambda^*(F)$;*
2. *quel que soit x_0, $\lambda^*(E + x_0) = \lambda^*(E)$;*
3. *pour tout intervalle (a, b), $\lambda^*((a, b)) = b - a$;*
4. *pour toute suite finie ou infinie d'ensembles $\{E_k\}_k$,*

$$\lambda^*\left(\bigcup_k E_k\right) \leq \sum_k \lambda^*(E_k).$$

Démonstration.

La première propriété (monotonie) suit de ce que tout recouvrement de F est aussi un recouvrement de E et la deuxième (invariance sous translation) découle de ce que la longueur d'un intervalle est invariante sous translation.

Pour démontrer la troisième, considérons d'abord le cas d'un intervalle compact $[a, b]$. Soit $\epsilon > 0$. La relation

$$[a, b] \subseteq \,]a - \epsilon, b + \epsilon[$$

montre que

$$\lambda^*([a, b]) \leq \lambda^*(\,]a - \epsilon, b + \epsilon[\,) \leq b - a + 2\epsilon$$

donc, $\epsilon > 0$ étant arbitraire, que

$$\lambda^*([a, b]) \leq b - a.$$

Pour obtenir l'inégalité opposée, il suffit, en vertu du théorème de Borel-Lebesgue, de montrer que, si

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{k=1}^{N}]a_k, b_k[,$$

on a

$$b - a \leq \sum_{k=1}^{N} (b_k - a_k).$$

Pour ce faire, on peut supposer que les intervalles du recouvrement fini sont énumérés de telle sorte que

$$a_1 < a < a_2 < b_1 < a_3 < b_2 < \cdots < a_{N-1} < b_{N-2} < a_N < b_{N-1} < b < b_N.$$

Alors

$$\begin{aligned} &(b_N - a_N) + (b_{N-1} - a_{N-1}) + \cdots + (b_2 - a_2) + (b_1 - a_1) \\ &= b_N + (b_{N-1} - a_N) + (b_{N-2} - a_{N-1}) + \cdots + (b_1 - a_2) - a_1 \\ &> b_N - a_1 > b - a. \end{aligned}$$

Si l'intervalle (a, b) est borné, les inclusions

$$[a + \epsilon, b - \epsilon] \subseteq (a, b) \subseteq [a, b]$$

entraînent

$$b - a - 2\epsilon \leq \lambda^*((a, b)) \leq b - a.$$

Enfin, si l'intervalle (a, b) n'est pas borné, il contient des intervalles bornés de mesure extérieure arbitrairement grande et, par monotonie,

$$\lambda^*((a, b)) = +\infty = b - a.$$

Pour démontrer la quatrième propriété (sous-additivité), considérons pour chaque k une suite d'intervalles ouverts $\{\ ]a_j^k, b_j^k[\ \}_j$ tels que

$$E_k \subseteq \bigcup_j\ ]a_j^k, b_j^k[\ ,\ \sum_j (b_j^k - a_j^k) \leq \lambda^*(E_k) + \frac{\epsilon}{2^k}.$$

Alors les intervalles $\{\ ]a_j^k, b_j^k[\ \}_{j,k}$ forment une famille au plus dénombrable (c'est-à-dire peuvent être rangés en une suite finie ou infinie) telle que

$$\bigcup_k E_k \subseteq \bigcup_k \bigcup_j\ ]a_j^k, b_j^k[,$$

d'où

$$\lambda^*\left(\bigcup_k E_k\right) \leq \sum_k \sum_j (b_j^k - a_j^k) \leq \sum_k \lambda^*(E_k) + \epsilon.$$

C.Q.F.D.

2.2 Ensembles mesurables

La fonction λ^* que l'on vient d'introduire ne devient additive que si on la restreint à la classe des ensembles mesurables. Un ensemble $E \subseteq \mathbb{R}$ est un **ensemble mesurable** si

$$\text{quel que soit } A \subseteq \mathbb{R}\ ,\ \lambda^*(A) = \lambda^*(AE) + \lambda^*(AE^c).$$

Puisque, par sous-additivité, on a toujours

$$\text{quel que soit } A \subseteq \mathbb{R}\ ,\ \lambda^*(A) \leq \lambda^*(AE) + \lambda^*(AE^c),$$

il suffit, pour démontrer qu'un ensemble E est mesurable, de vérifier l'inégalité

$$\text{quel que soit } A \subseteq \mathbb{R}\ ,\ \lambda^*(A) \geq \lambda^*(AE) + \lambda^*(AE^c)$$

et, pour ce faire, on peut bien sûr supposer que

$$\lambda^*(A) < +\infty.$$

Théorème 3 *Pour toute suite finie ou infinie d'ensembles mesurables $\{E_k\}_k$ deux à deux disjoints, on a*

$$\lambda^*\left(\sum_k E_k\right) = \sum_k \lambda^*(E_k).$$

Démonstration.

Considérons un ensemble $A \subseteq \mathbb{R}$ quelconque et vérifions d'abord, par récurrence sur N, que

$$\lambda^*\left(\sum_{k=1}^N AE_k\right) = \sum_{k=1}^N \lambda^*(AE_k). \tag{2}$$

Cet énoncé est en effet trivial pour $N = 1$ et, s'il est vrai pour N,

$$\lambda^*\left(\sum_{k=1}^{N+1} AE_k\right) = \lambda^*\left(\left(\sum_{k=1}^{N+1} AE_k\right) E_{N+1}\right) + \lambda^*\left(\left(\sum_{k=1}^{N+1} AE_k\right) E_{N+1}^c\right)$$
$$= \lambda^*(AE_{N+1}) + \lambda^*\left(\sum_{k=1}^{N} AE_k\right) = \sum_{k=1}^{N+1} \lambda^*(AE_k).$$

Dans le cas d'une suite finie, $\{E_k\}_{1\leq k\leq N}$, on a donc bien, en prenant $A = \mathbb{R}$, que

$$\lambda^*\left(\sum_{k=1}^{N} E_k\right) = \sum_{k=1}^{N} \lambda^*(E_k).$$

Dans le cas d'une suite infinie, $\{E_k\}_{1\leq k\leq +\infty}$, on a, pour chaque N, que

$$\sum_{k=1}^{N} \lambda^*(E_k) = \lambda^*\left(\sum_{k=1}^{N} E_k\right) \leq \lambda^*\left(\sum_{k=1}^{+\infty} E_k\right)$$

donc que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda^*(E_k) \leq \lambda^*\left(\sum_{k=1}^{+\infty} E_k\right).$$

La sous-additivité de la mesure extérieure implique l'inégalité opposée. C.Q.F.D.

Nous dénoterons par $\mathfrak{L}$ la famille des ensembles mesurables. Le théorème suivant peut s'énoncer en disant que cette famille forme ce que l'on appelle une **tribu**.

Théorème 4 *La famille $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ des ensembles mesurables possède les propriétés suivantes :*

1. *$\mathbb{R}$ est mesurable ;*
2. *le complémentaire E^c d'un ensemble mesurable E est mesurable ;*
3. *la réunion d'une suite finie ou infinie d'ensembles mesurables $\{E_k\}_k$ est mesurable ;*
4. *l'intersection d'une suite finie ou infinie d'ensembles mesurables $\{E_k\}_k$ est mesurable.*

Démonstration.

Les deux premières propriétés sont évidentes de la définition et la quatrième découle, par complémentarité, de la deuxième et de la troisième.

Pour démontrer cette dernière, considérons d'abord le cas de deux ensembles mesurables E_1 et E_2. Alors, quel que soit $A \subseteq \mathbb{R}$,

$$\begin{gathered}\lambda^*(A(E_1 \cup E_2)) + \lambda^*(A(E_1 \cup E_2)^c) = \lambda^*(AE_1 \cup AE_2) + \lambda^*(AE_1^c E_2^c) \\ = \lambda^*(AE_1E_2^c + AE_2) + \lambda^*(AE_1^cE_2^c) \leq \lambda^*(AE_1E_2^c) + \lambda^*(AE_2) + \lambda^*(AE_1^cE_2^c) \\ = \lambda^*(AE_2^c) + \lambda^*(AE_2) = \lambda^*(A).\end{gathered}$$

Par récurrence sur N, la réunion de toute suite finie d'ensembles mesurables $\{E_k\}_{1\leq k\leq N}$ est donc mesurable et, par complémentarité, ainsi en est-il de leur intersection.

Considérons maintenant une suite infinie d'ensembles mesurables deux à deux disjoints $\{E_k\}_k$. En vertu de l'équation (2), on a, quel que soit $A \subseteq \mathbb{R}$ et quel que soit N,

$$\begin{aligned}\lambda^*(A) &= \lambda^*\left(A\sum_{k=1}^{N} E_k\right) + \lambda^*\left(A\left(\sum_{k=1}^{N} E_k\right)^c\right) \\ &= \sum_{k=1}^{N} \lambda^*(AE_k) + \lambda^*\left(A\left(\sum_{k=1}^{N} E_k\right)^c\right) \\ &\geq \sum_{k=1}^{N} \lambda^*(AE_k) + \lambda^*\left(A\left(\sum_{k=1}^{+\infty} E_k\right)^c\right)\end{aligned}$$

de telle sorte que

$$\begin{aligned}\lambda^*(A) &\geq \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda^*(AE_k) + \lambda^*\left(A\left(\sum_{k=1}^{+\infty} E_k\right)^c\right) \\ &\geq \lambda^*\left(A\sum_{k=1}^{+\infty} E_k\right) + \lambda^*\left(A\left(\sum_{k=1}^{+\infty} E_k\right)^c\right)\end{aligned}$$

ce qui montre que $\sum_k E_k = \bigcup_k E_k$ est mesurable.

Envisageons enfin le cas d'une suite infinie quelconque $\{E_k\}_k$. Posons

$$F_1 = E_1 \ , \ F_2 = E_2E_1^c \ , \ F_3 = E_3E_1^cE_2^c \ , \ldots, \ F_n = E_nE_1^cE_2^c \cdots E_{n-1}^c \ , \ldots$$

Ces ensembles F_k sont mesurables et deux à deux disjoints de telle sorte que leur réunion est mesurable. Or

$$\sum_k F_k = \bigcup_k E_k$$

puisque, si $x \in \bigcup_k E_k$, il existe un premier indice k_x tel que $x \in E_{k_x}$ et alors $x \in F_{k_x}$. C.Q.F.D.

Théorème 5 *Tout intervalle I est mesurable.*

Démonstration.

Considérons d'abord le cas où $I =]a, +\infty[$. Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble quelconque et soient $]a_k, b_k[$ des intervalles tels que

$$A \subseteq \bigcup_k \,]a_k, b_k[\ , \ \sum_k (b_k - a_k) \leq \lambda^*(A) + \epsilon.$$

Considérons les intervalles

$$I'_k = \,]a_k, b_k[\, \cap I \ , \ I''_k = \,]a_k, b_k[\, \cap I^c.$$

On a

$$\lambda^*(AI) \leq \lambda^* \left(\bigcup_k I'_k \right) \leq \sum_k \lambda^*(I'_k)$$

et

$$\lambda^*(AI^c) \leq \lambda^* \left(\bigcup_k I''_k \right) \leq \sum_k \lambda^*(I''_k)$$

donc

$$\lambda^*(AI) + \lambda^*(AI^c) \leq \sum_k (\lambda^*(I'_k) + \lambda^*(I''_k)) = \sum_k (b_k - a_k) \leq \lambda^*(A) + \epsilon.$$

Les autres cas se ramènent à celui qui vient d'être étudié. Par exemple,

$$]a, b[\, = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \,]a, b - \frac{1}{k}] = \bigcup_{k=1}^{+\infty} (\,]a, +\infty[\, \cap \,]b - \frac{1}{k}, +\infty[^c \,).$$

C.Q.F.D.

Théorème 6 *Tout ensemble ouvert O est mesurable.*

Démonstration.

Si $x \in O$, soient

$$a_x = \inf\{a \mid \,]a, x[\, \subseteq O\} \geq -\infty \ , \ b_x = \sup\{b \mid \,]x, b[\, \subseteq O\} \leq +\infty$$

et $I_x =]a_x, b_x[$. Alors, ou bien $I_x = I_y$ ou bien $I_x I_y = \emptyset$. Les intervalles I_x distincts sont donc au plus dénombrables (chacun d'eux contient un nombre rationnel différent). Dénotant ces intervalles par $J_1, J_2, J_3, \dots$, $O = \sum_n J_n$ peut s'écrire comme réunion d'une suite finie ou infinie d'intervalles ouverts deux à deux disjoints (appelés composantes connexes de O). C.Q.F.D.

Théorème 7 *Tout translaté $E + x_0$ d'un ensemble mesurable E est mesurable.*

Démonstration.

Observons d'abord les identités :

$$ST + x_0 = (S + x_0)(T + x_0) \ , \ (S + x_0)^c = S^c + x_0.$$

Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble quelconque. Alors, en vertu des identités précédentes,

$$A(E + x_0) = (A - x_0)E + x_0 \ , \ A(E + x_0)^c = (A - x_0)E^c + x_0.$$

Par suite, la mesure extérieure étant invariante sous translation,

$$\begin{aligned}\lambda^*(A(E + x_0)) + \lambda^*(A(E + x_0)^c) &= \lambda^*((A - x_0)E) + \lambda^*((A - x_0)E^c) \\ &= \lambda^*(A - x_0) = \lambda^*(A).\end{aligned}$$

C.Q.F.D.

Théorème 8 *Tout ensemble N de mesure extérieure nulle est mesurable.*

Démonstration.

Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble quelconque. On a

$$\lambda^*(AN) + \lambda^*(AN^c) = \lambda^*(AN^c) \leq \lambda^*(A).$$

C.Q.F.D.

2.3 Mesure

La **mesure** λ est la restriction de la mesure extérieure λ^* à la tribu des ensembles mesurables $\mathfrak{L}$.

Théorème 9 *La mesure $\lambda : \mathfrak{L} \to [0, +\infty]$ possède les propriétés suivantes :*

1. $\lambda(E + x_0) = \lambda(E)$;

2. $\lambda((a,b)) = b - a$ *;*

3. pour toute suite disjointe $\{E_k\}_k$, $\lambda(\sum_k E_k) = \sum_k \lambda(E_k)$ *;*

4. pour toute suite croissante $E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 \subseteq \cdots$,

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda(E_n) = \lambda\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k\right).$$

Démonstration.

Seule la quatrième propriété (continuité) n'a pas encore été démontrée. Considérons à nouveau les ensembles

$$F_1 = E_1\ ,\ F_2 = E_2E_1^c\ ,\ F_3 = E_3E_2^c\ ,\ldots,\ F_n = E_nE_{n-1}^c,\ \ldots$$

Ils sont disjoints et tels que, pour chaque n,

$$E_n = \sum_{k=1}^{n} F_k.$$

Par suite,

$$\lambda(E_n) = \sum_{k=1}^{n} \lambda(F_k)$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda(E_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda(F_k) = \lambda\left(\sum_{k=1}^{+\infty} F_k\right) = \lambda\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k\right).$$

C.Q.F.D.

Une propriété vraie partout sauf aux points d'un ensemble de mesure nulle est dite vraie **presque partout**. Par exemple, la fonction $\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}$ est égale à 0 presque partout. Un ensemble dénombrable est toujours de mesure nulle mais un ensemble peut être de mesure nulle sans être dénombrable. Ainsi en est-il de l'ensemble de Cantor.

Exemple. Soit K l'ensemble des points x de $[0,1]$ dont le développement triadique,

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{3^k}\ ,\ a_k \in \{0,1,2\},$$

ne contient que des 0 ou des 2. Lorsque deux développements sont possibles, on convient d'utiliser celui qui contient un nombre infini de 2 :

$$\frac{1}{3^n} = \frac{2}{3^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+2}} + \frac{2}{3^{n+3}} + \cdots$$

Contenant $2^{\mathbb{N}}$ points, l'ensemble K n'est pas dénombrable. D'autre part, il est clair que

$$[0,1]K^c =]\frac{1}{3},\frac{2}{3}[+]\frac{1}{9},\frac{2}{9}[+]\frac{7}{9},\frac{8}{9}[+]\frac{1}{27},\frac{2}{27}[+ \cdots$$

Par suite,

$$\lambda([0,1]K^c) = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \cdots = 1$$

et $\lambda(K) = 0$.

L'axiome du choix affirme que le produit cartésien $\prod_{\alpha\in A} B_\alpha$ d'une famille d'ensembles non vides B_α est non vide, c'est-à-dire qu'il est possible de choisir un élément x_α de chaque ensemble de la famille : $x_\alpha \in B_\alpha$ pour tout $\alpha \in A$. En l'utilisant, on peut obtenir un ensemble non mesurable.

Exemple. Introduisons une relation d'équivalence sur l'intervalle $[0,1]$ en posant, pour $x, y \in [0,1]$, $x \equiv y$ si $x - y \in \mathbb{Q}$. Choisissons, en vertu de l'axiome du choix, un nombre x dans chaque classe d'équivalence $[x]$. Alors, l'ensemble E des nombres ainsi obtenus n'est pas mesurable. Supposons en effet le contraire. Soit

$$\mathbb{Q} \ \cap\ [-1,+1]\ = \{r_1, r_2, r_3, \ldots\}$$

et considérons les ensembles translatés $E_k = E + r_k$. Ils sont disjoints car si $x \in E_k E_j$, $x = a + r_k = b + r_j$ avec $a, b \in E$. Comme

$$a = b + (r_j - r_k) \equiv b,$$

il faut que $a = b$, donc que $r_k = r_j$, c'est-à-dire que $k = j$. Les relations

$$[0,1]\ \subseteq \sum_{k=1}^{+\infty} E_k \subseteq\ [-1,2]$$

(chaque $x \in [0,1]$ appartient à $[x']$ pour un $x' \in E$ approprié, donc à E_k pour un k approprié) entraînent donc

$$1 \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda(E_k) \leq 3$$

ce qui est absurde puisque $\lambda(E_k) = \lambda(E)$ pour tout k.

2.4 Exercices

1. Montrer que tout recouvrement d'un ensemble $K \subseteq \mathbb{R}$ compact (fermé et borné) par des ensembles ouverts contient un sous-recouvrement fini.
2. Si $E \subseteq \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}$,
$$kE = \{y \mid y = kx \ , \ x \in E\}.$$
Montrer que $\lambda^*(kE) = |k|\lambda^*(E)$.
3. Soit $\mu^* : \mathfrak{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ la fonction définie par
$$\mu^*(E) = \sup\{(b - a) \mid]a, b[\subseteq E\}.$$
Cette fonction est-elle monotone ? invariante sous translation ? Préserve-t-elle la longueur des intervalles ? Est-elle sous-additive ?
4. Répondre aux mêmes questions si la fonction μ^* est définie par
$$\mu^*(E) = \mathrm{card}(E\mathbb{Z}).$$
5. Montrer que, si $E \subseteq \mathbb{R}$ est mesurable et $k \in \mathbb{R}$, l'ensemble kE est mesurable.
6. Montrer que tout ensemble mesurable borné est de mesure finie. La réciproque est-elle vraie ?
7. Un ensemble de mesure nulle peut-il être ouvert ? Doit-il être fermé ?
8. Soit $\epsilon > 0$ donné. Construire un ensemble ouvert E de mesure $\lambda(E) < \epsilon$ qui soit dense dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire tel que tout nombre réel puisse s'écrire comme la limite d'une suite de nombres appartenant à E).
9. Montrer qu'un ensemble $E \subseteq \mathbb{R}$ est mesurable si et seulement si à chaque $\epsilon > 0$ correspond un ensemble ouvert $O_\epsilon \subseteq \mathbb{R}$ tel que $E \subseteq O_\epsilon$ et que $\lambda^*(O_\epsilon E^c) < \epsilon$.
Suggestion : considérer d'abord le cas où $\lambda^*(E) < +\infty$ puis les ensembles $E_m = E\ ] - m, +m[$.
10. Montrer qu'un ensemble $E \subseteq \mathbb{R}$ est mesurable si et seulement si on peut l'écrire comme la réunion disjointe d'un ensemble de mesure nulle N et d'un ensemble qui est une réunion au plus dénombrable d'ensembles fermés F_k :
$$E = N + \bigcup_k F_k.$$

11. Soit $\mu : \mathfrak{L} \to [0, +\infty]$ une fonction additive. Montrer qu'elle est nécessairement croissante et sous-additive.
12. Soit $\mu : \mathfrak{L} \to [0, +\infty]$ la fonction définie par

$$\mu(E) = \begin{cases} +\infty & \text{si } E \text{ est infini} \\ \operatorname{card}(E) & \text{si } E \text{ est fini.} \end{cases}$$

Montrer que μ est additive et invariante sous translation.
13. Soit $\{E_k\}_k$ une suite décroissante,

$$E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \supseteq \cdots,$$

d'ensembles de mesure finie. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \lambda(E_n) = \lambda\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} E_k\right).$$

L'hypothèse « de mesure finie » est-elle essentielle ?
14. Une fonction $\mu : \mathfrak{L} \to [0, +\infty]$ possède la propriété d'additivité finie si, pour toute suite disjointe finie $\{E_k\}_{1 \leq k \leq N}$,

$$\mu\left(\sum_{k=1}^{N} E_k\right) = \sum_{k=1}^{N} \mu(E_k).$$

Montrer qu'une fonction

$$\mu : \mathfrak{L} \to [0, +\infty]$$

est additive si et seulement si elle continue et possède la propriété d'additivité finie.

3 FONCTIONS MESURABLES

Nous allons maintenant introduire la classe des fonctions mesurables, étudier ses principales propriétés et considérer quelques exemples.

Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est une **fonction mesurable** si, quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble

$$f^{-1}(\,]\alpha, +\infty[\,) = \{x \mid f(x) > \alpha\}$$

est mesurable. En particulier, le domaine de définition E de f doit lui-même être un ensemble mesurable puisque

$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \mid f(x) > -n\}.$$

En vertu des identités

$$\{x \mid f(x) < \alpha\} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \{x \mid f(x) > \alpha - \frac{1}{k}\}^c$$

et

$$\{x \mid f(x) > \alpha\} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \{x \mid f(x) < \alpha + \frac{1}{k}\}^c,$$

il revient au même de vérifier que les ensembles de type

$$\{x \mid f(x) < \alpha\}\ ,\ \{x \mid f(x) \leq \alpha\} \ \text{ ou } \ \{x \mid f(x) \geq \alpha\}$$

sont tous mesurables. L'image inverse d'un intervalle quelconque (c, d) par une fonction mesurable,

$$f^{-1}((c, d)),$$

est donc toujours un ensemble mesurable.

Exemple. Une fonction indicatrice $f = \mathbb{I}_E$, définie par

$$\mathbb{I}_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

est mesurable si et seulement si l'ensemble E l'est.

Théorème 10 *Toute fonction continue $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ est mesurable.*

Démonstration.

En vertu de la continuité de f, l'ensemble

$$\{x \mid f(x) > \alpha\}$$

est relativement ouvert dans (a,b) (c'est-à-dire de la forme $O \cap (a,b)$ avec O ouvert) donc mesurable. C.Q.F.D.

Théorème 11 *Soient $f,\ g : E \to \mathbb{R}$ des fonctions mesurables et $h : (a,b) \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors la fonction composée $h \circ f$ (si elle est définie) et les fonctions $f+g$ et fg sont mesurables.*

Démonstration.

L'ensemble

$$\{x \mid h(f(x)) > \alpha\} = f^{-1}(h^{-1}(\,]\alpha, +\infty[\,))$$

est mesurable parce que l'ensemble $h^{-1}(\,]\alpha, +\infty[\,)$ est relativement ouvert dans (a,b), donc de la forme

$$h^{-1}(\ ]\alpha, +\infty[\ ) = \sum_k \,]a_k, b_k[\, \cap (a,b),$$

ce qui entraîne que

$$f^{-1}(h^{-1}(\,]\alpha, +\infty[\,)) = \sum_k f^{-1}(\,]a_k, b_k[\, \cap (a,b)\,).$$

La fonction $f+g$ est mesurable en vertu de la relation

$$\{x \mid f(x) + g(x) > \alpha\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (\{x \mid f(x) > r\} \cap \{x \mid g(x) > \alpha - r\}).$$

Finalement, la relation

$$fg = \frac{(f+g)^2 - f^2 - g^2}{2}$$

et la continuité des fonctions $u \mapsto u^2$ et $u \mapsto cu, c \in \mathbb{R}$, entraînent la mesurablité de la fonction fg. C.Q.F.D.

Exemple. Une **fonction étagée** est une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont l'ensemble des valeurs est fini. Si

$$\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_N\}$$

est l'ensemble de ses valeurs non nulles et

$$E_k = f^{-1}(\{a_k\}) = \{x \mid f(x) = a_k\},$$

on a

$$f = \sum_{k=1}^{N} a_k \mathbb{I}_{E_k}$$

(représentation canonique). La fonction f est donc mesurable si et seulement si chacun des ensembles E_k l'est.

Exemple. Si une fonction mesurable $f : E \to \mathbb{R}$ ne s'annule pas, la fonction $1/f$ est mesurable.

Exemple. Si $f : E \to \mathbb{R}$ est mesurable, sa valeur absolue $|f|$, sa partie positive

$$f_+ = \frac{|f| + f}{2} = \sup\{f, 0\}$$

et sa partie négative

$$f_- = \frac{|f| - f}{2} = \sup\{-f, 0\}$$

le sont aussi et l'on a

$$f = f_+ - f_- \ , \ |f| = f_+ + f_-.$$

Exemple. Si $f, \ g : E \to \mathbb{R}$ sont mesurables, les fonctions

$$\sup\{f, g\} = \frac{(f+g) + |f-g|}{2}$$

et

$$\inf\{f, g\} = \frac{(f+g) - |f-g|}{2}$$

le sont aussi.

Théorème 12 *Soient $f_n : E \to \mathbb{R}$ des fonctions mesurables. Alors, sur leur domaine de définition respectif, les fonctions*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \ , \ \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n \ , \ \limsup_{n\to+\infty} f_n \ , \ \liminf_{n\to+\infty} f_n$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} f_n$$

sont mesurables.

Démonstration.

Considérons par exemple l'enveloppe supérieure $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$. Son domaine de définition est l'ensemble

$$\{x \mid \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) < +\infty\}.$$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble

$$\{x \mid \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) > \alpha\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \mid f_n(x) > \alpha\}$$

est mesurable. Le raisonnement est symétrique pour l'enveloppe inférieure $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$. Le théorème découle alors des relations

$$\limsup_{n\to+\infty} f_n = \lim_{k\to+\infty} \sup_{n\geq k} f_n = \inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{n\geq k} f_n$$

et

$$\liminf_{n\to+\infty} f_n = \lim_{k\to+\infty} \inf_{n\geq k} f_n = \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{n\geq k} f_n$$

sur les domaines de définition appropriés et des équations

$$\lim_{n\to+\infty} f_n = \limsup_{n\to+\infty} f_n = \liminf_{n\to+\infty} f_n$$

sur l'ensemble

$$\{x \mid \limsup_{n\to+\infty} f_n = \liminf_{n\to+\infty} f_n\}.$$

C.Q.F.D.

Théorème 13 *Soient $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable et $g : E \to \mathbb{R}$ une fonction coïncidant presque partout avec f. Alors g est mesurable.*

Démonstration.

L'ensemble

$$N = \{x \mid g(x) \neq f(x)\}$$

est de mesure nulle et

$$\{x \mid g(x) > \alpha\} = (\{x \mid g(x) > \alpha\} \cap N) + (\{x \mid f(x) > \alpha\} \cap N^c).$$

Le premier ensemble est mesurable parce que de mesure nulle et le second est mesurable parce que f l'est. C.Q.F.D.

Théorème 14 *Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive. Il existe une suite de fonctions mesurables positives étagées $\varphi_n : E \to \mathbb{R}$ qui croît vers f.*

Démonstration.

Considérons les ensembles

$$E_{n,k} = \{x \mid \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n}\}$$

et

$$F_n = \{x \mid n \leq f(x)\}.$$

Alors la fonction étagée

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \mathbb{I}_{E_{n,k}} + n \, \mathbb{I}_{F_n}$$

est mesurable. Puisque

$$E_{n,k} = E_{n+1,2k-1} + E_{n+1,2k}$$

et que

$$F_n = \sum_{k=n2^{n+1}+1}^{(n+1)2^{n+1}} E_{n+1,k} + F_{n+1},$$

on a

$$\varphi_n \leq \varphi_{n+1}.$$

D'autre part, en chaque point $x \in E$, on a, pour n assez grand, que

$$f(x) - \frac{1}{2^n} \leq \varphi_n(x) \leq f(x).$$

C.Q.F.D.

3.1 Exercices

1. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction. Montrer qu'elle est mesurable si et seulement si les ensembles

   $$\{x \mid f(x) > r\}$$

   le sont pour tout $r \in \mathbb{Q}$.

2. Vérifier les relations suivantes :

$$\mathbb{I}_{EF} = \mathbb{I}_E \mathbb{I}_F \ , \ \mathbb{I}_{E+F} = \mathbb{I}_E + \mathbb{I}_F \ , \ \mathbb{I}_{E\cup F} = \mathbb{I}_E + \mathbb{I}_F - \mathbb{I}_{EF} \ , \ \mathbb{I}_{\bigcup_n E_n} = \sup \mathbb{I}_{E_n}.$$

3. Soit $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ une fonction monotone. Montrer qu'elle est mesurable.
4. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable et $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $x \mapsto f(x + x_0)$ est mesurable.
5. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable et $k \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $x \mapsto f(kx)$ est mesurable.
6. Soit $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ une fonction admettant une primitive (c'est-à-dire telle qu'il existe une fonction $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ dont elle est la dérivée : $f = F'$). Montrer qu'elle est mesurable.
7. Soient $E \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble de mesure finie et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer qu'à chaque $\epsilon > 0$ correspond $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\lambda\{x \mid |f(x)| > N\} < \epsilon.$$

8. Montrer que toute fonction mesurable est limite simple d'une suite de fonctions mesurables étagées.
9. Montrer que toute fonction mesurable bornée est limite uniforme d'une suite de fonctions mesurables étagées.

4 INTÉGRATION

Ce chapitre constitue le coeur du cours. Nous allons y définir l'intégrale d'une fonction mesurable f sur un ensemble mesurable E,

$$\int_E f,$$

et établir ses trois propriétés fondamentales qui sont la linéarité, la positivité et l'additivité. Pour ce faire, nous utiliserons beaucoup le fait que l'équation

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n = \int_E \lim_{n\to+\infty} f_n$$

est valable sous des hypothèses très générales dans la théorie de Lebesgue (théorème de la convergence monotone, théorème de la convergence dominée et lemme de Fatou). Nous terminerons par un théorème justifiant la dérivation sous le signe intégral.

Soit $E \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble mesurable. L'intégrale sur E d'une fonction mesurable est définie en trois étapes.

Soit d'abord

$$\varphi = \sum_{k=1}^{N} a_k \mathbb{I}_{E_k}$$

une fonction mesurable positive étagée représentée sous sa forme canonique (c'est-à-dire que les a_k sont les valeurs distinctes non nulles de φ). L'intégrale de φ sur E est définie par l'équation

$$\int_E \varphi = \sum_{k=1}^{N} a_k \lambda(EE_k).$$

On a donc à priori que

$$0 \leq \int_E \varphi \leq +\infty.$$

Un moment de réflexion montre que l'équation

$$\int_E \varphi = \sum_{k=1}^{N'} a'_k \lambda(EE'_k)$$

est vraie dès que, dans une représentation

$$\varphi = \sum_{k=1}^{N'} a'_k \mathbb{I}_{E'_k},$$

les ensembles mesurables E'_k sont deux à deux disjoints, même si les a'_k associés ne sont pas tous distincts. En effet, chaque valeur non nulle a'_k est alors nécessairement égale à l'une des valeurs a_j, les ensembles E'_k correspondant à l'une de ces valeurs non nulle forment une partition de l'ensemble E_j correspondant et la mesure est additive.

Les trois propriétés suivantes sont des conséquences immédiates de la définition :

$$\lambda(E) = 0 \text{ implique } \int_E \varphi = 0,$$

$$F \subseteq E \text{ implique } \int_E \varphi \mathbb{I}_F = \int_F \varphi,$$

et

$$0 \leq \varphi \leq \psi \text{ sur } E \text{ implique } \int_E \varphi \leq \int_E \psi.$$

Pour vérifier la troisième, on s'aide de la remarque qui vient d'être faite : si

$$\varphi = \sum_{k=1}^{N'} a'_k \mathbb{I}_{E'_k} \text{ et } \psi = \sum_{j=1}^{M'} b'_j \mathbb{I}_{F'_j},$$

avec

$$\sum_{k=1}^{N'} E'_k = \sum_{j=1}^{M'} F'_j = \mathbb{R},$$

il faut utiliser les représentations

$$\varphi = \sum_{k=1}^{N'} \sum_{j=1}^{M'} a'_k \mathbb{I}_{E'_k F'_j} \text{ et } \psi = \sum_{k=1}^{N'} \sum_{j=1}^{M'} b'_j \mathbb{I}_{E'_k F'_j}.$$

Si ensuite $f : E \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable positive, son intégrale sur E est définie par

$$\int_E f = \sup \left\{ \int_E \varphi \mid 0 \leq \varphi \leq f \text{ sur } E \right\}.$$

Encore ici, on a à priori

$$0 \leq \int_E f \leq +\infty.$$

Les trois propriétés suivantes :

$$\lambda(E) = 0 \text{ implique } \int_E f = 0,$$

$$F \subseteq E \text{ implique } \int_E f\mathbb{I}_F = \int_F f,$$

et

$$0 \leq f \leq g \text{ sur } E \text{ implique } \int_E f \leq \int_E g$$

découlent directement de cette définition et des propriétés correspondantes pour les fonctions étagées.

Si enfin $f : E \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable quelconque, nous dirons qu'elle est une **fonction intégrable** (ou sommable) sur E si

$$\int_E |f| < +\infty$$

et nous poserons alors

$$\int_E f = \int_E f_+ - \int_E f_-.$$

Cette définition a un sens puisque qu'alors, nécessairement,

$$\int_E f_+ < +\infty \text{ et } \int_E f_- < +\infty.$$

Nous dénoterons par $\mathfrak{L}^1(E)$ la classe des fonctions intégrables sur E.

Remarque. Lorsque E est un intervalle $[a, b]$ avec $a \leq b$, on conserve la notation usuelle pour l'intégrale, en indiquant si nécessaire la variable d'intégration : on écrit ainsi

$$\int_{[a,b]} f = \int_a^b f = \int_a^b f(x)\ dx$$

et

$$\int_{\mathbb{R}} f = \int_{-\infty}^{+\infty} f = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx.$$

Exemple. La fonction $\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}$ est intégrable sur tout intervalle (a, b) et

$$\int_a^b \mathbb{I}_{\mathbb{Q}} = 0.$$

Exemple. Une fonction mesurable bornée est intégrable sur tout ensemble de mesure finie. En particulier, une fonction continue est intégrable sur tout intervalle compact.

Théorème 15 (convergence monotone) *Soient $E \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble mesurable et $f_n : E \to \mathbb{R}$ des fonctions mesurables positives qui croissent vers une fonction $f : E \to \mathbb{R}$. Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n = \int_E f.$$

Démonstration.

Il est clair que f est une fonction mesurable positive et que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n \leq \int_E f.$$

Pour démontrer l'inégalité réciproque, soient $\epsilon > 0$ et φ une fonction mesurable positive étagée telle que $\varphi \leq f$ et considérons les ensembles

$$A_n = \{x \mid f_n(x) \geq (1-\epsilon)\varphi(x)\}.$$

Ils sont mesurables et, par hypothèse, croissent vers E. Si

$$\varphi = \sum_{k=1}^{N} a_k \mathbb{I}_{E_k}$$

est la représentation canonique de φ, on a

$$\int_E f_n \geq \int_E (1-\epsilon)\varphi \mathbb{I}_{A_n} = \sum_{k=1}^{N} (1-\epsilon) a_k \lambda(A_n E_k) = (1-\epsilon) \sum_{k=1}^{N} a_k \lambda(A_n E_k).$$

Utilisant la continuité de la mesure, on en déduit

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n \geq (1-\epsilon) \sum_{k=1}^{N} a_k \lambda(E E_k) = (1-\epsilon) \int_E \varphi.$$

Le nombre ϵ et la fonction φ étant arbitraires, ceci entraîne le résultat. C.Q.F.D.

Remarque. Soient $E \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble mesurable et $f_n : E \to \mathbb{R}$ des fonctions mesurables positives qui croissent vers $+\infty$ sur E. Si $\lambda(E) > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n = +\infty.$$

En effet, posant

$$A_n = \{x \mid f_n(x) > K\},$$

on a, quel que soit $K > 0$,

$$\int_E f_n \geq \int_{A_n} f_n \geq K\lambda(A_n)$$

donc, par continuité,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n \geq K\lambda(E).$$

Le nombre $K > 0$ étant arbitraire, la remarque se trouve justifiée.

Exemple. Soit $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive bornée. Alors

$$\int_a^b f = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \lambda \left\{ x \mid \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n} \right\}.$$

Théorème 16 *Soient $E \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble mesurable, $f, g : E \to \mathbb{R}$ des fonctions intégrables sur E et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors $\alpha f + \beta g$ est intégrable sur E et*

$$\int_E \alpha f + \beta g = \alpha \int_E f + \beta \int_E g.$$

Démonstration.

La démonstration se fait en plusieurs étapes. Soient d'abord φ et ψ deux fonctions mesurables positives étagées. Représentons-les sous la forme

$$\varphi = \sum_{k=1}^{N'} a'_k \mathbb{I}_{E'_k} \ , \ \psi = \sum_{j=1}^{M'} b'_j \mathbb{I}_{F'_j}$$

les ensembles mesurables E'_k et F'_j étant tels que

$$\sum_{k=1}^{N'} E'_k = \sum_{j=1}^{M'} F'_j = \mathbb{R}.$$

Alors

$$\int_E \varphi + \int_E \psi = \sum_{k=1}^{N'} a'_k \lambda(E'_k) + \sum_{j=1}^{M'} b'_j \lambda(F'_j)$$

$$= \sum_{k=1}^{N'} \sum_{j=1}^{M'} a'_k \lambda(E'_k F'_j) + \sum_{k=1}^{N'} \sum_{j=1}^{M'} b'_j \lambda(E'_k F'_j)$$

$$= \sum_{k=1}^{N'} \sum_{j=1}^{M'} (a'_k + b'_j) \lambda(E'_k F'_j) = \int_E (\varphi + \psi).$$

Soient ensuite f et g deux fonctions mesurables positives. Il existe deux suites de fonctions mesurables positives étagées $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ qui croissent vers f et g respectivement. On a donc

$$\begin{aligned}\int_E f + \int_E g = \lim_{n\to+\infty}\int_E \varphi_n + \lim_{n\to+\infty}\int_E \psi_n = \lim_{n\to+\infty}(\int_E \varphi_n + \int_E \psi_n) \\ = \lim_{n\to+\infty}\int_E(\varphi_n+\psi_n) = \int_E(f+g)\end{aligned}$$

(en vertu du théorème de la convergence monotone).

Soient enfin f et g deux fonctions intégrables. Alors $h = f + g$ est intégrable puisque

$$\int_E |h| \leq \int_E (|f|+|g|) = \int_E |f| + \int_E |g| < +\infty.$$

De plus, on a

$$h_+ + f_- + g_- = f_+ + g_+ + h_-$$

donc

$$\int_E h_+ + \int_E f_- + \int_E g_- = \int_E f_+ + \int_E g_+ + \int_E h_-$$

c'est-à-dire

$$\int_E h = \int_E f + \int_E g.$$

D'autre part, si $\alpha \geq 0$, il est clair que

$$\int_E \alpha\ \varphi = \alpha \int_E \varphi$$

pour toute fonction mesurable positive étagée φ, donc que, pour toute fonction mesurable positive f,

$$\int_E \alpha f = \alpha \int_E f.$$

Pour une fonction intégrable f quelconque, αf est intégrable (en appliquant ce qui précède à $\alpha\ |f|$) et

$$\int_E \alpha f = \int_E (\alpha f)_+ - \int_E (\alpha f)_- = \int_E \alpha f_+ - \int_E \alpha f_- = \alpha(\int_E f_+ - \int_E f_-) = \alpha \int_E f.$$

Si, enfin, $\alpha < 0$, $\alpha f = (-\alpha)(-f)$ est intégrable et

$$\int_E \alpha f = \int_E (-\alpha)(-f) = (-\alpha)\int_E (-f) = (-\alpha)(\int_E f_- - \int_E f_+)$$
$$= \alpha(\int_E f_+ - \int_E f_-) = \alpha \int_E f.$$

C.Q.F.D.

Remarque. Si $E = A + B$ est une partition mesurable de E et f est intégrable sur E, on a

$$\int_E f = \int_A f + \int_B f$$

(additivité finie de l'intégrale) en appliquant le théorème précédent aux fonctions $f\mathbb{I}_A$ et $f\mathbb{I}_B$.

Théorème 17 *Soient $E \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble mesurable, $f, g : E \to \mathbb{R}$ des fonctions intégrables sur E telles que $f \leq g$ sur E. Alors*

$$\int_E f \leq \int_E g$$

avec égalité si et seulement si $f = g$ presque partout sur E.

Démonstration.

On a

$$0 \leq \int_E (g - f) = \int_E g - \int_E f.$$

L'égalité a lieu dès que $f = g$ presque partout sur E puisque, posant

$$A = \{x \mid f(x) = g(x)\}\ ,\ B = \{x \mid f(x) \neq g(x)\},$$

on a

$$\int_E (g - f) = \int_A (g - f) + \int_B (g - f) = 0.$$

Réciproquement, observons que si $h : E \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable positive telle que $\int_E h = 0$, on doit avoir $h = 0$ presque partout sur E (on prendra ici $h = g - f$). Posant en effet

$$A_k = \{x \mid h(x) > \frac{1}{k}\},$$

on a

$$0 = \int_E h \geq \int_E h\mathbb{I}_{A_k} \geq \frac{1}{k}\lambda(A_k)$$

de telle sorte que

$$\lambda(A_k) = 0$$

pour tout $k > 0$ et donc que

$$\lambda(\{x \mid h(x) > 0\}) = \lim_{k\to+\infty} \lambda(A_k) = 0.$$

C.Q.F.D.

Remarque. L'inégalité du triangle,

$$\left|\int_E g\right| \leq \int_E |g|,$$

s'obtient du théorème précédent en y choisissant $f = \pm g$.

On résume les deux théorèmes précédents en disant que $\mathfrak{L}^1(E)$ est un espace vectoriel réel sur lequel

$$f \mapsto \int_E f$$

est une forme linéaire positive. L'espace $\mathfrak{L}^1([a,b])$ contient l'espace $C([a,b])$ des fonctions continues.

Théorème 18 *Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt.$$

Alors, pour tout $x \in]a,b[$,

$$F'(x) = f(x).$$

Démonstration.

Les propriétés de linéarité, de positivité et d'additivité finie de l'intégrale entraînent que

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| \leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t)-f(x)|\ dt$$

si $h > 0$ et

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| \leq \frac{1}{|h|} \int_{x+h}^{x} |f(t) - f(x)| \, dt$$

si $h < 0$. Dans les deux cas,

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| \leq \sup_{|t-x| \leq |h|} |f(t) - f(x)|$$

ce qui permet de conclure. C.Q.F.D.

Remarque. Le théorème précédent montre que, pour une fonction f continue sur un intervalle compact $[a, b]$, l'intégrale de Lebesgue coïncide avec l'intégrale de Riemann et peut être évaluée au moyen du théorème fondamental du calcul : si F est une primitive quelconque de f (c'est-à-dire une fonction F telle que $F' = f$),

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Il faut cependant noter qu'il existe des fonctions continues telles que

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f \quad \text{existe}$$

bien que

$$\int_a^{+\infty} |f| = +\infty.$$

Une fonction à valeurs dans $[0, +\infty]$ apparaît dans le théorème suivant. La mesurabilité et l'intégrale d'une telle fonction sont définies exactement comme pour les fonctions positives (à valeur dans $[0, +\infty[$). Si l'ensemble E_∞ des points où elle est infinie est de mesure strictement positive, son intégrale est aussi infinie alors que si cet ensemble est de mesure nulle, l'intégrale peut être finie ou infinie. On peut alors redéfinir la fonction sur l'ensemble E_∞ (en la posant égale à 0 par exemple) sans modification substantielle de ses autres propriétés. Comme nous l'avons remarqué, le théorème de la convergence monotone reste valable si la fonction limite est à valeurs dans $[0, +\infty]$.

Théorème 19 (Fatou) *Soient $E \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble mesurable et $f_n : E \to \mathbb{R}$ des fonctions mesurables positives. Alors*

$$\int_E \liminf_{n\to+\infty} f_n \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_E f_n.$$

Démonstration.

Les fonctions $g_n : E \to \mathbb{R}$ définies par les relations

$$g_n = \inf_{k\geq n} f_k$$

forment une suite croissante de fonctions mesurables positives telle que

$$g_n \leq f_n.$$

D'où

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E g_n \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_E f_n.$$

En vertu du théorème de la convergence monotone,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E g_n = \int_E \lim_{n\to+\infty} g_n = \int_E \liminf_{n\to+\infty} f_n$$

ce qui termine la démonstration. C.Q.F.D.

Remarque. En vertu du lemme de Fatou, pour montrer que

$$\liminf_{n\to+\infty} f_n < +\infty$$

presque partout sur E, il suffit de montrer que

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_E f_n < +\infty.$$

Théorème 20 (convergence dominée) *Soient $E \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble mesurable et $f_n : E \to \mathbb{R}$ des fonctions intégrables qui convergent vers une fonction $f : E \to \mathbb{R}$. Supposons qu'il existe une fonction intégrable $g : E \to \mathbb{R}$ telle que $|f_n(x)| \leq g(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in E$. Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n = \int_E f.$$

Démonstration.

On a $|f| \leq g$ et la fonction f est intégrable. Appliquons le lemme de Fatou aux fonctions $2g - |f - f_n|$. On obtient

$$\begin{aligned} \int_E 2g &= \int_E \liminf_{n\to+\infty} (2g - |f - f_n|) \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_E (2g - |f - f_n|) \\ &= \liminf_{n\to+\infty} (\int_E 2g - \int_E |f - f_n|) = \int_E 2g - \limsup_{n\to+\infty} \int_E |f - f_n|. \end{aligned}$$

Ceci implique

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E |f - f_n| = 0$$

et, à fortiori,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n = \int_E f.$$

C.Q.F.D.

Théorème 21 *Soient $f_k : E \to \mathbb{R}$ des fonctions mesurables telles que la série $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k$ converge sur E. Alors*

$$\int_E \sum_{k=1}^{+\infty} f_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_E f_k$$

pourvu que les fonctions f_k soient positives sur E ou pourvu que la série $\sum_{k=1}^{+\infty} |f_k|$ converge et que sa somme soit intégrable sur E.

Démonstration.

On a

$$\begin{aligned} \int_E \sum_{k=1}^{+\infty} f_k &= \int_E \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k = \lim_{n\to+\infty} \int_E \sum_{k=1}^{n} f_k \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_E f_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_E f_k, \end{aligned}$$

la permutation de la limite et de l'intégrale étant justifiée par le théorème de la convergence monotone lorsque les fonctions f_k sont positives et par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue lorsque la série $\sum_{k=1}^{+\infty} |f_k|$ converge vers une fonction intégrable : le rôle des fonctions f_n dans ce théorème est ici joué par les sommes partielles $\sum_{k=1}^{n} f_k$,

$$f_n \longrightarrow \sum_{k=1}^{n} f_k,$$

et celui de la fonction g par la somme $\sum_{k=1}^{+\infty} |f_k|$:

$$g \longrightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} |f_k|.$$

C.Q.F.D.

Remarque. Soient $A_k \subseteq \mathbb{R}$ des ensembles mesurables deux à deux disjoints et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Alors

$$\int_{\sum_{k=1}^{+\infty} A_k} f = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{A_k} f$$

pourvu que f soit positive sur $\sum_{k=1}^{+\infty} A_k$ ou pourvu que f soit intégrable sur $\sum_{k=1}^{+\infty} A_k$ (additivité de l'intégrale). Ceci suit en effet du théorème précédent en l'appliquant à l'ensemble $E = \mathbb{R}$ et aux fonctions $f_k = f\ \mathbb{I}_{A_k}$.

Théorème 22 *Soit* $f : [a,b] \times (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ *une fonction admettant une dérivée partielle par rapport à son deuxième argument. Supposons que les fonctions*

$$x \mapsto f(x,t) \quad \text{et} \quad x \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$$

soient intégrables pour chaque $t \in (\alpha, \beta)$, *que la fonction*

$$t \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$$

soit continue pour chaque $x \in [a,b]$ *et supposons enfin que la fonction*

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$$

soit bornée sur $[a,b] \times (\alpha, \beta)$. *Alors*

$$\frac{d}{dt} \int_a^b f(x,t)\ dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\ dx.$$

Démonstration.

En vertu du théorème des accroissements finis, il existe pour chaque $x \in [a,b]$ un nombre $\theta_x(t) \in [0,1]$ tel que

$$\int_a^b \frac{f(x,t+h) - f(x,t)}{h}\ dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t + \theta_x(t)h)\ dx.$$

Puisque

$$\lim_{h\to 0} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t + \theta_x(t)h) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$$

et puisque qu'il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t + \theta_x(t)h) \right| \leq K,$$

le théorème de la convergence dominée (qui reste valable même si h approche 0 de façon continue) implique

$$\frac{d}{dt} \int_a^b f(x, t)\ dx = \lim_{h\to 0} \int_a^b \frac{f(x, t+h) - f(x, t)}{h}\ dx$$

$$= \lim_{h\to 0} \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t + \theta_x(t)h)\ dx = \int_a^b \lim_{h\to 0} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t + \theta_x(t)h)\ dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\ dx.$$

C.Q.F.D.

4.1 Exercices

1. Soit $f \in \mathfrak{L}^1(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x + x_0)$ est intégrable et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x + x_0)\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx.$$

2. Soit $f \in \mathfrak{L}^1(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, la fonction $x \mapsto f(kx)$ est intégrable et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(kx)\ dx = \frac{1}{|k|} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx.$$

3. Soit $f \in \mathfrak{L}^1(E)$. Montrer que, quel que soit $\epsilon > 0$, on peut trouver une fonction mesurable étagée φ telle que

$$\int_E |f - \varphi| < \epsilon.$$

4. Soient $f \in \mathfrak{L}^1(E)$ et $g : E \to \mathbb{R}$ une fonction coïncidant presque partout avec f. Montrer que $g \in \mathfrak{L}^1(E)$ et que $\int_E g = \int_E f$.
5. Obtenir la propriété de continuité de la mesure à partir du théorème de la convergence monotone.

6. Déduire le théorème de la convergence monotone du lemme de Fatou.
7. Montrer que l'on peut avoir inégalité stricte dans le lemme de Fatou.
8. Le lemme de Fatou reste-t-il vrai si on y remplace lim inf par lim sup ?
9. Soit
$$f_n(x) = ne^{-n|x|}.$$
Vérifier que, pour tout $x \neq 0$,
$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0.$$
Calculer ensuite
$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\ dx.$$
10. Vérifier que les fonctions
$$f_n = \frac{1}{n}\ \mathbb{I}_{[0,n^2]}$$
convergent vers 0 uniformément sur l'axe réel. Calculer ensuite
$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n.$$
11. Soit $f \in \mathfrak{L}^1(\mathbb{R})$. Montrer que
$$\lim_{n \to +\infty} \int_{|x|>n} f = 0.$$
12. Soit $f \in \mathfrak{L}^1(\mathbb{R})$. Est-il nécessairement vrai que
$$\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = 0?$$
13. Soit $f \in \mathfrak{L}^1(\mathbb{R})$. Déterminer
$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin^n x\ dx.$$
14. Calculer
$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\ dx.$$

15. Montrer que

$$\lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{\sin x}{x}\,dx \quad \text{existe}$$

puis vérifier que

$$\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\,dx = +\infty.$$

Suggestion. Pour la première partie de la question, intégrer par parties.

16. Soient $f_n : E \to \mathbb{R}$ des fonctions mesurables positives qui décroissent vers une fonction $f : E \to \mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_E f_n = \int_E f$$

pourvu que f_1 soit intégrable. Cette dernière condition est-elle indispensable ?

17. Soient $f_n : E \to \mathbb{R}$ des fonctions intégrables qui croissent vers une fonction $f : E \to \mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_E f_n = \int_E f$$

pourvu qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que

$$\int_E f_n \le K$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

18. Soient $f_n : E \to \mathbb{R}$ des fonctions mesurables positives qui convergent vers une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ de telle sorte que $f_n \le f$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_E f_n = \int_E f.$$

19. Soient $f_n : E \to \mathbb{R}$ des fonctions intégrables telles que $|f_n| \le g$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ où la fonction $g : E \to \mathbb{R}$ est intégrable. Montrer qu'alors

$$\int_E \liminf_{n\to+\infty} f_n \le \liminf_{n\to+\infty}\int_E f_n \le \limsup_{n\to+\infty}\int_E f_n \le \int_E \limsup_{n\to+\infty} f_n.$$

20. Soient $f_n : E \to \mathbb{R}$ des fonctions mesurables qui convergent vers une fonction $f : E \to \mathbb{R}$, $g_n : E \to \mathbb{R}$ des fonctions intégrables qui

convergent vers une fonction intégrable $g : E \to \mathbb{R}$ et supposons que $|f_n| \leq g_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que dans ce cas

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n = \int_E f \quad \text{pourvu que} \quad \lim_{n\to+\infty} \int_E g_n = \int_E g.$$

Suggestion : considérer les fonctions $g + g_n - |f - f_n|$.

21. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1}\, dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

22. Montrer que, quel que soit $t > 0$, la fonction $x \mapsto e^{-x}x^{t-1}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

23. Justifier la dérivation sous le signe intégral :

$$\frac{d}{dt} \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{t-1}\, dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{t-1} \log x\, dx.$$

5 ESPACES DE LEBESGUE

Nous allons maintenant obtenir des propriétés supplémentaires des fonctions intégrables considérées dans leur ensemble, en tant qu'espaces vectoriels. Nous démontrerons les inégalités de Hölder et de Minkowski, introduirons la notion de convergence en moyenne et étudierons un théorème d'approximation.

Soient $E \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble mesurable. Les **espaces de Lebesgue** $\mathfrak{L}^p(E)$ sont définis de la façon suivante. Si $f : E \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable et $0 < p < +\infty$, on pose

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p\right)^{1/p}$$

et

$$\mathfrak{L}^p(E) = \{f \mid \|f\|_p < +\infty\}$$

désigne la classe des fonctions mesurables de p$^{\text{ième}}$puissance intégrable sur E. L'espace $\mathfrak{L}^\infty(E)$ quant à lui désigne la classe des fonctions mesurables essentiellement bornées sur E, c'est-à-dire qui sont bornées presque partout sur E. Si $f \in \mathfrak{L}^\infty(E)$, il existe un ensemble $F \subseteq E$ tel que $\lambda(EF^c) = 0$ et

$$\|f\|_F = \sup_{x \in F} |f(x)| < +\infty.$$

Ces nombres $\|f\|_F$ majorant f presque partout sur E forment un intervalle $(\,\|f\|_\infty, +\infty[$. Cet intervalle est fermé à gauche. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|f(x)| < \|f\|_\infty + \frac{1}{n} \text{ sur } F_n \text{ avec } \lambda(EF_n^c) = 0.$$

Donc

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty \text{ sur } \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \text{ avec } \lambda\left(E\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n\right)^c\right) = 0.$$

Le nombre $\|f\|_\infty$ est la **borne supérieure essentielle** de f sur E.

Exemple. L'espace $C([a,b])$ des fonctions continues est un sous-espace de $\mathfrak{L}^p([a,b])$ pour tout $0 < p \leq +\infty$ et si $f \in C([a,b])$, $\|f\|_\infty = \sup_{a\leq x\leq b} |f(x)|$.

L'étude des espaces de Lebesgue s'appuie sur la notion de convexité. Une fonction $\phi : (a,b) \to \mathbb{R}$ est une **fonction convexe** si, quels que soient $x_1, x_2 \in (a,b)$ et quel que soit $\alpha \in]0,1[$, on a

$$\phi(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha\phi(x_1) + (1-\alpha)\phi(x_2).$$

Lorsque l'inégalité est renversée, la fonction est dite **concave**.

Théorème 23 *Soit $\phi : (a,b) \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Elle est convexe si et seulement si sa dérivée est croissante.*

Démonstration.

La condition est nécessaire. Soient $x_1 < x_2$. Si $x_1 < x < x_2$, on peut écrire
$$x = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} x_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} x_2$$
de telle sorte que
$$\phi(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \phi(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \phi(x_2).$$
Donc
$$\frac{\phi(x) - \phi(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{\phi(x_2) - \phi(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{\phi(x_2) - \phi(x)}{x_2 - x}$$
et, en passant à la limite,
$$\phi'(x_1) \leq \frac{\phi(x_2) - \phi(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \phi'(x_2).$$

La condition est suffisante. Soient $x_1 < x < x_2$. L'inégalité à vérifier,
$$\phi(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \phi(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \phi(x_2),$$
est équivalente à l'inégalité
$$\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} (\phi(x) - \phi(x_1)) \leq \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} (\phi(x_2) - \phi(x)).$$
Or, en vertu du théorème des accroissements finis, il existe $t_1 \in]x_1, x[$ et $t_2 \in]x, x_2[$ tels que
$$\phi(x) - \phi(x_1) = \phi'(t_1)(x - x_1) \ , \ \phi(x_2) - \phi(x) = \phi'(t_2)(x_2 - x).$$
Puisque $t_1 < x < t_2$, on a $\phi'(t_1) \leq \phi'(t_2)$. C.Q.F.D.

Théorème 24 (Hölder) *Si $f \in \mathfrak{L}^p(E)$ et $g \in \mathfrak{L}^q(E)$ où $p, q \in [1, +\infty]$ sont conjugués, c'est-à-dire tels que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

alors $fg \in \mathfrak{L}^1(E)$ et

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

avec égalité lorsque $1 < p < +\infty$ si et seulement si le rapport $|f|^p/|g|^q$ est constant presque partout sur E.

Démonstration.

Si $p = 1$, l'inégalité

$$|f(x)g(x)| \leq |f(x)| \|g\|_\infty$$

est valable presque partout sur E donc la fonction fg est intégrable et

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$

Si $1 < p < +\infty$, nous pouvons supposer que $\|f\|_p > 0$ et que $\|g\|_q > 0$ puisqu'autrement $fg = 0$ presque partout sur E. Choisissons

$$x_1 = \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\right)^p \;,\; x_2 = \left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_q}\right)^q \;,\; \alpha = \frac{1}{p}$$

dans l'inégalité suivante (qui résulte de la concavité du logarithme) :

$$x_1^\alpha x_2^{1-\alpha} \leq \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2$$

puis intégrons. Nous obtenons d'abord

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{1}{p}\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_q}\right)^q$$

puis

$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

La discussion du cas d'égalité est laissée en exercice (exercice 4, page 50). C.Q.F.D.

Lorsque $\lambda(E) < +\infty$,

$$p < q \text{ implique } \mathfrak{L}^q(E) \subseteq \mathfrak{L}^p(E)$$

puisqu'alors
$$\|f\|_p \leq \|f\|_q(\lambda(E))^{1/p-1/q}.$$
En particulier, on a
$$C([a,b]) \subseteq \mathfrak{L}^\infty([a,b]) \subseteq \mathfrak{L}^2([a,b]) \subseteq \mathfrak{L}^1([a,b]).$$
Si $p = 2$, $q = 2$ lui aussi et si l'on pose
$$< f, g > = \int_E fg,$$
l'inégalité de Hölder s'écrit
$$| < f, g > | \leq \|f\|_2 \|g\|_2$$
(c'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales).

Théorème 25 (Minkowski) *Soit* $1 \leq p \leq +\infty$. *Si* $f, g \in \mathfrak{L}^p(E)$, *alors* $f + g \in \mathfrak{L}^p(E)$ *et*
$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$
avec égalité lorsque $1 < p < +\infty$ *si et seulement si le rapport* f/g *est égal à une constante positive presque partout sur* E.

Démonstration.

Si $p = 1$, l'inégalité $|f(x)+g(x)| \leq |f(x)|+|g(x)|$ entraîne, par intégration,
$$\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1.$$
Si $p = +\infty$, l'inégalité $|f(x)+g(x)| \leq \|f\|_\infty+\|g\|_\infty$ qui est vraie presque partout sur E entraîne l'inégalité
$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$
Si, enfin, $1 < p < +\infty$, l'inégalité
$$|f(x) + g(x)|^p \leq 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p)$$
montre que $f + g \in \mathfrak{L}^p(E)$. De plus, en vertu de l'inégalité de Hölder,
$$\begin{aligned}\int_E |f + g|^p &\leq \int_E |f + g|^{p-1}|f| + \int_E |f + g|^{p-1}|g| \\ &\leq \left(\int_E |f + g|^p\right)^{1-1/p} (\|f\|_p + \|g\|_p)\end{aligned}$$

de telle sorte que
$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$
La discussion du cas d'égalité est laissée en exercice (exercice 10, page 50).
C.Q.F.D.

On dit que les fonctions $f_n \in \mathfrak{L}^p(E)$ convergent au sens de $\mathfrak{L}^p(E)$ vers une fonction $f \in \mathfrak{L}^p(E)$ si
$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$
(Lorsque $1 \leq p < +\infty$, on parle souvent de convergence en moyenne d'ordre p et lorsque $p = +\infty$ de convergence presqu'uniforme.)

Théorème 26 (Riesz-Fischer) *Soit* $1 \leq p \leq +\infty$. *Une condition nécessaire et suffisante pour que les fonctions* $f_n \in \mathfrak{L}^p(E)$ *admettent une limite au sens de* $\mathfrak{L}^p(E)$ *est que*
$$\lim_{m,n\to+\infty} \|f_m - f_n\|_p = 0.$$
Démonstration.

La condition est nécessaire. Si en effet les fonctions f_n convergent vers une fonction $f \in \mathfrak{L}^p(E)$ au sens de $\mathfrak{L}^p(E)$, à chaque $\epsilon > 0$ correspond un indice n_ϵ tel que
$$\|f_m - f_n\|_p \leq \|f_m - f\|_p + \|f - f_n\|_p < 2\epsilon$$
dès que $m, n \geq n_\epsilon$.

La condition est suffisante.

Considérons d'abord le cas où $p = +\infty$. Il existe des ensembles $F_{m,n} \subseteq E$ tels que
$$\|f_m - f_n\|_\infty = \sup_{x\in F_{m,n}} |f_m(x) - f_n(x)| \ \text{ et } \ \lambda(EF_{m,n}^c) = 0.$$
Posons
$$F = \bigcap_{m,n\in\mathbb{N}} F_{m,n}.$$
Alors $\lambda(EF^c) = 0$ et, quels que soient $m, n \in \mathbb{N}$,
$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \|f_m - f_n\|_\infty \ \text{ si } \ x \in F$$

de telle sorte que, en vertu du critère de Cauchy,

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) \;\text{ existe si }\; x \in F.$$

La fonction $f : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) & \text{si } x \in F \\ 0 & \text{si } x \in EF^c \end{cases}$$

est mesurable. De plus, si $x \in F$,

$$|f(x) - f_n(x)| = \lim_{m\to+\infty} |f_m(x) - f_n(x)| \leq \lim_{m\to+\infty} \|f_m - f_n\|_\infty \leq \epsilon$$

dès que $n \geq n_\epsilon$. Ceci montre que $f \in \mathfrak{L}^\infty(E)$ et que

$$\lim_{n\to+\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0.$$

Envisageons maintenant le cas où $1 \leq p < +\infty$. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, il existe un indice n_k tel que

$$\|f_m - f_n\|_p^p \leq \frac{1}{3^k} \;\text{ dès que }\; m, n \geq n_k.$$

En particulier, les indices $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ sont tels que

$$\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_p^p \leq \frac{1}{3^k}.$$

Considérons la suite partielle $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et vérifions qu'elle converge presque partout sur E ou, ce qui revient au même, que la série

$$f_{n_1} + \sum_{k=1}^{+\infty} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$$

converge presque partout sur E. Cette série converge même absolument presque partout sur E. Soit en effet

$$A_k = \{x \mid |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|^p \geq \frac{1}{2^k}\}.$$

Alors

$$\lambda(A_k) \leq \int_{A_k} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|^p \, 2^k \leq \|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_p^p \, 2^k \leq \frac{2^k}{3^k}$$

de telle sorte que

$$\lambda\left(\bigcup_{k\geq N} A_k\right) \leq \sum_{k\geq N} \frac{2^k}{3^k} = 3\ \frac{2^N}{3^N}.$$

Si $x \notin \bigcup_{k\geq N} A_k$,

$$|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| < \frac{1}{2^{k/p}}$$

pour tout $k \geq N$ et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| < +\infty.$$

La série est donc absolument convergente sur le complémentaire d'un ensemble de mesure arbitrairement petite. Elle converge presque partout. Désignons par F l'ensemble où la suite partielle converge et considérons la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{k\to+\infty} f_{n_k}(x) & \text{si } x \in F \\ 0 & \text{si } x \in EF^c. \end{cases}$$

Elle est mesurable et, en vertu du lemme de Fatou,

$$\int_E |f - f_{n_k}|^p \leq \liminf_{j\to+\infty} \int_E |f_{n_j} - f_{n_k}|^p$$

ce qui montre que $f \in \mathfrak{L}^p(E)$ et que les fonctions f_{n_k} convergent en moyenne d'ordre p vers f. Finalement, l'inégalité

$$\|f - f_n\|_p \leq \|f - f_{n_k}\|_p + \|f_{n_k} - f_n\|_p$$

implique que la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ toute entière converge en moyenne d'ordre p vers f. C.Q.F.D.

Remarque. Le raisonnement précédent a de plus montré que toute suite de fonctions $f_n \in \mathfrak{L}^p(E)$ qui converge au sens de $\mathfrak{L}^p(E)$ vers une fonction $f \in \mathfrak{L}^p(E)$ contient une suite partielle qui converge aussi presque partout vers f.

Dans le théorème suivant, le **support** $\text{supp}(f)$ d'une fonction f désigne le plus petit ensemble fermé à l'extérieur duquel elle s'annule. $C_c^\infty(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ indéfiniment dérivables à support compact (dites souvent fonctions de test).

Théorème 27 *Soit $1 \leq p < +\infty$. Alors la classe $C_c^\infty(\mathbb{R})$ des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ indéfiniment dérivables à support compact est dense dans $\mathfrak{L}^p(\mathbb{R})$.*

Démonstration.

Il s'agit de montrer qu'à chaque fonction $f \in \mathfrak{L}^p(\mathbb{R})$ et à chaque $\epsilon > 0$ correspond une fonction $g_{f,\epsilon} \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$\|f - g_{f,\epsilon}\|_p < \epsilon.$$

La démonstration se fait en plusieurs étapes.

Observons d'abord que $f \in \mathfrak{L}^p(\mathbb{R})$ si et seulement si $f_+, f_- \in \mathfrak{L}^p(\mathbb{R})$. La relation

$$\|f - (g_{f_+,\epsilon} - g_{f_-,\epsilon})\|_p \leq \|f_+ - g_{f_+,\epsilon}\|_p + \|f_- - g_{f_-,\epsilon}\|_p$$

montre qu'il suffit de d'établir l'énoncé pour une fonction de $f \in \mathfrak{L}^p(\mathbb{R})$ positive.

Il existe alors une suite de fonctions mesurables positives étagées φ_n qui croissent vers f et, en vertu des relations

$$|f - \varphi_n|^p = (f - \varphi_n)^p \leq f^p$$

et du théorème de Lebesgue sur la convergence dominée,

$$\lim_{n \to +\infty} \|f - \varphi_n\|_p = 0.$$

Il suffit donc de démontrer l'énoncé pour une fonction de $\mathfrak{L}^p(\mathbb{R})$ positive étagée.

Une telle fonction admettant une représentation du type $\sum_{k=1}^N a_k \mathbb{I}_{E_k}$ où $\lambda(E_k) < +\infty$ pour $1 \leq k \leq N$, il suffit de démontrer l'énoncé pour la fonction indicatrice d'un ensemble mesurable de mesure finie.

A un tel ensemble E et à chaque $\epsilon > 0$ correspond un ensemble ouvert O qui contient E et qui est tel que

$$\lambda(E) < \lambda(O) < \lambda(E) + \epsilon$$

de telle sorte que

$$\|\mathbb{I}_E - \mathbb{I}_O\|_p^p = \lambda(OE^c) < \epsilon.$$

Il suffit donc de démontrer l'énoncé pour la fonction indicatrice d'un ensemble ouvert de mesure finie.

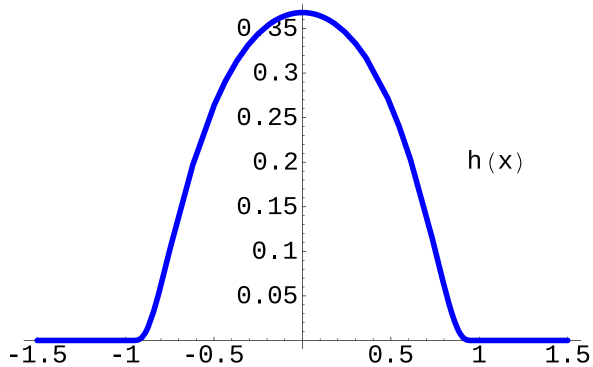

FIG. 1 – Une fonction de test

Puisqu'un tel ensemble O admet une représentation $O = \sum_k I_k$ où les intervalles ouverts I_k sont de mesure finie et puisqu'alors

$$\|\mathbb{I}_O - \sum_{k=1}^{N} \mathbb{I}_{I_k}\|_p^p = \sum_{k=N+1}^{+\infty} \lambda(I_k) < \epsilon$$

dès que N est assez grand, il suffit de démontrer l'énoncé pour la fonction indicatrice d'un intervalle ouvert de mesure finie $]a, b[$.

Pour ce faire, introduisons la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = e^{-1/(1-x^2)} \, \mathbb{I}_{]-1,+1[}(x).$$

(Figure 1). On vérifie par récurrence sur n que

$$h^{(n)}(x) = h(x) \frac{p_n(x)}{(1-x^2)^{2n}}$$

où $p_n(x)$ est un polynôme en x, ce qui montre que $h \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ et que supp(h)$= [-1, +1]$. Soit

$$H = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) \, dx.$$

Considérons le produit de convolution

$$g_\delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}_{]a,b[}(y) \, \frac{1}{H} \, h\left(\frac{x-y}{\delta}\right) \frac{dy}{\delta} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}_{]a,b[}(x - z\delta) \, \frac{1}{H} \, h(z) \, dz.$$

Dans la première expression, la dérivation sous le signe intégral est aisément justifiée et montre que $g_\delta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ avec supp(g_δ)$=$ $[a-\delta, b+\delta]$. Dans la deuxième expression, le théorème de la convergence dominée permet de passer la limite sous le signe intégral et entraîne que

$$\lim_{\delta\to 0} g_\delta(x) = \mathbb{I}_{]a,b[}(x).$$

Enfin, la relation

$$|g_\delta(x) - \mathbb{I}_{]a,b[}(x)| \leq 2\ \mathbb{I}_{[a-1,b+1]}(x)$$

(qui est valable dès que $\delta < 1$) implique, toujours par convergence dominée, que

$$\lim_{\delta\to 0} \|g_\delta - \mathbb{I}_{]a,b[}\|_p = 0.$$

C.Q.F.D.

Introduisons sur l'espace $\mathfrak{L}^p(E)$ une relation d'équivalence en posant

$$f \equiv g \ \text{ si } \ f = g \ \text{ presque partout sur } \ E$$

et désignons par $\mathbb{L}^p(E)$ l'espace des classes d'équivalence $[f]$. On en fait un espace vectoriel réel en posant

$$[f] + [g] = [f+g]\ ,\ \alpha[f] = [\alpha f].$$

Ces définitions sont justifiées car si $f \equiv f_1$ et $g \equiv g_1$, alors $f + g \equiv f_1 + g_1$ puisque

$$\{x \mid f_1(x) + g_1(x) \neq f(x) + g(x)\} \subseteq \{x \mid f_1(x) \neq f(x)\} \cup \{x \mid g_1(x) \neq g(x)\}.$$

L'espace $\mathbb{L}^p(E)$ devient un espace vectoriel normé si l'on pose

$$\|\,[f]\,\|_p = \|f\|_p.$$

La fonction $[f] \mapsto \|\,[f]\,\|_p$ satisfait en effet les trois conditions que doit remplir une norme sur un espace vectoriel réel, à savoir

1. $\|\,[f]\,\|_p = 0$ si et seulement si $[f] = 0$,

2. $\|\,\alpha[f]\,\|_p = |\alpha|\,\|\,[f]\,\|_p$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

3. $\|\,[f] + [g]\,\|_p \leq \|\,[f]\,\|_p + \|\,[g]\,\|_p$.

(Le passage aux classes d'équivalence a pour but d'avoir $\| [f] \|_p = 0$ si et seulement si $[f] = 0$).

Le théorème de Riesz-Fischer affirme alors que l'espace $\mathbb{L}^p(E)$ est complet : le critère de Cauchy y est une condition nécessaire et suffisant pour la convergence. (Un espace vectoriel normé complet est généralement appelé **espace de Banach**.) Si $p = 2$, nous avons affaire à un **espace de Hilbert** car la norme provient d'un produit scalaire

$$< [f], [g] >=< f, g > .$$

La fonction $([f], [g]) \mapsto < [f], [g] >$ a effectivement toutes les propriétés requises d'un produit scalaire sur un espace vectoriel réel :

1. $< [f], [f] > \geq 0$ avec égalité si et seulement si $[f] = 0$,

2. $< [f], [g] >=< [g], [f] >$,

3. $< \alpha_1 [f_1] + \alpha_2 [f_2], [g] >= \alpha_1 < [f_1], [g] > + \alpha_2 < [f_2], [g] >$.

Pour $1 \leq p < +\infty$, le théorème d'approximation exprime que les espaces $\mathbb{L}^p([a, b])$ constituent la complétion métrique de l'espace $C([a, b])$ relativement à la distance $\|f - g\|_p$: en particulier, les fonctions continues sont denses dans l'espace des fonctions intégrables. (Une fonction $f \in \mathfrak{L}^p([a, b])$ peut toujours être considérée comme une fonction dans $\mathfrak{L}^p(\mathbb{R})$ en la prolongeant par 0 à l'extérieur de l'intervalle $[a, b]$.)

5.1 Exercices

1. Soit $\phi : (a, b) \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer par récurrence sur n que, quels que soient $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a, b)$ et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in]0, 1[$ tels que $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$, on a

$$\phi\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \phi(x_k)$$

(Inégalité de Jensen).

2. Obtenir l'inégalité entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique de n nombres positifs $a_1, a_2, \ldots, a_n$,

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

en y précisant les conditions d'égalité.

3. Soit $\phi : (a, b) \to \mathbb{R}$ une fonction convexe dérivable. Montrer que son graphe $y = \phi(x)$ est entièrement situé au-dessus de n'importe laquelle de ses tangentes $y = \phi(x_0) + \phi'(x_0)(x - x_0)$.
4. Discuter le cas d'égalité dans l'inégalité de Hölder (lorsque $1 < p < +\infty$).
5. Soient $1 < p, q, r < +\infty$ des nombres tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$$

et

$$f \in \mathfrak{L}^p(\mathbb{R}), g \in \mathfrak{L}^q(\mathbb{R}), h \in \mathfrak{L}^r(\mathbb{R}).$$

Montrer que $fgh \in \mathfrak{L}^1(\mathbb{R})$ et que

$$\|fgh\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_r.$$

6. Montrer que, si $f \in \mathfrak{L}^\infty([a, b])$,

$$\|f\|_\infty = \lim_{p \to +\infty} \|f\|_p.$$

7. Soient $f \in \mathfrak{L}^p([0, +\infty[\ )$ et $g \in \mathfrak{L}^q([0, +\infty[\ )$ où $1 \leq p, q \leq +\infty$ sont conjugués. Calculer

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(s)g(s)\ ds.$$

8. Soit $f : [0, A] \to \mathbb{R}$ une fonction s'annulant à l'origine et admettant une dérivée continue. Montrer que, quel que soit $p \geq 1$, on a

$$\|f\|_p \leq \frac{A}{p^{1/p}} \|f'\|_p.$$

L'égalité est-elle possible ?

9. Montrer que $\mathfrak{L}^2(\mathbb{R}) \not\subseteq \mathfrak{L}^1(\mathbb{R})$ et que $\mathfrak{L}^1([0, 1]) \not\subseteq \mathfrak{L}^2([0, 1])$.
10. Discuter le cas d'égalité dans l'inégalité de Minkowski (lorsque $1 < p < +\infty$).
11. Soient $f, g \in \mathfrak{L}^2(E)$. Montrer que

$$\|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 = \frac{1}{2}(\|f + g\|_2^2 + \|f - g\|_2^2)$$

(identité du parallélogramme).

12. Soit $0 < p < 1$. Montrer que si $f, g \in \mathfrak{L}^p(E)$, alors $f + g \in \mathfrak{L}^p(E)$ mais que l'inégalité
$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$
n'est plus nécessairement satisfaite.

13. On considère les fonctions $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définies par
$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^{\alpha+\beta}x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1/(2n^\alpha) \\ 2n^\beta(1 - n^\alpha x) & \text{si} \quad 1/(2n^\alpha) \leq x \leq 1/n^\alpha \\ 0 & \text{si} \quad 1/n^\alpha \leq x \leq 1. \end{cases}$$
Montrer qu'elles convergent vers 0 en chaque point $x \in [0, 1]$. Déterminer les valeurs de p pour lesquelles elles convergent au sens de $\mathfrak{L}^p([0, 1])$.

14. On dit d'une suite de fonctions mesurables $f_n : E \to \mathbb{R}$ qu'elles **convergent en mesure** sur E vers une fonction mesurable $f : E \to \mathbb{R}$ si, quel que soit $\delta > 0$,
$$\lim_{n \to +\infty} \lambda\{x \mid |f_n(x) - f(x)| > \delta\} = 0.$$
Montrer que la convergence au sens de $\mathfrak{L}^p(E)$ ($1 \leq p \leq +\infty$) entraîne la convergence en mesure.

15. Soient $1 \leq p, q \leq +\infty$ des exposants conjugués, $f_n \in \mathfrak{L}^p(E)$ des fonctions qui convergent au sens de $\mathfrak{L}^p(E)$ vers une fonction $f \in \mathfrak{L}^p(E)$ et $g_n \in \mathfrak{L}^q(E)$ des fonctions qui convergent au sens de $\mathfrak{L}^q(E)$ vers une fonction $g \in \mathfrak{L}^q(E)$. Montrer que
$$\lim_{n \to +\infty} \int_E f_n g_n = \int_E f g.$$

16. Montrer que les fonctions $f_n(x) = \sin nx$ forment dans l'espace $\mathfrak{L}^2([-\pi, \pi])$ une suite bornée ($\|f_n\|_2$ restent bornées) qui n'admet aucune suite partielle convergente (au sens de $\mathfrak{L}^2([-\pi, \pi])$).

17. Soient $f_n \in \mathfrak{L}^p(E)$ des fonctions qui convergent simplement (ponctuellement) vers une fonction $f \in \mathfrak{L}^p(E)$. Montrer qu'elles convergent au sens de $\mathfrak{L}^p(E)$ ($1 \leq p < +\infty$) si et seulement si
$$\lim_{n \to +\infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p.$$
Suggestion : utiliser le résultat de l'exercice 20, page 37.

18. Soit $f \in \mathfrak{L}^p(\mathbb{R})$ $(1 \leq p < +\infty)$. Montrer que

$$\lim_{h \to 0} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h) - f(x)|^p \ dx \right)^{1/p} = 0.$$

Suggestion : considérer d'abord une fonction dans $C_c^\infty(\mathbb{R})$.

19. Soient $1 \leq p, q \leq +\infty$ des exposants conjugués, $f \in \mathfrak{L}^p(\mathbb{R}), g \in \mathfrak{L}^q(\mathbb{R})$ et

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t) \ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) \ dt$$

leur produit de convolution. Montrer que h est une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

6 DÉRIVATION

Pour étudier jusqu'à quel point les opérations d'intégration et de dérivation sont les inverses l'une de l'autre, c'est-à-dire sous quelles hypothèses les relations

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\ dt = f(x)$$

et

$$\int_a^b f'(t)\ dt = f(b) - f(a)$$

sont valables, nous allons introduire la classe des fonctions à variation bornée puis celle des fonctions absolument continues. Nous verrons notamment comment les formules d'intégration par parties et de changement de variables s'étendent à l'intégrale de Lebesgue.

6.1 Fonctions à variation bornée

Soit $f \in \mathfrak{L}^1([a,b])$ et considérons son intégrale définie, la fonction $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ déterminée par

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt.$$

Une première propriété de cette fonction est sa continuité. Si $h > 0$,

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^b \mathbb{I}_{(x,x+h)}(t) f(t)\ dt$$

alors que si $h < 0$,

$$F(x+h) - F(x) = -\int_a^b \mathbb{I}_{(x+h,x)}(t) f(t)\ dt$$

de telle sorte que, en vertu du théorème de la convergence dominée de Lebesgue,

$$\lim_{h\to 0}\left(F(x+h) - F(x)\right) = 0.$$

Une seconde propriété de la fonction F découle de sa représentation comme la différence de deux fonctions croissantes,

$$F = \int_a^x f_+ - \int_a^x f_-.$$

En vertu du théorème qui suit, la fonction F est à variation bornée.

Une fonction $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une **fonction à variation bornée** sur $[a,b]$ si les sommes

$$s(\phi, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} |\phi(x_k) - \phi(x_{k-1})|$$

restent bornées quelle que soit la partition

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\} \ , \ a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

de l'intervalle $[a,b]$. Sa variation sur l'intervalle $[a,b]$ est alors

$$\mathrm{var}(\phi, [a,b]) = \sup\{s(\phi, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P}\}.$$

Théorème 28 (Jordan) *Une fonction $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ est à variation bornée sur $[a,b]$ si et seulement si elle peut s'écrire comme la différence de deux fonctions croissantes sur $[a,b]$.*

Démonstration.

La condition est suffisante. Si $\phi = g - h$ est la différence de deux fonctions croissantes, on a

$$\begin{aligned} s(\phi, \mathcal{P}) &\leq \sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})| + \sum_{k=1}^{n} |h(x_k) - h(x_{k-1})| \\ &= \sum_{k=1}^{n} (g(x_k) - g(x_{k-1})) + \sum_{k=1}^{n} (h(x_k) - h(x_{k-1})) \\ &= g(b) - g(a) + h(b) - h(a) \end{aligned}$$

pour toute partition $\mathcal{P}$ de $[a,b]$.

La condition est nécessaire. On a en effet, quelque soit $c \in]a,b[$, que

$$\mathrm{var}(\phi, [a,b]) = \mathrm{var}(\phi, [a,c]) + \mathrm{var}(\phi, [c,b])$$

ce qui montre que la fonction

$$V(x) = \mathrm{var}(\phi, [a,x])$$

est croissante. Il en est de même pour la fonction

$$j(x) = V(x) - \phi(x)$$

puisque, si $x_1 < x_2$,

$$j(x_2) - j(x_1) = \text{var}(\phi, [x_1, x_2]) - (\phi(x_2) - \phi(x_1)) \geq 0.$$

C.Q.F.D.

Il y a bien sûr plus d'une façon de représenter une fonction à variation bornée comme la différence de deux fonctions croissantes. La représentation précédente est, d'une certaine façon, optimale (exercices 2 et 3, page 67).

Il suit de ce théorème que les discontinuités d'une fonction à variation bornée ϕ forment un ensemble au plus dénombrable. Ce sont les points x où ϕ fait un saut :

$$\phi(x-) = \lim_{h \downarrow 0} \phi(x-h) \neq \lim_{h \downarrow 0} \phi(x+h) = \phi(x+).$$

L'étude des fonctions à variations bornées s'appuie sur le théorème suivant.

Théorème 29 (Vitali) *Soit $E \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble de mesure extérieure finie. Supposons que $\{I_\alpha\}_{\alpha \in A}$ est une famille (pas nécessairement dénombrable) d'intervalles d'intérieur non vide ayant la propriété suivante : pour tout $x \in E$ et pour $\epsilon > 0$ arbitrairement petit, on peut trouver $\alpha \in A$ tel que $x \in I_\alpha$ et $\lambda(I_\alpha) < \epsilon$. Alors à chaque $\epsilon > 0$ correspond un ensemble fini d'intervalles deux à deux disjoints $\{I_{\alpha_1}, I_{\alpha_2}, \ldots, I_{\alpha_N}\}$ tels que*

$$\lambda^* \left(E \cap \left(\sum_{k=1}^{N} I_{\alpha_k} \right)^c \right) < \epsilon.$$

Démonstration.

En considérant si nécessaire leur adhérence, on peut supposer que les intervalles I_α sont fermés. Soit $O \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble ouvert de mesure finie contenant E. En ne considérant si nécessaire que ceux qui le sont, on peut supposer que tous les intervalles I_α sont contenus dans O.

Formons alors une suite d'intervalles disjoints $\{I_{\alpha_k}\}_k$ de la façon suivante. I_{α_1} est choisi arbitrairement. Si les intervalles disjoints $I_{\alpha_1}, I_{\alpha_2}, \ldots, I_{\alpha_n}$ ont déjà été choisis, posons

$$\Lambda_n = \sup_{\alpha \in A} \{\lambda(I_\alpha) \mid I_\alpha I_{\alpha_k} = \emptyset \text{ pour } 1 \leq k \leq n\}$$

et choisissons un intervalle $I_{\alpha_{n+1}}$ tel que

$$I_{\alpha_{n+1}} I_{\alpha_k} = \emptyset \text{ pour } 1 \leq k \leq n \text{ et } \lambda(I_{\alpha_{n+1}}) > \frac{\Lambda_n}{2}.$$

Si ce processus s'arrête après N étapes (faute d'intervalles I_α remplissant la condition), on a nécessairement

$$E \subseteq \sum_{k=1}^{N} I_{\alpha_k}$$

car si

$$x \in E \cap \left(\sum_{k=1}^{N} I_{\alpha_k} \right)^c ,$$

il existe, par hypothèse, un intervalle I_α contenant x et tel que $I_\alpha I_{\alpha_k} = \emptyset$ pour $1 \leq k \leq N$. S'il ne s'arrête jamais, la relation

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda(I_{\alpha_k}) \leq \lambda(O) < +\infty$$

implique que

$$\lim_{k \to +\infty} \lambda(I_{\alpha_k}) = 0$$

et aussi que l'on peut trouver N tel que

$$\sum_{k>N} \lambda(I_{\alpha_k}) < \epsilon/5.$$

Montrons que dans ce cas,

$$\lambda^* \left(E \cap \left(\sum_{k=1}^{N} I_{\alpha_k} \right)^c \right) < \epsilon.$$

Soit en effet

$$x \in E \cap \left(\sum_{k=1}^{N} I_{\alpha_k} \right)^c .$$

Il existe, par hypothèse, un intervalle $I_{\alpha'}$ contenant x et tel que $I_{\alpha'} I_{\alpha_k} = \emptyset$ pour $1 \leq k \leq N$. D'autre part, il doit aussi exister des intervalles de la suite $\{I_{\alpha_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tels que $I_{\alpha'} I_{\alpha_k} \neq \emptyset$. Autrement on aurait $\lambda(I_{\alpha'}) \leq \Lambda_k < 2\ \lambda(I_{\alpha_{k+1}})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, ce qui impliquerait $\lambda(I_{\alpha'}) = 0$. Soit donc I_{α_n} le premier des intervalles de la suite $\{I_{\alpha_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tel que $I_{\alpha'} I_{\alpha_n} \neq \emptyset$. Alors $n > N$ et

$$\lambda(I_{\alpha'}) \leq \Lambda_{n-1} < 2\ \lambda(I_{\alpha_n}).$$

Ainsi la distance de x au centre x_n de l'intervalle I_{α_n} est au plus

$$\lambda(I_{\alpha'}) + \frac{1}{2}\lambda(I_{\alpha_n}) < \frac{5}{2}\lambda(I_{\alpha_n})$$

et

$$x \in [x_n - \frac{5}{2}\lambda(I_{\alpha_n}), x_n + \frac{5}{2}\lambda(I_{\alpha_n})].$$

Donc

$$\lambda^* \left(E \cap \left(\sum_{k=1}^{N} I_{\alpha_k} \right)^c \right) \leq \sum_{n>N} 5\ \lambda(I_{\alpha_n}) < \epsilon.$$

C.Q.F.D.

Théorème 30 (Lebesgue) *Une fonction à variation bornée $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dérivable presque partout.*

Démonstration.

On peut supposer que ϕ est croissante et, en posant $\phi(x) = \phi(a)$ si $x < a$ et $\phi(x) = \phi(b)$ si $x > b$, que l'intervalle $[a,b]$ est symétrique par rapport à l'origine. Considérons les dérivées de Dini de ϕ en un point $x \in]a,b[$:

$$D_-\phi(x) = \liminf_{h\downarrow 0} \frac{\phi(x-h) - \phi(x)}{-h}$$

$$D^-\phi(x) = \limsup_{h\downarrow 0} \frac{\phi(x-h) - \phi(x)}{-h}$$

$$D_+\phi(x) = \liminf_{h\downarrow 0} \frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h}$$

$$D^+\phi(x) = \limsup_{h\downarrow 0} \frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h}.$$

Il s'agit de montrer que l'on a

$$D_-\phi(x) = D^-\phi(x) = D_+\phi(x) = D^+\phi(x) < +\infty$$

presque partout sur $]a,b[$. Il suffit en fait de montrer que

$$D^+\phi(x) \leq D_-\phi(x) < +\infty$$

presque partout sur $]a,b[$. En considérant la fonction croissante $\psi(x) = -\phi(-x)$ pour laquelle $D_-\psi(-x) = D_+\phi(x)$ et $D^+\psi(-x) = D^-\phi(x)$, cette relation entraînera en effet d'abord que $D^-\phi(x) \leq D_+\phi(x)$ puis que

$$D_-\phi(x) \leq D^-\phi(x) \leq D_+\phi(x) \leq D^+\phi(x) \leq D_-\phi(x) < +\infty$$

presque partout sur $]a,b[$. On a

$$\{x \mid D^+\phi(x) > D_-\phi(x)\} = \bigcup_{s,t\in\mathbb{Q}} \{x \mid D^+\phi(x) > s > t > D_-\phi(x)\}$$

et il s'agit de voir que, quels que soient $s,t \in \mathbb{Q}$,

$$\lambda^*(\{x \mid D^+\phi(x) > s > t > D_-\phi(x)\}) = 0.$$

Posons

$$E = \{x \mid D^+\phi(x) > s > t > D_-\phi(x)\}.$$

Soit $O \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble ouvert contenant E et tel que $\lambda(O) < \lambda^*(E) + \epsilon$. Si $x \in E$,

$$D_-\phi(x) = \liminf_{h\downarrow 0} \frac{\phi(x-h) - \phi(x)}{-h} < t.$$

Donc pour chaque $x \in E$ et pour $h > 0$ arbitrairement petit, il existe un intervalle $[x-h, x] \subseteq O$ tel que

$$\phi(x) - \phi(x-h) < th.$$

En vertu du théorème de Vitali, on peut trouver

$$\{[x_1 - h_1, x_1], [x_2 - h_2, x_2], \ldots, [x_N - h_N, x_N]\}$$

disjoints tels que, si

$$D = \sum_{k=1}^{N} \,]x_k - h_k, x_k[\ ,$$

on ait

$$\lambda^*(ED) > \lambda^*(E) - \epsilon.$$

De plus,

$$\sum_{k=1}^{N} (\phi(x_k) - \phi(x_k - h_k)) < t \sum_{k=1}^{N} h_k < t\lambda(O) < t(\lambda^*(E) + \epsilon).$$

Si $y \in ED$,

$$D^+\phi(y) = \limsup_{h\downarrow 0} \frac{\phi(y+h) - \phi(y)}{h} > s.$$

Donc pour chaque $y \in ED$ et pour $H > 0$ arbitrairement petit, il existe un intervalle $[y, y+H] \subseteq D$ tel que

$$\phi(y+H) - \phi(y) > sH.$$

En vertu du théorème de Vitali, on peut trouver

$$\{[y_1, y_1 + H_1], [y_2, y_2 + H_2], \ldots, [y_M, y_M + H_M]\}$$

disjoints tels que, si

$$G = \sum_{j=1}^{M} \,]y_j, y_j + H_j[\ ,$$

on ait

$$\lambda^*(EG) > \lambda^*(ED) - \epsilon > \lambda^*(E) - 2\epsilon.$$

De plus,

$$\sum_{j=1}^{M} (\phi(y_j + H_j) - \phi(y_j)) > s \sum_{j=1}^{M} H_j > s(\lambda^*(E) - 2\epsilon).$$

Maintenant remarquons que chaque intervalle $]y_j, y_j + H_j[$ doit être contenu dans l'un des intervalles $]x_k - h_k, x_k[$. En regroupant les termes de la somme

$$\sum_{j=1}^{M} (\phi(y_j + H_j) - \phi(y_j))$$

suivant les intervalles $]x_k - h_k, x_k[$ auxquels ils correspondent et en utilisant le fait que la fonction ϕ est croissante, on obtient

$$\sum_{j=1}^{M} (\phi(y_j + H_j) - \phi(y_j)) \leq \sum_{k=1}^{N} (\phi(x_k) - \phi(x_k - h_k)).$$

Ceci entraîne $s(\lambda^*(E) - 2\epsilon) \leq t(\lambda^*(E) + \epsilon)$ donc $s\lambda^*(E) \leq t\lambda^*(E)$ et enfin $\lambda^*(E) = 0$. Pour voir que l'on a

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{\phi(x + h) - \phi(x)}{h} < +\infty$$

presque partout sur $[a, b]$, nous utilisons le lemme de Fatou :

$$\begin{aligned}
\liminf_{n \to +\infty} \int_a^b \frac{\phi(x + 1/n) - \phi(x)}{1/n} \, dx &= \liminf_{n \to +\infty} n \left(\int_{a+1/n}^{b+1/n} \phi(x) \, dx - \int_a^b \phi(x) \, dx \right) \\
&= \liminf_{n \to +\infty} n \left(\int_b^{b+1/n} \phi(x) \, dx - \int_a^{a+1/n} \phi(x) \, dx \right) \\
&= \liminf_{n \to +\infty} \left(\phi(b) - n \int_a^{a+1/n} \phi(x) \, dx \right) \leq \phi(b) - \phi(a).
\end{aligned}$$

C.Q.F.D.

Remarque. Si ϕ est croissante sur l'intervalle $[a,b]$, la fonction ϕ' n'est définie que presque partout sur $[a,b]$. On la prolonge à l'intervalle $[a,b]$ tout entier en la posant égale à 0 aux points où la limite du quotient différentiel n'existe pas ou est infinie. On obtient ainsi une fonction mesurable positive encore dénotée ϕ' et telle que

$$\int_a^b \phi' \leq \phi(b) - \phi(a).$$

Cette inégalité peut être stricte, par exemple, pour une fonction constante entre ses sauts.

Théorème 31 *Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable et $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt.$$

Alors, presque partout sur $[a,b]$,

$$F'(x) = f(x).$$

Démonstration.

On peut supposer que f est positive. Le cas général se ramène à celui où f est bornée en considérant la suite croissant vers f des fonctions bornées $f_n = \inf\{f, n\}$. On a en effet

$$F(x) = G_n(x) + F_n(x)$$

où

$$G_n(x) = \int_a^x (f(t) - f_n(t))\ dt \ \text{ et } \ F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\ dt.$$

Comme G_n est croissante, elle est dérivable et $G_n'(x) \geq 0$ presque partout sur $[a,b]$ et, par hypothèse, $F_n'(x) = f_n(x)$ presque partout sur le même intervalle. Par suite

$$F'(x) = G_n'(x) + F_n'(x) \geq f_n(x)$$

donc

$$F'(x) \geq f(x)$$

presque partout sur l'intervalle $[a,b]$, ce qui entraîne

$$F(b) \geq \int_a^b F'(t)\ dt \geq \int_a^b f(t) = F(b)$$

et enfin

$$F'(x) = f(x)$$

presque partout sur l'intervalle $[a,b]$. Supposant donc f positive et bornée, soit x un point quelconque de l'intervalle $]a,b[$ et montrons que

$$\int_a^x F'(t)\ dt = \int_a^x f(t)\ dt.$$

En vertu du théorème de la convergence dominée

$$\left(\frac{F(t+h)-F(t)}{h} = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(s)\ ds \leq \|f\|_\infty\right)$$

et du théorème fondamental du calcul (F est continue), on a en effet

$$\int_a^x F'(t)\ dt = \int_a^x \lim_{h\downarrow 0} \frac{F(t+h)-F(t)}{h}\ dt = \lim_{h\downarrow 0} \int_a^x \frac{F(t+h)-F(t)}{h}\ dt$$
$$= \lim_{h\downarrow 0} \left(\frac{1}{h}\int_x^{x+h} F(t)\ dt - \frac{1}{h}\int_a^{a+h} F(t)\ dt\right) = F(x) - F(a) = F(x).$$

Observons finalement que si $g \in \mathfrak{L}^1([a,b])$ est telle que

$$\int_a^x g = 0$$

pour tout $x \in]a,b[$, alors $g = 0$ presque partout sur $[a,b]$ (on prendra ici $g = F' - f$). En effet, $\int_I g = 0$ pour tout intervalle ouvert I donc $\int_O g = 0$ pour tout ensemble ouvert O. Soit

$$E = \{x \mid g(x) > 0\}.$$

Si l'on avait $\lambda(E) > 0$, on pourrait trouver un ensemble ouvert O tel que

$$]a,b[\ E^c \subseteq O \subseteq]a,b[$$

et

$$\lambda(O) < b - a$$

donc

$$\lambda(\ ]a,b[\ O^c) > 0.$$

Comme ce dernier ensemble est entièrement contenu dans E, on obtiendrait une contradiction :

$$-\int_O g = \int_{]a,b[\ O^c} g > 0.$$

C.Q.F.D.

6.2 Fonctions absolument continues

Une troisième propriété de l'intégrale définie F découle de la propriété suivante des fonctions intégrables.

Soit $f \in \mathfrak{L}^1([a,b])$. Alors à chaque $\epsilon > 0$ correspond $\delta > 0$ tel que

$$\lambda(E) < \delta \ \text{ implique } \ \int_E |f| < \epsilon. \tag{3}$$

Cela est évident si $|f|$ est bornée. Pour y ramener le cas général, introduisons la suite croissant vers $|f|$ des fonctions bornées $f_n = \inf\{|f|, n\}$. En vertu du théorème de la convergence monotone, on peut trouver n tel que

$$\int_a^b (|f| - f_n) < \epsilon/2.$$

Si

$$\lambda(E) < \frac{\epsilon}{2n},$$

on aura

$$\int_E |f| = \int_E (|f| - f_n) + \int_E f_n \leq \int_a^b (|f| - f_n) + n\lambda(E) < \epsilon.$$

La relation (3) implique que F est absolument continue.

Une fonction $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une **fonction absolument continue** sur $[a,b]$ si à chaque $\epsilon > 0$ correspond $\delta > 0$ tel que pour toute suite finie de sous-intervalles ouverts deux à deux disjoints

$$\{\ ]s_1, t_1[,\ ]s_2, t_2[,\ \ldots,\ ]s_n, t_n[\ \}$$

de $[a,b]$ on ait

$$\sum_{k=1}^{n} (t_k - s_k) < \delta \ \text{ implique } \ \sum_{k=1}^{n} |\phi(t_k) - \phi(s_k)| < \epsilon.$$

Une fonction absolument continue sur un intervalle $[a,b]$ est uniformément continue sur cet intervalle. Elle y est aussi à variation bornée. Soit en effet $\Delta > 0$ le nombre associé à $\epsilon = 1$. Donnée une partition $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de l'intervalle $[a,b]$, considérons la partition $\mathcal{P}' = \{x'_0, x'_1, x'_2, \ldots, x'_m\}$ obtenue de $\mathcal{P}$ en lui adjoignant les points

$$a + k\frac{b-a}{N} \ , \ 0 \le k \le N \ , \quad \text{où} \ \ \frac{b-a}{\Delta} \le N < \frac{b-a}{\Delta} + 1.$$

Alors, regroupant les termes de la seconde somme en N paquets,

$$\sum_{k=1}^{n} |\phi(x_k) - \phi(x_{k-1})| \le \sum_{k=1}^{m} |\phi(x'_k) - \phi(x'_{k-1})| \le N < \frac{b-a}{\Delta} + 1.$$

Théorème 32 *Une fonction $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ est absolument continue sur $[a,b]$ si et seulement si elle admet presque partout une dérivée ϕ' intégrable et telle que*

$$\int_a^x \phi' = \phi(x) - \phi(a)$$

pour tout $x \in [a,b]$.

Démonstration.

La condition est suffisante. Nous avons déjà démontré que l'intégrale définie d'une fonction intégrable est absolument continue.

La condition est nécessaire. On sait déjà que ϕ, étant à variation bornée, admet presque partout une dérivée intégrable ϕ'. On sait aussi que la fonction

$$\phi_1(x) = \int_a^x \phi'(t)\ dt + \phi(a)$$

est absolument continue et que $\phi'_1(x) = \phi'(x)$ presque partout sur l'intervalle $[a,b]$. Observons pour terminer que si une fonction $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ est absolument continue sur $[a,b]$, telle que $g(a) = 0$ et que $g' = 0$ presque partout, alors $g = 0$ partout sur l'intervalle $[a,b]$ (on prendra ici $g = \phi - \phi_1$). Soit en effet $x \in]a,b[$ et considérons l'ensemble

$$E = \{t \in \ ]a,x[\ | \ g'(t) = 0\}.$$

Si $t \in E$,

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} = 0.$$

Donc pour chaque $t \in E$ et pour tout $h > 0$ assez petit, il existe un intervalle $[t, t+h] \subseteq]a, x[$ tel que

$$g(t+h) - g(t) < \frac{\epsilon\ h}{2(b-a)}.$$

Soit $\delta > 0$ le nombre associé à $\epsilon/2$ dans la définition de continuité absolue de g sur $[a, b]$. En vertu du théorème de Vitali, on peut trouver des intervalles deux à deux disjoints

$$\{[t_1, t_1 + h_1], [t_2, t_2 + h_2], \ldots, [t_N, t_N + h_N]\}$$

tels que

$$\lambda\left(E\left(\sum_{k=1}^{N}[t_k, t_k + h_k]\right)^c\right) < \delta$$

donc que

$$\lambda\left(\ ]a, x[\ \left(\sum_{k=1}^{N}[t_k, t_k + h_k]\right)^c\right) < \delta.$$

Alors

$$\begin{aligned} |g(x)| &= |g(x) - g(t_N + h_N) + g(t_1) \\ &+ \sum_{k=1}^{N-1}(g(t_{k+1}) - g(t_k + h_k)) + \sum_{k=1}^{N}(g(t_k + h_k) - g(t_k))| \\ &\leq |g(x) - g(t_N + h_N)| + |g(t_1)| \\ &+ \sum_{k=1}^{N-1}|g(t_{k+1}) - g(t_k + h_k)| + \sum_{k=1}^{N}|g(t_k + h_k) - g(t_k)| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2(b-a)}\sum_{k=1}^{N} h_k \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Le point $x \in]a, b[$ et le nombre $\epsilon > 0$ étant arbitraires, le résultat est établi. C.Q.F.D.

Théorème 33 *Soient $\phi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ des fonctions absolument continues sur $[a, b]$. Alors la fonction $\phi\psi$ est absolument continue sur $[a, b]$ et*

$$\int_a^b \phi\psi' = \phi(b)\psi(b) - \phi(a)\psi(a) - \int_a^b \phi'\psi.$$

Démonstration.

La première assertion découle de l'inégalité

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} |\phi(t_k)\psi(t_k) - \phi(s_k)\psi(s_k)| \\
&= \sum_{k=1}^{n} |(\phi(t_k) - \phi(s_k))\psi(t_k) + \phi(s_k)(\psi(t_k) - \psi(s_k))| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |\phi(t_k) - \phi(s_k)| \|\psi\|_\infty + \|\phi\|_\infty \sum_{k=1}^{n} |\psi(t_k) - \psi(s_k)|.
\end{aligned}$$

Comme

$$(\phi\psi)' = \phi'\psi + \phi\psi'$$

presque partout et comme

$$\int_a^b (\phi\psi)' = \phi(b)\psi(b) - \phi(a)\psi(a),$$

la formule d'intégration par parties est démontrée. C.Q.F.D.

Théorème 34 *Soit $\phi : [c, d] \to [a, b]$ une fonction absolument continue et strictement croissante, appliquant $[c, d]$ sur $[a, b]$. Pour toute fonction $f \in \mathfrak{L}^1([a, b])$, la fonction $y \mapsto f(\phi(y))\phi'(y)$ est intégrable sur $[c, d]$ et l'on a*

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_c^d f(\phi(y))\phi'(y)\ dy.$$

Démonstration.

La démonstration se fait en plusieurs étapes.

Si $f = \mathbb{I}_{(u,v)}$ est la fonction indicatrice d'un intervalle, $f \circ \phi = \mathbb{I}_{(\phi^{-1}(u),\, \phi^{-1}(v))}$ et la formule est vraie puisqu'elle s'écrit

$$v - u = \int_{\phi^{-1}(u)}^{\phi^{-1}(v)} \phi'(y)\ dy.$$

Si $f = \mathbb{I}_O = \sum_k \mathbb{I}_{(u_k, v_k)}$ est la fonction indicatrice d'un ensemble ouvert, $f \circ \phi = \mathbb{I}_{\phi^{-1}(O)} = \sum_k \mathbb{I}_{(\phi^{-1}(u_k),\, \phi^{-1}(v_k))}$ et

$$\lambda(O) = \sum_k (v_k - u_k) = \sum_k \int_{\phi^{-1}(u_k)}^{\phi^{-1}(v_k)} \phi'(y)\ dy = \int_{\phi^{-1}(O)} \phi'(y)\ dy$$

en vertu de l'additivité de l'intégrale.

Pour étudier le cas où $f = \mathbb{I}_E$ est la fonction indicatrice d'un ensemble mesurable quelconque, introduisons l'ensemble

$$H = \{x \mid \phi'(x) > 0\}.$$

Si $N \subseteq [a, b]$ est un ensemble de mesure nulle, on peut trouver une suite décroissante d'ensembles ouverts $O_k \supseteq N$ tels que $\lim_{k\to+\infty} \lambda(O_k) = 0$. Alors

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{k\to+\infty} \lambda(O_k) &= \lim_{k\to+\infty} \int_{\phi^{-1}(O_k)} \phi'(y)\ dy \\ = \lim_{k\to+\infty} \int_{\phi^{-1}(O_k)H} \phi'(y)\ dy &= \int_{\bigcap_k \phi^{-1}(O_k)H} \phi'(y)\ dy \end{aligned}$$

ce qui montre que l'ensemble $\bigcap_k \phi^{-1}(O_k)H$ est de mesure nulle, donc que l'ensemble $\phi^{-1}(N)H$ l'est aussi. Si donc $f = \mathbb{I}_E$, on peut trouver une suite décroissante d'ensembles ouverts O_k tels que

$$\bigcap_k O_k = E + N$$

où N est un ensemble de mesure nulle. La relation

$$\bigcap_k \phi^{-1}(O_k)H = \phi^{-1}(E)H + \phi^{-1}(N)H$$

montre alors que l'ensemble $\phi^{-1}(E)H$ est mesurable et l'on peut écrire

$$\begin{aligned} \lambda(E) = \lambda\left(\bigcap_k O_k\right) &= \lim_{k\to+\infty} \lambda(O_k) \\ = \lim_{k\to+\infty} \int_{\phi^{-1}(O_k)} \phi'(y)\ dy = \int_{\bigcap_k \phi^{-1}(O_k)} &\phi'(y)\ dy = \int_{\bigcap_k \phi^{-1}(O_k)H} \phi'(y)\ dy \\ = \int_{\phi^{-1}(E)H} \phi'(y)\ dy &= \int_c^d \mathbb{I}_E(\phi(y))\phi'(y)\ dy. \end{aligned}$$

Le théorème est donc vrai, par linéarité, pour une fonction f mesurable positive étagée, puis pour une fonction f mesurable positive quelconque par convergence monotone et finalement pour une fonction f intégrable arbitraire encore une fois par linéarité.

C.Q.F.D.

6.3 Exercices

1. Vérifier qu'une fonction $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ est à variation bornée si et seulement si son graphe est **rectifiable**, c'est-à-dire si et seulement si les sommes

$$\sigma(\phi, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\phi(x_k) - \phi(x_{k-1}))^2 + (x_k - x_{k-1})^2}$$

restent bornées quelle que soit la partition $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de l'intervalle $[a,b]$.

2. Soit $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction à variation bornée. Si $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ est une partition de l'intervalle $[a,b]$, soient

$$p(\phi, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} (\phi(x_k) - \phi(x_{k-1}))_+,$$
$$n(\phi, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} (\phi(x_k) - \phi(x_{k-1}))_-$$

et posons

$$\mathrm{pos}(\phi, [a,b]) = \sup_{\mathcal{P}} \{p(\phi, \mathcal{P})\} \ ,$$
$$\mathrm{neg}(\phi, [a,b]) = \sup_{\mathcal{P}} \{n(\phi, \mathcal{P})\}.$$

Montrer que

$$\mathrm{pos}(\phi, [a,b]) - \mathrm{neg}(\phi, [a,b]) = \phi(b) - \phi(a),$$

et que

$$\mathrm{pos}(\phi, [a,b]) + \mathrm{neg}(\phi, [a,b]) = \mathrm{var}(\phi, [a,b]).$$

3. Soit $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction à variation bornée. Supposons que $\phi = g - h$ en soit une représentation comme la différence de deux fonctions croissantes sur $[a,b]$ et posons

$$P(x) = \mathrm{pos}(\phi, [a,x]) \ , \ N(x) = \mathrm{neg}(\phi, [a,x]).$$

Vérifier que P et N sont croissantes sur $[a,b]$ et que

$$\mathrm{var}(P, [a,b]) \leq \mathrm{var(g,[a,b])} \ , \ \mathrm{var}(N, [a,b]) \leq \mathrm{var}(h, [a,b]).$$

4. Vérifier que la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x^{-1/3} & \text{si } \ x \neq 0, \\ 0 & \text{si } \ x = 0. \end{cases}$$

est intégrable sur $[-1, 1]$ et déterminer la variation de son intégrale définie

$$F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\ dt$$

sur cet intervalle.

5. Montrer que la fonction continue $\phi(x)$ qui coïncide avec $x \ \sin 1/x$ lorsque $x \neq 0$ n'est à variation bornée sur aucun intervalle contenant 0.

6. Représenter sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ la fonction $\sin x$ comme la différence de deux fonctions croissantes.

7. Soit $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, q_3, \ldots\}$ une énumération des nombres rationnels. Montrer que la fonction

$$\phi(x) = \sum_{q_n < x} \frac{1}{2^n}$$

est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et discontinue sur $\mathbb{Q}$.

8. Soit $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction à variation bornée. Montrer que $|\phi|$ est aussi à variation bornée sur $[a, b]$ et que

$$\operatorname{var}(|\phi|, [a, b]) \leq \operatorname{var}(\phi, [a, b]).$$

En déduire l'inégalité

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b |\phi| \leq |\phi(a)| + \operatorname{var}(|\phi|, [a, b]).$$

9. Soit $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ la limite d'une suite de fonctions $\phi_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ à variation bornée. Montrer que

$$\operatorname{var}(\phi, [a, b]) \leq \liminf_{n \to +\infty} \operatorname{var}(\phi_n, [a, b]).$$

10. Calculer les nombres de Dini $D^+\phi(0), D_+\phi(0), D^-\phi(0)$ et $D_-\phi(0)$ pour la fonction

$$\phi = (\mathbb{I}_{\mathbb{Q}^c \ ]-\infty,0]} + 2\ \mathbb{I}_{\mathbb{Q}^c \ ]0,+\infty[}) - (\mathbb{I}_{\mathbb{Q} \ ]-\infty,0]} + 2\ \mathbb{I}_{\mathbb{Q} \ ]0,+\infty[}).$$

11. Montrer qu'une fonction est absolument continue sur tout intervalle dans lequel elle admet une dérivée bornée.
12. Montrer que la fonction continue $\phi(x)$ qui coïncide avec $x^2 \sin 1/x$ lorsque $x \neq 0$ est absolument continue.
13. Soit $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. Montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme $\phi = \phi_{ac} + \phi_s$ où ϕ_{ac} est croissante absolument continue et ϕ_s est croissante **singulière**, c'est-à-dire telle que $\phi_s' = 0$ presque partout sur $[a, b]$.
14. Montrer qu'une fonction convexe $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est absolument continue sur tout intervalle compact $[a, b]$.
15. Soit $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction absolument continue. Montrer que

$$\mathrm{var}(\phi, [a, b]) = \int_a^b |\phi'(x)| \; dx.$$

Suggestion : considérer d'abord le cas où ϕ' est continue.
16. Soient $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction absolument continue et

$$\ell_\phi = \sup\{\sigma(\phi, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P}\}$$

la longueur de son graphe. Montrer que

$$\ell_\phi = \int_a^b \sqrt{1 + \phi'(x)^2} \; dx.$$

Suggestion : considérer d'abord le cas où ϕ' est continue.
17. À partir de la formule d'intégration par parties, montrer que si la fonction $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ est absolument continue, positive et décroissante et si la fonction $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ est intégrable, il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b F(x) g(x) \; dx = F(a) \int_a^c g(x) \; dx.$$

(« Deuxième théorème de la moyenne ». Quel est le premier ?)

7 INTÉGRATION ABSTRAITE

La méthode de Lebesgue s'étend aux espaces euclidiens. On peut en exposer la théorie suivant essentiellement les mêmes étapes que celles employées sur la droite mais nous allons utiliser une autre approche, basée sur l'abstraction des idées présentées jusqu'à maintenant et qui nous conduira plus directement au théorème de Tonelli-Fubini sur le changement de l'ordre d'intégration dans les intégrales itérées. Cette approche présente un avantage pédagogique évident et a d'autres applications, notamment en calcul des probabilités. (Les démonstrations des résultats qui suivent et qui sont absentes ont été omises parce qu'identiques à celles des résultats correspondants déjà étudiés).

Soit X un ensemble. Une **tribu** sur X est une famille $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ de parties de X telle que

- $(\mathbf{T}_1)$ $X \in \mathfrak{T}$;
- $(\mathbf{T}_2)$ $E \in \mathfrak{T}$ implique $E^c \in \mathfrak{T}$;
- $(\mathbf{T}_3)$ $E_k \in \mathfrak{T}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ implique $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k \in \mathfrak{T}$.

Si $\mathfrak{T}$ est une tribu sur X, on dit que le couple $(X, \mathfrak{T})$ forme un espace mesurable. Les ensembles de $\mathfrak{T}$ sont les ensembles mesurables de X. Par complémentarité, l'intersection d'une suite finie ou infinie d'ensembles mesurables est mesurable. La famille réduite à $\{\emptyset, X\}$ est la plus petite tribu sur X et la famille $\mathfrak{P}(X)$ de toutes les parties de X est la plus grande. L'intersection d'une famille de tribus étant encore une tribu, il existe, donnée une famille quelconque $\mathfrak{F}$ de parties de X, une plus petite tribu $\mathfrak{T}(\mathfrak{F})$ contenant $\mathfrak{F}$. C'est la **tribu engendrée** par $\mathfrak{F}$.

Exemple. Si X est un espace métrique, la tribu $\mathfrak{T}(\mathfrak{O})$ engendrée par la famille $\mathfrak{O}$ des ensembles ouverts de X est la **tribu de Borel** sur X. Lorsque $X = \mathbb{R}$, la tribu borélienne $\mathfrak{B} = \mathfrak{T}(\mathfrak{O})$ est aussi engendrée par les intervalles ouverts $]a, b[$ de $\mathbb{R}$ (ou même par les seuls intervalles de type $]a, +\infty[$). On a donc $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{L}$ (où $\mathfrak{L}$ est la **tribu de Lebesgue**).

Soient $(X, \mathfrak{T})$ un espace mesurable et $E \subseteq X$. Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est mesurable si, quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble

$$\{x \mid f(x) > \alpha\}$$

est mesurable.

Lorsque X est un espace métrique et que $\mathfrak{T}$ contient la tribu de Borel, toute fonction continue f est mesurable ; de plus, si f est mesurable et si

$h : (a, b) \to \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que $h \circ f$ est définie, $h \circ f$ est mesurable. En général, la somme et le produit de deux fonctions mesurables sont mesurables. De même, l'enveloppe supérieure et l'enveloppe inférieure d'une suite finie ou infinie de fonctions mesurables sont mesurables sur leur domaine de définition respectif. Par suite, ainsi en est-il de leur limite supérieure, de leur limite inférieure et de leur limite.

Toute fonction mesurable positive $f : E \to \mathbb{R}$ est la limite d'une suite croissante de fonctions mesurables positives étagées φ_n,

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \mathbb{I}_{E_{n,k}} + n\mathbb{I}_{F_n}$$

où

$$E_{n,k} = \{x \mid \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n}\}$$

et

$$F_n = \{x \mid n \leq f(x)\}.$$

Une mesure sur X est une fonction $\mu : \mathfrak{T} \to [0, +\infty]$ telle que

- ($\mathbf{M}_1$) $\mu(\emptyset) = 0$;
- ($\mathbf{M}_2$) pour toute suite finie ou infinie d'ensembles mesurables deux à deux disjoints E_k,

$$\mu\left(\sum_k E_k\right) = \sum_k \mu(E_k).$$

Si μ est une mesure sur X, le triplet $(X, \mathfrak{T}, \mu)$ forme un espace mesuré. Si E et F sont mesurables et $E \subseteq F$,

$$\mu(E) \leq \mu(F).$$

Pour toute suite d'ensembles mesurables E_n,

$$\mu\left(\bigcup_n E_n\right) \leq \sum_n \mu(E_n).$$

Pour toute suite croissante d'ensembles mesurables E_n,

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(E_n) = \mu\left(\bigcup_n E_n\right).$$

Pour toute suite décroissante d'ensembles mesurables de mesure finie E_n,

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(E_n) = \mu\left(\bigcap_n E_n\right).$$

Une propriété vraie partout sauf aux points d'un ensemble de $\mu-$mesure nulle est dite vraie $\mu-$presque partout.

L'intégrale sur un ensemble mesurable E d'une fonction mesurable f relativement à une mesure μ est définie en trois étapes.

Si $f = \varphi = \sum_{k=1}^{N} a_k \mathbb{I}_{E_k}$ est une fonction mesurable positive étagée représentée sous sa forme canonique,

$$\int_E \varphi \ d\mu = \sum_{k=1}^{N} a_k \ \mu(EE_k).$$

Si f est mesurable positive,

$$\int_E f \ d\mu = \sup\left\{\int_E \varphi \ d\mu \mid 0 \le \varphi \le f \ \text{ sur } \ E\right\}.$$

Enfin, une fonction mesurable f est dite intégrable par rapport à μ sur E si $\int_E |f| \ d\mu < +\infty$ auquel cas

$$\int_E f \ d\mu = \int_E f_+ \ d\mu - \int_E f_- \ d\mu.$$

$\mathfrak{L}^1_\mu(E)$ désignera l'espace des fonctions intégrables par rapport à μ sur E.

Si la suite des fonctions mesurables positives f_n croît vers la fonction f, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n \ d\mu = \int_E f \ d\mu.$$

On en déduit que $\mathfrak{L}^1_\mu(E)$ est un espace vectoriel réel sur lequel

$$f \mapsto \int_E f \ d\mu$$

est une forme linéaire positive. De plus, si f est positive, l'égalité dans l'inégalité

$$\int_E f \ d\mu \ge 0$$

n'est possible que si $f = 0$ $\mu-$presque partout sur E.

Si la suite des fonctions mesurables positives f_n décroît vers la fonction f et si f_1 est intégrable, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n \; d\mu = \int_E f \; d\mu.$$

En général, si les fonctions mesurables f_n sont positives, on a toujours que

$$\int_E \liminf_{n\to+\infty} f_n \; d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_E f_n \; d\mu$$

(en prolongeant naturellement les définitions précédentes aux fonctions à valeurs dans $[0, +\infty]$) et, en conséquence, le théorème de la convergence dominée est toujours valable : si les fonctions $\mu-$intégrables f_n convergent vers une fonction f en restant toutes majorées en valeur absolue par une même fonction $\mu-$intégrable g, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n \; d\mu = \int_E f \; d\mu.$$

Les espaces $\mathfrak{L}^p_\mu(E)$ regroupent les fonctions mesurables de p$^{\text{ième}}$ puissance $\mu-$intégrable sur E lorsque $1 \leq p < +\infty$ et $\mathfrak{L}^\infty_\mu(E)$ est l'espace des fonctions bornées $\mu-$presque partout sur E. $\|f\|_\infty$ désigne la borne supérieure $\mu-$essentielle de $f \in \mathfrak{L}^\infty_\mu(E)$ et, si $f \in \mathfrak{L}^p_\mu(E)$,

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p \; d\mu \right)^{1/p}.$$

Avec ces notations, l'inégalité de Hölder

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

où p et q sont des exposants conjugués $(1 \leq p, q \leq +\infty)$ reste valable et entraîne les inclusions

$$\mathfrak{L}^\infty_\mu(E) \subseteq \mathfrak{L}^2_\mu(E) \subseteq \mathfrak{L}^1_\mu(E)$$

lorsque $\mu(E) < +\infty$ et l'inégalité de Minkowski

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

où $1 \leq p \leq +\infty$ implique que les espaces $\mathfrak{L}^p_\mu(E)$ sont des espaces vectoriels réels.

A priori, il n'y a aucune raison pour qu'un sous-ensemble d'un ensemble de $\mu-$mesure nulle soit mesurable. La tribu $\mathfrak{T}$ est dite $\mu-$**complète** si toute partie d'un ensemble de $\mu-$mesure nulle est mesurable. Il est toujours possible de compléter une tribu qui ne l'est pas.

Théorème 35 *La famille $\mathfrak{T}_\mu$ des parties E de X ayant la propriété qu'il existe $A, B \in \mathfrak{T}$ tels que $A \subseteq E \subseteq B$ et $\mu(BA^c) = 0$ est une tribu contenant $\mathfrak{T}$. Si μ est prolongée à $\mathfrak{T}_\mu$ en posant $\mu(E) = \mu(A)$, $\mathfrak{T}_\mu$ est $\mu-$complète.*

Démonstration.

Si $E \in \mathfrak{T}$, alors $E \in \mathfrak{T}_\mu$ en prenant $A = E = B$. En particulier, $X \in \mathfrak{T}_\mu$.

Si $E \in \mathfrak{T}_\mu$, alors $B^c \subseteq E^c \subseteq A^c$ avec $\mu(A^c(B^c)^c) = 0$ donc $E^c \in \mathfrak{T}_\mu$.

Si $E_k \in \mathfrak{T}_\mu$, $A_k \subseteq E_k \subseteq B_k$ avec $\mu(B_k A_k^c) = 0$, alors

$$\bigcup_k A_k \subseteq \bigcup_k E_k \subseteq \bigcup_k B_k$$

avec

$$\mu\left(\bigcup_k B_k \left(\bigcup_j A_j\right)^c\right) \leq \mu\left(\bigcup_k B_k A_k^c\right) \leq \sum_k \mu(B_k A_k^c) = 0$$

donc $\bigcup_k E_k \in \mathfrak{T}_\mu$.

La définition $\mu(E) = \mu(A)(= \mu(B))$ est justifiée car si l'on a aussi $A_1 \subseteq E \subseteq B_1$ avec $\mu(B_1 A_1^c) = 0$,

$$\mu(A_1) \leq \mu(B) = \mu(A) \leq \mu(B_1) = \mu(A_1).$$

Ainsi prolongée, μ reste une mesure. Si les ensembles $E_k \in \mathfrak{T}_\mu$ sont deux à deux disjoints et $A_k \subseteq E_k \subseteq B_k$, les ensembles A_k sont aussi deux à deux disjoints et

$$\mu\left(\sum_k E_k\right) = \mu\left(\sum_k A_k\right) = \sum_k \mu(A_k) = \sum_k \mu(E_k).$$

Enfin, $\mathfrak{T}_\mu$ est $\mu-$complète. Si $N \in \mathfrak{T}_\mu$ est de $\mu-$mesure nulle et $E \subseteq N$, soient $A, B \in \mathfrak{T}$ tels que $A \subseteq N \subseteq B$ et $\mu(A) = \mu(B) = 0$; alors $\emptyset \subseteq E \subseteq B$ avec $\mu(B) = 0$ donc $E \in \mathfrak{T}_\mu$. C.Q.F.D.

Lorsque la tribu $\mathfrak{T}$ est $\mu-$complète, une fonction qui coïncide $\mu-$presque partout avec une fonction mesurable est elle-même mesurable. En conséquence, le critère de Cauchy pour la convergence au sens de $\mathfrak{L}_\mu^p(E)$ $(1 \leq p \leq +\infty)$ reste valable dans les espaces mesuré complets.

Le théorème suivant sera utile pour l'étude des intégrales doubles. Son énoncé fait appel aux notions de clan et de classe monotone. Un **clan** sur X est une famille $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ de parties de X telle que

– $(\mathbf{C}_1)$ $X \in \mathfrak{C}$;

– $(\mathbf{C}_2)$ $E \in \mathfrak{C}$ implique $E^c \in \mathfrak{C}$;

– $(\mathbf{C}_3)$ $E_k \in \mathfrak{C}$ pour tout $1 \leq k \leq n$ implique $\bigcup_{1 \leq k \leq n} E_k \in \mathfrak{C}$.

En particulier, une tribu forme un clan. Par complémentarité, un clan est aussi fermé sous l'intersection finie.

Une **classe monotone** sur X est une famille $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ de parties de X telle que

– $(\mathbf{CM}_1)$ Pour toute suite croissante d'ensembles $E_k \in \mathfrak{M}$, $\bigcup_k E_k \in \mathfrak{M}$;

– $(\mathbf{CM}_2)$ Pour toute suite décroissante d'ensembles $E_k \in \mathfrak{M}$, $\bigcap_k E_k \in \mathfrak{M}$.

En particulier, une tribu forme une classe monotone. L'intersection de classes monotones étant encore une classe monotone, la notion de classe monotone engendrée $\mathfrak{M}(\mathfrak{F})$ par une famille quelconque $\mathfrak{F}$ de parties de X a un sens.

Théorème 36 *La classe monotone $\mathfrak{M}(\mathfrak{C})$ engendrée par un clan $\mathfrak{C}$ est aussi la tribu $\mathfrak{T}(\mathfrak{C})$ engendrée par ce clan.*

Démonstration.

Toute tribu étant une classe monotone, $\mathfrak{M}(\mathfrak{C}) \subseteq \mathfrak{T}(\mathfrak{C})$.

Pour démontrer l'inclusion réciproque, observons d'abord que si $\mathfrak{M}$ est une classe monotone quelconque sur X et $A \subseteq X$, la famille

$$\mathfrak{M}_A = \{B \subseteq X \mid AB^c, A^cB \text{ et } A \cup B \in \mathfrak{M}\}$$

est une classe monotone sur X. Par exemple, si les ensembles $B_k \in \mathfrak{M}_A$ croissent, les ensembles $AB_k^c \in \mathfrak{M}$ décroissent (vers $A(\bigcup_k B_k)^c \in \mathfrak{M}$), les ensembles $A^cB_k \in \mathfrak{M}$ croissent (vers $A^c \bigcup_k B_k \in \mathfrak{M}$) et les ensembles $A \cup B_k \in \mathfrak{M}$ croissent (vers $A \cup \bigcup_k B_k \in \mathfrak{M}$) ce qui implique que $\bigcup_k B_k \in \mathfrak{M}_A$.

Prenons $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathfrak{C})$. Alors si $A \in \mathfrak{C}$, $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{M}_A$ donc $\mathfrak{M}(\mathfrak{C}) \subseteq \mathfrak{M}_A$. Si ensuite $B \in \mathfrak{M}(\mathfrak{C})$, $B \in \mathfrak{M}_A$ quel que soit $A \in \mathfrak{C}$ donc $A \in \mathfrak{M}_B$ quel que soit $A \in \mathfrak{C}$. Alors $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{M}_B$ donc $\mathfrak{M}(\mathfrak{C}) \subseteq \mathfrak{M}_B$.

On en déduit que $\mathfrak{M}(\mathfrak{C})$ est une tribu. En effet, $X \in \mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{M}(\mathfrak{C})$. Si $E \in \mathfrak{M}(\mathfrak{C})$, alors $E \in \mathfrak{M}_X$ donc $E^c \in \mathfrak{M}(\mathfrak{C})$. Si $E, F \in \mathfrak{M}(\mathfrak{C})$, $E \in \mathfrak{M}_F$ et $E \cup F \in \mathfrak{M}(\mathfrak{C})$. Enfin, si $E_k \in \mathfrak{M}(\mathfrak{C})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, les ensembles $\cup_{1 \leq k \leq n} E_k \in \mathfrak{M}(\mathfrak{C})$ croissent vers $\cup_{k \in \mathbb{N}} E_k \in \mathfrak{M}(\mathfrak{C})$.

Finalement, la définition de tribu engendrée implique $\mathfrak{T}(\mathfrak{C}) \subseteq \mathfrak{M}(\mathfrak{C})$. C.Q.F.D.

7.0.1 Le modèle probabiliste

Le modèle probabiliste de base utilise les concepts présentés dans cette section, avec une notation et une terminologie différentes.

Une **variable aléatoire** X est une grandeur associée à une expérience dont le résultat est imprévisible. Elle prend ses valeurs avec certaines probabilités. Sa **fonction de répartition** $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$, supposée donnée, spécifie la distribution de ces valeurs, $F_X(x)$ donnant la probabilité que X n'excède pas x. F est donc une fonction qui croît de 0 à 1 lorsque x croît de $-\infty$ à $+\infty$ et qui est continue à droite : $F_X(x) = F_X(x+)$ en chaque point $x \in \mathbb{R}$. On peut montrer qu'il existe une mesure borélienne $\mu_X : \mathfrak{B}_X \to [0,1]$ (où $\mathfrak{B}_X \supseteq \mathfrak{B}$) telle que

$$\mu_X(]-\infty, x]) = F_X(x).$$

Une façon d'obtenir μ_X consiste à reprendre la construction du chapitre 1 en remplaçant les longueurs $(b-a)$ des intervalles ouverts par les nombres $(F_X(b-) - F_X(a))$ dans l'équation (1) (exercice 9, page 79). La mesure d'un intervalle $]a,b]$ est maintenant $(F_X(b) - F_X(a))$ et celle d'un point x est $F_X(x) - F_X(x-)$. La mesure μ_X n'est bien sûr pas invariante sous translation. La probabilité que X prenne une valeur dans l'ensemble $E \in \mathfrak{B}_X$ est

$$\mu_X(E) = \int_E dF_X.$$

(Cette notation est utilisée de préférence à $\int_E d\mu_X$ pour désigner une **intégrale de Lebesgue-Stieltjes**). Si Ω désigne l'ensemble des résultats possibles de l'expérience aléatoire à laquelle X est associée ($X : \Omega \to \mathbb{R}$), la tribu des événements pour X est la tribu $\mathfrak{T}_X = X^{-1}(\mathfrak{B}_X)$ sur Ω et l'équation

$$P_X\left(X^{-1}(E)\right) = \mu_X(E)$$

définit une mesure de probabilité sur Ω (c'est-à-dire une mesure telle que $P_X(\Omega) = 1$).

La variable X est dite continue si sa fonction de répartition F_X est absolument continue ; la dérivée $f_X = F'_X$ s'appelle alors **fonction de densité** de probabilité de X et l'on a

$$\mu_X(E) = \int_E f_X(x)\ dx. \tag{4}$$

En effet, on a alors

$$\mu_X((a,b)) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(x)\ dx$$

pour tout intervalle (a,b) et l'équation (4) est valable pour tout ensemble ouvert d'abord, pour tout ensemble mesurable ensuite. À l'autre extrême, X est dite discrète si F_X est constante sauf pour des sauts $p_k = F_X(k) - F_X(k-) \geq 0$ aux entiers ; on a alors

$$\mu_X(E) = \sum_{k \in E} p_k.$$

On dit que X admet une **espérance mathématique** si $X \in \mathfrak{L}^1_{P_X}(\Omega)$ et que X admet une **variance** si $X \in \mathfrak{L}^2_{P_X}(\Omega)$. Puisque $P_X(\Omega) = 1$, toute variable admettant une variance admet aussi une espérance mathématique. L'espérance mathématique $\mathbb{E}(X)$ de X est le nombre défini par

$$\mathbb{E}(X) = \int_\Omega X\ dP_X$$

et la variance $\mathbb{V}(X)$ est donnée par la relation

$$\mathbb{V}(X) = \int_\Omega (X - \mathbb{E}(X))^2\ dP_X = \int_\Omega X^2\ dP_X - \mathbb{E}(X)^2.$$

L'inégalité de Tchebychev pour une variable aléatoire admettant une variance,

$$P_X\{\omega \mid |X(\omega) - \mathbb{E}(X)| \geq \sigma\} \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\sigma^2},$$

est facilement vérifiée. Considérant l'ensemble

$$\Omega_\sigma = \{\omega \mid |X(\omega) - \mathbb{E}(X)| \geq \sigma\},$$

on a

$$\begin{aligned} P_X\{\omega \mid |X(\omega) - \mathbb{E}(X)| \geq \sigma\} &= \int_{\Omega_\sigma} dP_X \\ &\leq \int_{\Omega_\sigma} \frac{(X(\omega) - \mathbb{E}(X))^2}{\sigma^2}\ dP_X \\ &\leq \int_\Omega \frac{(X(\omega) - \mathbb{E}(X))^2}{\sigma^2}\ dP_X = \frac{\mathbb{V}(X)}{\sigma^2} \end{aligned}$$

Lorsque X est continue et admet une espérance, celle-ci peut être calculée au moyen de la formule

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\ dx.$$

En effet, en vertu du théorème de la convergence dominée, on peut écrire que

$$\mathbb{E}(X) = \int_\Omega X\ dP_X$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\Bigg(\sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} P_X\ \left\{\omega \mid \frac{k-1}{2^n} \leq X(\omega) < \frac{k}{2^n}\right\} + n\,P_X\{\omega \mid n \leq X(\omega)\}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{-k+1}{2^n} P_X\ \left\{\omega \mid \frac{-k}{2^n} \leq X(\omega) < \frac{-k+1}{2^n}\right\} - n\,P_X\{\omega \mid X(\omega) < -n\}\Bigg)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\Bigg(\sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n}\,\mu_X\left(\left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)\right) + n\,\mu_X((n,+\infty[\,)$$

$$+ \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{-k+1}{2^n}\,\mu_X\left(\left(\frac{-k}{2^n}, \frac{-k+1}{2^n}\right)\right) - n\,\mu_X(\,]-\infty,n))\Bigg)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\Bigg(\sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \int_{(k-1)/2^n}^{k/2^n} f_X(x)\ dx + n\int_n^{+\infty} f_X(x)\ dx$$

$$\sum_{k=1}^{n2^n} \frac{-k+1}{2^n} \int_{-k/2^n}^{(-k+1)/2^n} f_X(x)\ dx - n\int_{-\infty}^{-n} f_X(x)\ dx\Bigg)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\ dx.$$

Le cas échéant, on montre de la même façon que

$$\mathbb{V}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\ dx - \mathbb{E}(X)^2.$$

Si X est discrète, les formules correspondantes sont

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{-\infty}^{+\infty} k p_k$$

et

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{-\infty}^{+\infty} k^2 p_k - \mathbb{E}(X)^2.$$

7.1 Exercices

1. Soit $\mathfrak{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ où $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forment une partition de X ($X = \sum_{k=1}^{n} A_k$). Déterminer $\mathfrak{T}(\mathfrak{F})$.
2. Soit $\mathfrak{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ où $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des parties quelconques de X. Déterminer $\mathfrak{T}(\mathfrak{F})$. Quelle est la cardinalité maximale de $\mathfrak{T}(\mathfrak{F})$?
3. Soit $\mathfrak{F} = \{A, B\}$. Déterminer $\mathfrak{M}(\mathfrak{F})$ et $\mathfrak{T}(\mathfrak{F})$.
4. Soient $E \subseteq \mathbb{R}$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable (relativement à la tribu de Lebesgue). Montrer qu'il existe une fonction $g : E \to \mathbb{R}$ borélienne (mesurable relativement à la tribu de Borel) qui coïncide presque partout (relativement à la mesure de Lebesgue) avec f.

   Suggestion : utiliser l'exercice 10 page 15.
5. Soient $(X, \mathfrak{T})$ un espace mesurable et $E \subseteq X$. Montrer que si $f : E \to \mathbb{R}$ est mesurable, $c \in \mathbb{R}$ et $p > 0$, les fonctions cf et $|f|^p$ sont mesurables.
6. Soient $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ une suite de nombres réels et $\{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ une suite de nombres positifs. On considère la fonction $\mu : \mathfrak{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ définie par
$$\mu(E) = \sum_{x_k \in E} p_k.$$
   Vérifier que μ est une mesure sur $\mathbb{R}$. Déterminer l'espace $\mathfrak{L}^1_\mu(\mathbb{R})$. Expliciter l'inégalité de Hölder.
7. Répondre aux mêmes questions si $\mu : \mathfrak{L} \to [0, +\infty]$ est définie par
$$\mu(E) = \int_E |g(x)|\; dx$$
   avec $g \in \mathfrak{L}^1(\mathbb{R})$. La tribu de Lebesgue est-elle complète relativement à cette mesure ?
8. Soit $(X, \mathfrak{T}, \mu)$ un espace mesuré. Supposons que $\mathfrak{S}$ soit une autre tribu sur X et que $\nu : \mathfrak{S} \to [0, +\infty]$ soit une mesure sur X telles que $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{S}$, que la restriction de ν à $\mathfrak{T}$ coïncide avec μ et que $\mathfrak{S}$ soit $\nu-$complète. Montrer que $\mathfrak{T}_\mu \subseteq \mathfrak{S}$ et que la restriction de ν à $\mathfrak{T}_\mu$ coïncide avec μ.
9. La fonction $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ croissant de 0 à 1 lorsque x croît de $-\infty$ à $+\infty$ et étant supposée continue à droite, on pose, pour $E \subseteq \mathbb{R}$,
$$\mu^*_F(E) = \inf \left\{ \sum_k (F(b_k-) - F(a_k)) \mid E \subseteq \bigcup_k \,]a_k, b_k[\right\},$$

la borne inférieure étant calculée sur la famille des suites finies ou infinies d'intervalles ouverts $\{\ ]a_k, b_k[\ \}_k$ recouvrant E. Montrer que
- $\mu_F^*([a,b]) = F(b) - F(a-)$;
- $\mu_F^*(]a,b]) = F(b) - F(a)$;
- $\mu_F^*(]a,b[) = F(b-) - F(a)$;
- pour tout $A \subseteq \mathbb{R}$ et pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\mu_F^*(A\,]a,+\infty[\,) + \mu_F^*(A\,]a,+\infty[^c\,) \leq \mu_F^*(A).$$

8 INTÉGRALES ITÉRÉES

Pour bien étudier les conditions sous lesquelles l'équation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\ dy = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\ dx,$$

est valable il est nécessaire d'introduire la notion d'intégrale double,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\ dxdy,$$

qui est une intégrale relativement à une mesure dans le plan. Et pour étendre la théorie de Lebesgue au plan, nous allons d'abord définir une mesure sur la tribu produit engendrée par les rectangles mesurables de la forme $A \times B$ puis nous compléterons cette tribu relativement à la mesure construite, obtenant ainsi la tribu de Lebesgue $\mathfrak{L}_2$ et la mesure de Lebesgue λ_2 sur $\mathbb{R}^2$. La propriété cruciale sera ici celle de la σ-finitude de la mesure de Lebesgue λ : l'espace $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme une réunion dénombrable d'ensembles de mesure finie. Nous verrons ensuite comment le calcul d'une intégrale double se ramène au calcul itéré de deux intégrales simples.

La **tribu produit** $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{L}$ sur $\mathbb{R}^2$ est la tribu engendrée par la famille $\mathfrak{R}$ des rectangles mesurables, c'est-à-dire des ensembles R de la forme

$$R = A \times B \ \text{ avec } \ A, B \in \mathfrak{L}.$$

Cette tribu est aussi la tribu engendrée par la famille $\mathfrak{E}$ des ensembles élémentaires S, réunions finies de rectangles mesurables disjoints,

$$S = \sum_{k=1}^{n} R_k \ \text{ avec } \ R_k \in \mathfrak{R},$$

puisque $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{T}(\mathfrak{R})$. Observons que $\mathfrak{E}$ est un clan. En effet, on a évidemment $\mathbb{R}^2 \in \mathfrak{R}$, $RR' \in \mathfrak{R}$ et $R^c \in \mathfrak{E}$. Les relations

$$\sum_{k=1}^{n} R_k \sum_{j=1}^{n'} R'_j = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n'} R_k R'_j$$

et

$$\left(\sum_{k=1}^{n} R_k\right)^c = \bigcap_{k=1}^{n} R_k^c$$

montrent que $\mathfrak{E}$ est fermée sous les intersections finies et le passage au complémentaire. La tribu $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{L}$ est donc également la classe monotone engendrée par $\mathfrak{E}$:

$$\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{L} = \mathfrak{T}(\mathfrak{R}) = \mathfrak{T}(\mathfrak{E}) = \mathfrak{M}(\mathfrak{E}).$$

Théorème 37 *La tribu $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R}^2)$ possède les propriétés suivantes :*

1. *Tout ensemble ouvert O appartient à $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{L}$.*
2. *Les sections*

$$E_x = \{y \mid (x,y) \in E\} \quad \text{et} \quad E^y = \{x \mid (x,y) \in E\}$$

d'un ensemble $E \in \mathfrak{L} \otimes \mathfrak{L}$ sont dans $\mathfrak{L}$.

3. *Tout translaté $E + (x_0, y_0)$ d'un ensemble $E \in \mathfrak{L} \otimes \mathfrak{L}$ est dans $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{L}$.*

Démonstration.

Si $(x,y) \in O$, il existe deux intervalles ouverts d'extrémités rationnelles I_x et I_y tels que $(x,y) \in I_x \times I_y \subseteq O$. Ces rectangles $I_x \times I_y$ étant dénombrables,

$$O = \bigcup_{(x,y)\in O} I_x \times I_y$$

appartient à $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{L}$.

Soit $\mathfrak{A}$ la famille des ensembles mesurables $E \in \mathfrak{L} \otimes \mathfrak{L}$ tels que E_x appartienne à $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{L}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Observons les identités

$$(A \times B)_x = \begin{cases} B & \text{si } x \in A \\ \emptyset & \text{si } x \notin A, \end{cases}$$

$$(E^c)_x = (E_x)^c$$

et

$$(\bigcup_k E_k)_x = \bigcup_k (E_k)_x.$$

Elles impliquent que $\mathfrak{A}$ est une tribu contenant la famille $\mathfrak{R}$ des rectangles mesurables donc que $\mathfrak{A} = \mathfrak{L} \otimes \mathfrak{L}$.

Pour (x_0, y_0) arbitrairement fixé, considérons la famille $\mathfrak{A}_1$ des ensembles $E \in \mathfrak{L} \otimes \mathfrak{L}$ tels que le translaté $E + (x_0, y_0) \in \mathfrak{L} \otimes \mathfrak{L}$. En vertu des relations

$$A \times B + (x_0, y_0) = (A + x_0) \times (B + y_0),$$

$$(E + (x_0, y_0))^c = E^c + (x_0, y_0)$$

et

$$\left(\bigcup_k E_k\right) + (x_0, y_0) = \bigcup_k (E_k + (x_0, y_0)),$$

$\mathfrak{A}_1$ est une tribu contenant $\mathfrak{R}$ donc $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{L} \otimes \mathfrak{L}$. C.Q.F.D.

Il suit de ce théorème que $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{L}$ contient la tribu borélienne $\mathfrak{B}_2$ du plan et que, si $E \in \mathfrak{L} \otimes \mathfrak{L}$, toute fonction continue $f : E \to \mathbb{R}$ est mesurable.

De plus, si $f : E \to \mathbb{R}$ est mesurable, les fonctions partielles $y \mapsto f_x(y)$ et $x \mapsto f^y(x)$ définies par

$$f_x(y) = f(x, y) = f^y(x)$$

sont mesurables. On a en effet que

$$\{y \mid f_x(y) > \alpha\} = \{(x, y) \mid f(x, y) > \alpha\}_x$$

et que

$$\{x \mid f^y(x) > \alpha\} = \{(x, y) \mid f(x, y) > \alpha\}^y.$$

Théorème 38 *Il existe une et une seule mesure* $\lambda_2 : \mathfrak{L} \otimes \mathfrak{L} \to [0, +\infty]$ *telle que*

$$\lambda_2(A \times B) = \lambda(A)\lambda(B)$$

pour tout rectangle mesurable $A \times B$*. Cette* ***mesure produit*** λ_2 *est invariante sous translation.*

Démonstration.

Unicité. Supposons que $\mu, \nu : \mathfrak{L} \otimes \mathfrak{L} \to [0, +\infty]$ sont deux mesures telles que, pour tout $A, B \in \mathfrak{L}$,

$$\mu(A \times B) = \nu(A \times B) = \lambda(A)\lambda(B).$$

Alors, pour tout $S \in \mathfrak{E}$,

$$\mu(S) = \nu(S).$$

Soit $Q_n = [-n, n] \times [-n, n]$ et considérons la famille

$$\mathfrak{M} = \{E \in \mathfrak{L} \otimes \mathfrak{L} \mid \mu(EQ_n) = \nu(EQ_n) \ \text{ pour tout } \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Les propriétés de continuité des mesures montrent que $\mathfrak{M}$ est une classe monotone. Comme elle contient $\mathfrak{E}$, elle contient aussi $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{L}$. Pour tout $E \in \mathfrak{L} \otimes \mathfrak{L}$, on a donc, toujours par continuité,

$$\mu(E) = \lim_{n \to +\infty} \mu(EQ_n) = \lim_{n \to +\infty} \nu(EQ_n) = \nu(E).$$

Existence. Observons d'abord que

$$\lambda(A)\lambda(B) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}_A(x)\ dx \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}_B(y)\ dy$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}_{A\times B}(x,y)\ dy = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}_{A\times B}(x,y)\ dx.$$

Considérons alors la famille $\mathfrak{M}_1$ des ensembles $E \in \mathfrak{L} \otimes \mathfrak{L}$ pour lesquels les fonctions

$$x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}_{EQ_n}(x,y)\ dy \quad \text{et} \quad y \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}_{EQ_n}(x,y)\ dx$$

sont mesurables et satisfont l'équation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}_{EQ_n}(x,y)\ dy = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}_{EQ_n}(x,y)\ dx$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le théorème de la convergence monotone montre que $\mathfrak{M}_1$ est une classe monotone. Comme elle contient $\mathfrak{E}$, elle contient $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{L}$. Pour tout $E \in \mathfrak{L} \otimes \mathfrak{L}$, on a donc, toujours par convergence monotone,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}_E(x,y)\ dy = \lim_{n \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}_{EQ_n}(x,y)\ dy$$
$$= \lim_{n \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}_{EQ_n}(x,y)\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}_E(x,y)\ dx.$$

Posons alors

$$\lambda_2(E) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}_E(x,y)\ dy = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}_E(x,y)\ dx$$

et vérifions que λ_2 est une mesure invariante sous translation sur $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{L}$. On a bien $\lambda_2(\emptyset) = 0$. Ensuite, si les ensembles mesurables E_k sont deux à deux disjoints,

$$\lambda_2\left(\sum_k E_k\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}_{\sum_k E_k}(x,y)\ dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_k \mathbb{I}_{E_k}(x,y)\ dy$$

$$= \sum_k \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}_{E_k}(x,y)\ dy = \sum_k \lambda_2(E_k).$$

Finalement, la mesure λ_2 est invariante sous translation parce que λ l'est :

$$\lambda_2(E+(x_0,y_0)) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}_{E+(x_0,y_0)}(x,y)\ dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}_E(x-x_0,y-y_0)\ dy = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}_E(x-x_0,y)\ dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}_E(x-x_0,y)\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}_E(x,y)\ dx = \lambda_2(E).$$

C.Q.F.D.

Une **intégrale double** est une intégrale par rapport à la mesure λ_2 ; on retient l'écriture usuelle :

$$\int_{\mathbb{R}^2} f\ d\lambda_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\ dxdy$$

et

$$\int_E f\ d\lambda_2 = \iint_E f(x,y)\ dxdy.$$

Une telle intégrale s'évalue habituellement au moyen d'intégrales itérées, généralisant ainsi la relation qui nous a servi à définir λ_2 :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}_E\ dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}_E(x,y)\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}_E(x,y)\, dx.$$

C'est l'objet du théorème suivant.

Théorème 39 (Tonelli-Fubini) *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Alors*

1. *Si f est positive, les fonctions*

$$x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\ dy \quad \text{et} \quad y \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\ dx$$

sont mesurables et

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f\ dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\ dy = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\ dx.$$

2. *Si f est intégrable, les fonctions*

$$x \mapsto f(x,y) \quad \text{et} \quad y \mapsto f(x,y)$$

sont intégrables pour presque tout y et presque tout x respectivement, les fonctions définies presque partout par

$$y \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\ dx \quad \text{et} \quad x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\ dy$$

(et égales à 0 ailleurs) sont intégrables et

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f\ dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\ dy.$$

Démonstration.

Supposons f positive. Le résultat est vrai si f est la fonction indicatrice d'un ensemble mesurable. Par linéarité, il est vrai pour une fonction étagée. Et par convergence monotone, il est vrai pour une fonction quelconque.

Supposons f intégrable. Le résultat suit de la première partie en l'appliquant aux fonctions $|f|$, f_+ et f_- . C.Q.F.D.

Exemple. Soit à calculer le volume V du solide compris entre la surface $z = xy$ et le plan $z = 0$ au dessus du triangle $E : x \geq 0$, $y \geq 0$ et $x + y \leq 1$. En vertu du théorème de Tonelli, on a

$$\begin{aligned} V &= \int\int_E xy\ dxdy = \int\int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{I}_E(x,y)\ xy\ dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}_E(x,y)\ xy\ dy = \int_{-\infty}^{+\infty} x\ dx \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}_{E_x}(y)\ y\ dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x\ dx \int_{E_x} y\ dy = \int_0^1 x\ dx \int_0^{1-x} y\ dy = \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

Exemple. Désignant maintenant par E le triangle de sommets $(0,0),(1,0)$ et $(1,1)$, on a, en vertu du théorème de Fubini et puisque

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} \left| \mathbb{I}_E(x,y)\frac{\sin 2\pi x}{x} \right| \ dxdy < +\infty,$$

que

$$\begin{aligned}\int_0^1 dy \int_y^1 \frac{\sin 2\pi x}{x} \ dx &= \int\int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{I}_E(x,y)\frac{\sin 2\pi x}{x} \ dxdy \\ &= \int_0^1 dx \int_0^x \frac{\sin 2\pi x}{x} \ dy = 0.\end{aligned}$$

Exemple. L'hypothèse d'intégrabilité de f est essentielle dans le théorème de Fubini. On a ainsi

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} \ dy = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^2} = \frac{1}{2}$$

alors que

$$\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} \ dx = \int_0^1 \frac{-dy}{(1+y)^2} = -\frac{1}{2}.$$

Évidemment,

$$\begin{aligned}\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{|x-y|}{(x+y)^3} \ dy &= \int_0^1 dx \left(\int_0^x \frac{x-y}{(x+y)^3} \ dy + \int_x^1 \frac{y-x}{(x+y)^3} \ dy \right) \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{(1+x)^2} \right) \ dx = +\infty.\end{aligned}$$

La tribu produit $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{L}$ n'est pas complète relativement à la mesure λ_2. Si en effet $E \subseteq \mathbb{R}$ n'est pas mesurable, $E \times \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^2$ n'est pas mesurable bien que contenu dans l'ensemble de λ_2-mesure nulle $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$. La **tribu de Lebesgue** $\mathfrak{L}_2$ est la tribu obtenue en complétant $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{L}$ par rapport à λ_2 :

$$\mathfrak{L}_2 = (\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{L})_{\lambda_2}$$

et la **mesure de Lebesgue** est le prolongement de λ_2 à $\mathfrak{L}_2$.

Un ensemble $E \subseteq \mathbb{R}^2$ appartient à $\mathfrak{L}_2$ si et seulement si il est de la forme

$$E = E' + N$$

où E' appartient à $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{L}$ et $\lambda_2(N) = 0$. De même, une fonction f est mesurable relativement à $\mathfrak{L}_2$ si et seulement si elle peut se mettre sous la forme

$$f = f' + f_N$$

où f' est mesurable relativement à $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{L}$ et $f_N = 0$ λ_2-presque partout, comme on le voit facilement en considérant d'abord des fonctions indicatrices d'ensembles mesurables puis des fonctions étagées puis des fonctions positives ...

1. La propriété d'invariance sous translation est conservée. Si $E \in \mathfrak{L}_2$ et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, alors $E + (x_0, y_0) \in \mathfrak{L}_2$ et $\lambda_2(E + (x_0, y_0)) = \lambda_2(E)$.
2. Le théorème de Tonelli-Fubini reste vrai si la fonction f y est seulement mesurable par rapport à la tribu de Lebesgue. Il suffit en effet de voir que si f_N est une fonction positive qui s'annule si $(x, y) \notin N$ avec $\lambda_2(N) = 0$, les fonctions

$$x \mapsto f_N(x, y)$$

sont mesurables pour presque tout y parce que nulles presque partout pour presque tout y. En prolongeant ces fonctions à $\mathbb{R}$ par 0, la fonction définie pour presque tout y par

$$y \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_N(x, y)\ dx$$

et prolongée à $\mathbb{R}$ par 0 sera mesurable parce que nulle. Et l'on obtiendra

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f_N(x, y)\ dx = 0.$$

Soit donc $B \in \mathfrak{L} \otimes \mathfrak{L}$ tel que $N \subseteq B$ et $\lambda_2(B) = 0$. Alors B^y est mesurable et

$$\lambda(B^y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}_B(x, y)\ dx = 0$$

pour presque tout y puisque

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}_B(x, y)\ dx = 0.$$

En excluant les valeurs de y pour lesquelles $\lambda(B^y) > 0$, les fonctions $x \mapsto f_N(x, y)$ ont la propriété requise : si $x \notin B^y$, $f_N(x, y) = 0$.

8.1 Exercices

1. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions mesurables. Montrer que la fonction $(x, y) \mapsto f(x) + g(y)$ est mesurable (relativement à la tribu produit).
2. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive. Montrer que l'ensemble
$$E = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b \ , \ 0 \leq y \leq f(x)\}$$
est mesurable (relativement à la tribu produit) et calculer sa mesure.
3. À $E \subseteq \mathbb{R}$ associons l'ensemble $\widetilde{E} \subseteq \mathbb{R}^2$ défini par
$$\widetilde{E} = \{(x, y) \mid x - y \in E\}$$
et considérons la famille
$$\mathfrak{T} = \{E \in \mathfrak{B} \mid \widetilde{E} \in \mathfrak{B}_2\}.$$
Montrer que $\mathfrak{T} = \mathfrak{B}$.
4. Déduire du théorème de Tonelli et de la relation
$$\int_0^{+\infty} e^{-z^2} \ dz = \int_0^{+\infty} xe^{-x^2y^2} \ dy \ \text{ si } \ x > 0$$
que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} \ dx = \sqrt{2\pi}.$$
5. Calculer
$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) \ dy \ , \ \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) \ dx \ \text{ et } \ \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y)| \ dxdy$$
pour la fonction
$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$
6. Utiliser le théorème de Tonelli pour calculer de deux manières l'intégrale
$$\int_a^b dx \int_0^1 y^x \ dy \ , \ 0 < a < b$$
et en déduire la valeur de
$$\int_0^1 \frac{y^b - y^a}{\log y} \ dy.$$

7. Utiliser le théorème de Fubini pour calculer de deux manières l'intégrale

$$\int_0^A \int_0^A e^{-xy} \sin x \ dxdy$$

et en déduire que

$$\lim_{A \to +\infty} \int_0^A \frac{\sin x}{x} \ dx = \frac{\pi}{2}.$$

9 APPLICATIONS

La représentation d'une fonction par une série trigonométrique

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k(f)\ e^{ik\pi x/L}$$

sur un intervalle fini $(-L, +L)$ ou par une intégrale trigonométrique

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)\ e^{i\xi x}\ d\xi$$

sur l'axe réel tout entier sont des outils essentiels des mathématiques appliquées, à la base du génie électrique, par exemple. Historiquement, elles furent l'une des principales motivations du développement de la théorie de l'intégration. Nous allons illustrer cette théorie en présentant les démonstrations de quelques résultats de base de « l'analyse harmonique », la branche des mathématiques qui traite de la représentation des fonctions par des séries ou par des intégrales trigonométriques et de ses diverses conséquences.

9.1 Série de Fourier

Des fonctions complexes apparaissent dans les expressions précédentes nécessitant une petite extension de nos définitions.

Soit $E \subseteq \mathbb{R}$. Une fonction à valeurs complexes $f : E \to \mathbb{C}$ est mesurable si sa partie réelle $\Re f$ et sa partie imaginaire $\Im f$ le sont, par définition. Une fonction mesurable $f : E \to \mathbb{C}$ est dite intégrable si son module $|f| = \sqrt{(\Re f)^2 + (\Im f)^2}$ l'est. Il revient au même de supposer que $\Re f$ et $\Im f$sont intégrables. Si f est intégrable, on pose

$$\int_E f = \int_E \Re f + i \int_E \Im f.$$

L'espace $\mathfrak{L}^1_{\mathbb{C}}(E)$ des fonctions complexes intégrables sur E forme un espace vectoriel complexe sur lequel $f \mapsto \int_E f$ est une forme linéaire. L'inégalité de triangle

$$\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f|$$

reste valable pour les fonctions à valeurs complexes. Si le membre de gauche n'est pas nul, en effet, on peut écrire, pour un nombre $\alpha \in \mathbb{R}$ approprié, que

$$\left|\int_E f\right| = \left(\int_E f\right)\ e^{-i\alpha} = \int_E f\ e^{-i\alpha}$$
$$= \Re\left(\int_E f\ e^{-i\alpha}\right) = \int_E \Re(f\ e^{-i\alpha}) \leq \int_E |f|.$$

Il suit aussi de ces définitions que le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, les inégalités de Hölder et Minkowski, le théorème de Riesz-Fischer sur la complétude des espaces $\mathfrak{L}^p_{\mathbb{C}}(E)$et le théorème de Fubini sur les intégrales itérées restent valables pour les fonctions à valeurs complexes.

Les définitions et les calculs qui suivent sont tous basées sur **l'orthogonalité** des exponentielles complexes :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{ikt}\ e^{-ijt}\ dt = \mathbb{I}_{\{k\}}(j).$$

On dénotera par $\mathfrak{L}^p_{2\pi}$ l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ périodiques de période 2π et appartenant à l'espace $\mathfrak{L}^p_{\mathbb{C}}([-\pi,\pi[\,)$ et par $C_{2\pi}$ l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ périodiques de période 2π et continues (pour appartenir à $C_{2\pi}$ une fonction f continue sur $[-\pi,\pi]$ doit donc satisfaire la relation $f(-\pi) = f(\pi)$).

Soit $f \in \mathfrak{L}^1_{2\pi}$. Les **coefficients de Fourier** de f sont les nombres $c_k(f)$ définis par les équations

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\ e^{-ikt}\ dt$$

et sa **série de Fourier** est la série trigonométrique

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_k(f)\ e^{ikx}.$$

Les sommes partielles de cette série seront dénotées par $S_n(f)$,

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\ e^{ikx},$$

et il s'agit étudier la question de leur convergence vers la fonction f qui les a engendrées.

Théorème 40 *Deux fonctions $f, g \in \mathfrak{L}^1_{2\pi}$ ayant les mêmes coefficients de Fourier coïncident presque partout.*

Démonstration.

Il revient au même de montrer qu'une fonction $f \in \mathfrak{L}^1_{2\pi}$ ayant tous ses coefficients de Fourier nuls doit s'annuler presque partout. En utilisant la formule d'Euler, on voit que $c_k(f) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ si et seulement si $c_k(\Re f) = 0$ et $c_k(\Im f) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. On peut donc supposer f réelle.

Considérons d'abord une fonction $f \in C_{2\pi}$ (à valeurs réelles). Si ses coefficients de Fourier sont tous nuls, on aura

$$\frac{1}{2\pi}\int_{a-\pi}^{a+\pi} f(t)T_n(t)\ dt = 0 \tag{5}$$

quelque soit $a \in \mathbb{R}$ et quel que soit le polynôme trigonométrique

$$T_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k\ e^{ikx}.$$

Supposons qu'elle est strictement positive en un point a. Si $\delta > 0$ est assez petit, on a

$$f(x) \geq \frac{f(a)}{2} > 0 \ \text{ pour tout } \ x \in [a-\delta, a+\delta].$$

Considérons le polynôme trigonométrique

$$T_n(x) = \left(\frac{1+\cos(x-a)}{1+\cos\delta}\right)^n.$$

Alors, en contradiction avec l'équation (5), on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{a-\pi}^{a+\pi} f(t)T_n(t)\ dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(s+a)T_n(s+a)\ ds$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{|s|<\delta} f(s+a)T_n(s+a)\ ds + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|s|<\pi} f(s+a)T_n(s+a)\ ds > 0$$

dès que n est assez grand puisque la première intégrale tend vers $+\infty$ et que la seconde tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

Pour traiter le cas général, introduisons la fonction

$$F(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t)\ dt.$$

Elle est absolument continue et $F(-\pi) = F(\pi) = 0$ (car $c_0(f) = 0$). Si $k \neq 0$, une intégration par parties montre que

$$c_k(F) = \frac{c_k(f)}{ik} = 0.$$

En vertu du cas continu, la fonction

$$F(x) - c_0(F)$$

est identiquement nulle et la fonction f qui en est la dérivée presque partout est nulle presque partout. C.Q.F.D.

Remarque. Il suit de ce théorème que si

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_k(f)| < +\infty,$$

on a

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k(f)\ e^{ikx}$$

presque partout. La somme g de la série trigonométrique précédente est en effet un fonction dans $C_{2\pi}$ admettant les nombres $c_k(f)$ pour coefficients de Fourier comme on le voit en intégrant la série terme à terme (convergence dominée) :

$$\begin{aligned} c_j(g) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ikx} \right) e^{-ijx}\ dx \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k(f) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{ikx} e^{-ijx}\ dx = c_j(f). \end{aligned}$$

On ne peut donc avoir

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_k(f)| < +\infty$$

que si la fonction f coïncide presque partout avec une fonction dans $C_{2\pi}$. Le théorème suivant, chronologiquement l'un des premiers de l'analyse harmonique, est d'applicabilité plus générale puisqu'il couvre effectivement tous les cas rencontrés en pratique.

Théorème 41 (Dirichlet) *Soit $f \in \mathfrak{L}^1_{2\pi}$ une fonction à variation bornée sur $[-\pi, \pi]$. Alors*

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_k(f)\ e^{ikx} = \frac{f(x-) + f(x+)}{2}.$$

Démonstration.

Une fonction complexe est à variation bornée si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont. On peut donc supposer f réelle. On a

$$f(x) = \frac{f(x-) + f(x+)}{2}$$

partout sauf peut-être aux points d'un ensemble fini ou dénombrable N. Modifions la fonction sur cet ensemble N de telle sorte que l'équation précédente soit valable partout et montrons que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(f)(x) = f(x)$$

en un point x arbitraire. On a

$$\begin{aligned} S_n(f)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)}\ dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\frac{\sin(2n+1)(x-t)/2}{\sin(x-t)/2}\ dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x-t)\frac{\sin(2n+1)t/2}{\sin t/2}\ dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \left(\frac{f(x-t)+f(x+t)}{2}\right)\frac{\sin(2n+1)t/2}{\sin t/2}\ dt. \end{aligned}$$

Comme, en particulier,

$$S_n(1)(x) = 1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(2n+1)t/2}{\sin t/2}\ dt,$$

on peut écrire

$$S_n(f)(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{f(x-t)+f(x+t)}{2} - f(x)\right)\frac{\sin(2n+1)t/2}{\sin t/2}\ dt.$$

Introduisons la fonction de $\mathfrak{L}^1_{2\pi}$ définie sur l'intervalle $[-\pi, \pi[$ par la relation

$$\varphi_x(t) = \left(\frac{f(x-t)+f(x+t)}{2} - f(x)\right)\mathbb{I}_{[0,\pi[}(t).$$

Elle est à variation bornée sur $[-\pi, \pi]$, continue à l'origine et il s'agit de montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi_x(t) \frac{\sin(2n+1)t/2}{\sin t/2}\ dt = 0.$$
Puisque, en vertu de l'exercice 1 page 110, les coefficients de Fourier d'une fonction intégrable tendent vers 0, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi_x(t) \cos nt\ dt = 0,$$

et il faut en fait voir que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi_x(t) \cot \frac{t}{2} \sin nt\ dt = 0. \tag{6}$$

Le raisonnement qui nous le permettra repose sur l'observation que φ_x étant à variation bornée sur $[-\pi, \pi]$, $\operatorname{var}(\varphi_x, [\psi, \eta])$ tend vers 0 lorsque η tend vers 0 et ce, quel que soit ψ tel que $0 < \psi < \eta$. Si cela était faux en effet, on pourrait trouver un nombre $\delta > 0$ et une suite d'intervalles disjoints $[\psi_k, \eta_k]$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ tels que $\operatorname{var}(\varphi_x, [\psi_k, \eta_k]) > \delta$. On en déduirait que $\operatorname{var}(\varphi_x, [\psi_K, \eta_1]) > K\delta$ quel que soit $K \in \mathbb{N}$ contredisant ainsi l'hypothèse que φ_x est à variation bornée sur $[-\pi, \pi]$.

Soit donc $\epsilon > 0$ arbitraire. Choisissons $\eta > 0$ tel que $\operatorname{var}(\varphi_x, [\psi, \eta]) < \epsilon/3$ quel que soit ψ tel que $0 < \psi < \eta$. Les calculs suivants utilisent les inégalités

$$\frac{2}{\pi} x \leq \sin x \leq x \quad \text{si} \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

qui traduisent la concavité du sinus sur $[0, \pi/2]$. On obtient d'abord

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{\eta}^{\pi} \varphi_x(t) \cot \frac{t}{2} \sin nt \right|\ dt < \frac{\epsilon}{3}$$

dès que $n \geq n_1$ en vertu de l'exercice 1 page 110 appliqué à la fonction

$$t \mapsto \varphi_x(t) \cot \frac{t}{2} \mathbb{I}_{[\eta,\pi]}(t)$$

puis

$$\begin{aligned}\left| \frac{1}{\pi} \int_{\pi/n}^{\eta} \varphi_x(t) \cot \frac{t}{2} \sin nt\ dt \right| &= \cot \frac{\pi}{2n} \left| \frac{1}{\pi} \int_{\pi/n}^{\eta} \varphi_x(t) \sin nt\ dt \right| \\ &\leq n\, \frac{1}{4n}\ \operatorname{var}(\varphi_x, [\pi/n, \eta]) < \frac{\epsilon}{3}\end{aligned}$$

en vertu des exercices 17 page 69 (le deuxième théorème de la moyenne) et 2 page 111 (les coefficients d'une fonction à variation bornée sont majorés par la variation de la fonction divisée par l'indice du coefficient) et enfin, utilisant la continuité de la fonction φ_x à l'origine,

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/n} \varphi_x(t)\cot\frac{t}{2}\sin nt\ dt\right| \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/n} \sup\{\,|\varphi_x(t)| \mid 0 \leq t \leq \pi/n\}\,\pi n\ dt < \frac{\epsilon}{3}$$

dès que $n \geq n_2$. On aura donc

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi_x(t)\cot\frac{t}{2}\sin nt\ dt\right| < \epsilon$$

dès que n est assez grand. C.Q.F.D.

Les sommes partielles $S_n(f)$ peuvent converger vers la fonction f de plus d'une manière.

Théorème 42 *Soit $f \in \mathfrak{L}^2_{2\pi}$. Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \|S_n(f) - f\|_2 = 0.$$

De plus,

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |f(t)|^2\ dt.$$

Réciproquement, si

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 < +\infty,$$

il existe $f \in \mathfrak{L}^2_{2\pi}$ telle que

$$c_k(f) = c_k.$$

Démonstration.

Les sommes partielles $S_n(f)$ d'une fonction $f \in \mathfrak{L}^2_{2\pi}$ possèdent une propriété de meilleure approximation. Soit

$$T_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k\ e^{ikx}$$

un polynôme trigonométrique arbitraire de degré n. Alors

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|f(t)-T_n(t)|^2dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|f(t)|^2dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(t)\overline{T_n(t)}dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\overline{f(t)}T_n(t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|T_n(t)|^2dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|f(t)|^2dt - \sum_{k=-n}^{n}c_k(f)\overline{c_k} - \sum_{k=-n}^{n}\overline{c_k(f)}c_k + \sum_{k=-n}^{n}|c_k|^2$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|f(t)|^2dt - \sum_{k=-n}^{n}|c_k(f)|^2 + \sum_{k=-n}^{n}|c_k(f)-c_k|^2$$

$$\geq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|f(t)|^2dt - \sum_{k=-n}^{n}|c_k(f)|^2.$$

On a égalité si et seulement si $c_k = c_k(f)$ pour tout $-n \leq k \leq n$. Ceci montre que, de tous les polynômes trigonométriques d'ordre n possibles, $S_n(f)$ est celui qui approche le mieux la fonction f en moyenne quadratique et entraîne

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|f(t)-S_n(f)(t)|^2dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|f(t)|^2dt - \sum_{k=-n}^{n}|c_k(f)|^2 \qquad (7)$$

donc

$$0 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|f(t)|^2dt - \sum_{k=-n}^{n}|c_k(f)|^2.$$

L'entier n étant arbitraire, on en déduit l'inégalité de Bessel

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}|c_k(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|f(t)|^2\ dt$$

et, en particulier, la convergence de la série $\sum_{-\infty}^{+\infty}|c_k(f)|^2$. Alors

$$\|S_n(f)-S_m(f)\|_2^2 = \int_{-\pi}^{+\pi}\left|\sum_{n<|k|\leq m}c_k(f)\ e^{ikt}\right|^2\ dt = 2\pi\sum_{n<|k|\leq m}|c_k(f)|^2$$

et

$$\lim_{n,m\to+\infty}\|S_n(f)-S_m(f)\|_2 = 0.$$

Le théorème de Riesz-Fischer implique qu'il existe une fonction $g \in \mathfrak{L}^2_{2\pi}$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \|S_n(f) - g\|_2 = 0.$$

Cette fonction g a les mêmes coefficients de Fourier que la fonction f. En effet,

$$c_k(g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} g(t)\ e^{-ikt}\ dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} S_n(f)(t)\ e^{-ikt}\ dt = c_k(f),$$

la permutation de la limite et de l'intégrale étant justifiée par la convergence en moyenne quadratique de $S_n(f)$ vers g et l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} S_n(f)(t)\ e^{-ikt}\ dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} g(t)\ e^{-ikt}\ dt\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|S_n(f) - g\|_2.$$

On a donc $f = g$ presque partout et

$$\lim_{n\to+\infty} \|S_n(f) - f\|_2 = 0.$$

En vertu de l'équation (7), l'identité de Parseval

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |f(t)|^2 dt - \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2$$

est équivalente à la convergence en moyenne quadratique des sommes $S_n(f)$ vers la fonction f.

Enfin, si les nombres c_k sont tels que

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 < +\infty,$$

le raisonnement précédent montre que les sommes partielles de la série

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_k\ e^{ikx}$$

satisfont le critère de Cauchy et donc convergent en moyenne quadratique vers une fonction $f \in \mathfrak{L}^2_{2\pi}$ qui admet pour coefficients de Fourier les nombres c_k donnés. C.Q.F.D.

9.2 Transformée de Fourier

Soit $f \in \mathfrak{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$. Sa **transformée de Fourier** est la fonction $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\xi t}\, dt.$$

En vertu du théorème de Lebesgue sur la convergence dominée, $\hat{f}$ est une fonction continue, bornée et

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1.$$

Exemple. Soit

$$n(x) = e^{-x^2/2}.$$

Alors, la dérivation sous le signe intégral et l'intégration par parties sur un intervalle de longueur infinie étant toutes les deux justifiées à l'aide du théorème de la convergence dominée, on a

$$\hat{n}'(\xi) = \frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\, e^{-i\xi t}\, dt\right)$$
$$= \frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\, \cos\xi t\, dt\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} -t\, e^{-t^2/2}\, \sin\xi t\, dt$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\, \xi\cos\xi t\, dt = -\xi\, \hat{n}(\xi).$$

Cette équation différentielle, jointe à la condition initiale $\hat{n}(0) = 1$, entraîne

$$\hat{n}(\xi) = e^{-\xi^2/2}.$$

La fonction n est donc sa propre transformée de Fourier.

Considérons la fonction

$$n_\sigma(x) = n(\frac{x}{\sigma}) = e^{-x^2/2\sigma^2}.$$

Sa transformée de Fourier est

$$\hat{n}_\sigma(\xi) = \sigma\hat{n}(\sigma\xi) = \sigma\, e^{-\sigma^2\xi^2/2}.$$

Ces deux fonctions jouissent des propriétés suivantes :

1. la fonction n_σ est positive et croît vers 1 lorsque σ tend vers $+\infty$;

2. la fonction $\hat{n}_\sigma$ est positive et

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{n}_\sigma(\xi)\ d\xi = 1;$$

3. si $\varphi \in \mathfrak{L}^\infty_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ est continue à l'origine,

$$\lim_{\sigma \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{n}_\sigma(\xi)\ \varphi(\xi)\ d\xi = \varphi(0); \tag{8}$$

   les calculs suivants et le théorème de la convergence dominée justifient en effet cette relation :

$$\left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{n}_\sigma(\xi)\ \varphi(\xi)\ d\xi - \varphi(0) \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{n}_\sigma(\xi)\ (\varphi(\xi) - \varphi(0))\ d\xi \right|$$
$$\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{n}_\sigma(\xi)\ |\varphi(\xi) - \varphi(0)|\ d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2/2}\ |\varphi(\eta/\sigma) - \varphi(0)|\ d\eta;$$

4. pour toute fonction $f \in \mathfrak{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\xi)\hat{n}_\sigma(\xi)\ d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t)\ n_\sigma(t)\ e^{ixt}\ dt; \tag{9}$$

   le théorème de Fubini justifie en effet les calculs suivants :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t)\ n_\sigma(t)\ e^{ixt}\ dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} n_\sigma(t)\ e^{ixt}\ dt\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\ e^{-ity}\ dy$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\ dy\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} n_\sigma(t)\ e^{i(x-y)t}\ dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\hat{n}_\sigma(y-x)\ dy$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-z)\hat{n}_\sigma(-z)\ dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-z)\hat{n}_\sigma(z)\ dz.$$

Théorème 43 (formule d'inversion de Fourier) *Soit $f \in \mathfrak{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$. Supposons que $\hat{f} \in \mathfrak{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$. Alors*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)\ e^{ix\xi}\ d\xi.$$

presque partout sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

Introduisons le produit de convolution
$$f_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\xi)\hat{n}_\sigma(\xi)\, d\xi.$$
On a
$$|f_\sigma(x) - f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{n}_\sigma(\xi)|f(x-\xi) - f(x)|\, d\xi$$
et le théorème de Tonelli implique
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} |f_\sigma(x) - f(x)|\, dx &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{n}_\sigma(\xi)|f(x-\xi) - f(x)|\, d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{n}_\sigma(\xi)\, d\xi\ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-\xi) - f(x)|\, dx\end{aligned}$$
de telle sorte que
$$\lim_{\sigma \to +\infty} \|f_\sigma - f\|_1 = 0$$
(en choisissant
$$\varphi(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-\xi) - f(x)|\, dx$$
dans l'équation (8) et en utilisant le résultat de l'exercice 18 page 52). D'autre part, en vertu de l'équation (9), on a aussi
$$f_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t)\ n_\sigma(t)\ e^{ixt}\, dt.$$
Cette deuxième représentation, les propriétés de la fonction n_σ et le théorème de la convergence dominée ($\hat{f}$ est intégrable par hypothèse) entraînent
$$\lim_{\sigma \to +\infty} f_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t)\ e^{ixt}\, dt.$$
On doit donc avoir
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t)\ e^{ixt}\, dt$$
pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. C.Q.F.D.

Remarque. Il suit de ce théorème qu'une fonction intégrable est uniquement déterminée par sa transformée de Fourier. Si deux fonctions $f, g \in \mathfrak{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ ont la même transformée de Fourier, le théorème s'appliquera en effet à la fonction $f - g$.

Théorème 44 *Soit $f \in \mathfrak{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ une fonction à variation bornée sur tout intervalle compact. Alors*

$$\lim_{A\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi}\ d\xi = \frac{f(x-)+f(x+)}{2}.$$

Démonstration.

Comme dans le théorème de Dirichlet, on peut supposer que f est réelle et que

$$f(x) = \frac{f(x-)+f(x+)}{2}$$

partout. Puisque, en vertu de l'exercice 6 page 111, la transformée de Fourier d'une fonction intégrable tend vers 0,

$$\lim_{|\xi|\to+\infty} \hat{f}(\xi) = 0,$$

on a

$$\lim_{A\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi}\ d\xi = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-[A]}^{[A]} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi}\ d\xi$$

($[A]$ est la partie entière de A) et il suffit de voir que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{n} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi}\ d\xi = f(x)$$

en un point x arbitraire. En vertu du théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{n} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi}\ d\xi &= \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{n} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\xi t}\ dt \right) e^{ix\xi}\ d\xi \\ = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{\sin n(x-t)}{x-t}\ dt &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) \frac{\sin nt}{t}\ dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \frac{f(x-t)+f(x+t)}{2} \frac{\sin nt}{t}\ dt. \end{aligned}$$

Comme d'autre part (exercice 7 page 90) on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\pi} \int_{0}^{1} \frac{\sin nt}{t}\ dt = 1,$$

on peut écrire que

$$\begin{gathered}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{n} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi}\ d\xi - f(x) \\
= \frac{2}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{f(x-t)+f(x+t)}{2} - f(x) \right) \frac{\sin nt}{t}\ dt \\
+ \frac{2}{\pi} \int_1^{+\infty} \frac{f(x-t)+f(x+t)}{2} \frac{\sin nt}{t}\ dt + \left(\frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\sin nt}{t}\ dt - 1 \right) f(x)
\end{gathered}$$

et il suffit de s'assurer que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{f(x-t)+f(x+t)}{2} - f(x) \right) \frac{\sin nt}{t}\ dt = 0$$

et que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2}{\pi} \int_1^{+\infty} \frac{f(x-t)+f(x+t)}{2} \frac{\sin nt}{t}\ dt = 0.$$

Cette dernière équation est valable en vertu de l'exercice 6 page 111 et on démontre celle qui la précède de la même manière que l'on a démontré l'équation (6). C.Q.F.D.

Théorème 45 (produit de convolution) *Soient $f, g \in \mathfrak{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$. Alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)g(y)|\ dy < +\infty,$$

la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie presque partout par l'équation

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)\ dy$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$ et

$$\hat{h}(\xi) = \hat{f}(\xi)\, \hat{g}(\xi).$$

Démonstration.

En vertu de l'exercice 4 page 79, on peut supposer que les fonctions f et g sont boréliennes. Alors la fonction

$$(x, y) \mapsto f(x-y)$$

est aussi borélienne (en vertu de l'exercice 3 page 89 pour la fonction indicatrice d'un ensemble borélien, par linéarité et par passage à la limite pour une fonction borélienne arbitraire). La fonction

$$(x, y) \mapsto f(x-y)g(y)$$

est donc mesurable et on peut lui appliquer le théorème de Fubini-Tonelli. On obtient ainsi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)g(y)|\ dy = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)g(y)|\ dx$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |g(y)|\ dy \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)|\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(y)|\ dy \int_{-\infty}^{+\infty} |f(z)|\ dz < +\infty.$$

Par suite,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)g(y)|\ dy < +\infty$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ et la fonction définie pour ces valeurs de x par la relation

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)\ dy$$

(et par 0 ailleurs) est intégrable sur $\mathbb{R}$ et

$$\hat{h}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)e^{-i\xi x}\ dx$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x}\ dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)\ dy$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)e^{-i\xi y}\ dy\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)e^{-i\xi(x-y)}\ dx$$
$$= \hat{f}(\xi)\,\hat{g}(\xi).$$

C.Q.F.D.

Remarque. On dénote généralement le produit de convolution de f avec g par $f * g$.

L'objet du dernier théorème de ce cours est d'obtenir l'analogue de l'identité de Parseval pour la transformée de Fourier. La situation est un peu compliquée ici du fait que l'espace $\mathfrak{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ n'est pas un sous-espace de l'espace $\mathfrak{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$.

Théorème 46 (Plancherel) *Soit $f \in \mathfrak{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$. Il existe $\hat{f} \in \mathfrak{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ telle que*

$$\lim_{A\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \hat{f}(\xi) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} f(x) e^{-ix\xi}\ dx \right|^2\ d\xi = 0$$

et que

$$\lim_{A\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi}\ d\xi \right|^2\ dx = 0.$$

On a

$$\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2.$$

Si $f \in \mathfrak{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, on a

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ e^{-i\xi t}\ dt.$$

pour presque tout x.

Démonstration.

Supposons d'abord que $f \in \mathfrak{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, posons $f_1(x) = \overline{f(-x)}$ et introduisons la fonction h définie presque partout par

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+y)\overline{f(y)}\ dy.$$

Cette fonction h appartient à l'espace $\mathfrak{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, est continue :

$$|h(x_2)-h(x_1)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x_2+y) - f(x_1+y)|^2\ dy} \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|^2\ dy}$$

et bornée :

$$|h(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|^2\ dy.$$

On a de plus

$$\hat{h}(\xi) = |\hat{f}(\xi)|^2.$$

En vertu de l'équation (9), on peut écrire que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x-t)\hat{n}_\sigma(t)\ dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{h}(t) n_\sigma(t) e^{ixt}\ dt,$$

donc, en faisant $x = 0$, que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} h(-t)\hat{n}_\sigma(t)\ dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{h}(t) n_\sigma(t)\ dt.$$

En laissant σ tendre vers $+\infty$ dans cette dernière relation, on obtient

$$h(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{h}(t)\ dt.$$

(Pour le membre de gauche, en vertu de l'équation (8) et pour le membre de droite en vertu du théorème de la convergence monotone). Mais ceci implique que $\hat{f}$ appartient à l'espace $\mathfrak{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ et que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)|^2\ d\xi.$$

Dans le cas général où $f \in \mathfrak{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, les fonctions $f_A(x) = f(x)\mathbb{I}_{(-A,A)}(x)$ appartiennent à $\mathfrak{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ et

$$\lim_{A\to+\infty} \|f_A - f\|_2 = 0.$$

Pour les transformées de Fourier

$$\hat{f}_A(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} f(x)e^{-i\xi x}\ dx,$$

on a

$$\|\hat{f}_A\|_2 = \|f_A\|_2.$$

Il s'ensuit que les fonctions $\hat{f}_A$ satisfont la condition de Cauchy et, l'espace $\mathfrak{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ étant complet, il existe $\hat{f} \in \mathfrak{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ telle que

$$\lim_{A\to+\infty} \|\hat{f}_A - \hat{f}\|_2 = 0.$$

Puisque, si $f \in \mathfrak{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, les fonctions $\hat{f}_A$ convergent presque partout vers

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\xi x}\ dx,$$

on retrouve

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\xi x}\ dx$$

(presque partout) dans ce cas. Dans tous les cas,

$$\|\hat{f}\|_2 = \lim_{A\to+\infty} \|\hat{f}_A\|_2 = \lim_{A\to+\infty} \|f_A\|_2 = \|f\|_2.$$

Associons ensuite à $g \in \mathfrak{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ les fonctions $g_A(x) = g(-x)\mathbb{I}_{(-A,A)}(x)$ et leurs transformées de Fourier

$$\hat{g}_A(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} g(x) e^{i\xi x} \, dx.$$

Comme précédemment, on voit qu'il existe $\breve{g} \in \mathfrak{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ telle que

$$\lim_{A \to +\infty} \|\hat{g}_A - \breve{g}\|_2 = 0.$$

La démonstration sera complétée lorsque nous aurons vérifiée la formule d'inversion dans $\mathfrak{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$. Introduisant les opérateurs linéaires sur $\mathfrak{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ définis par $\mathbb{F}(f) = \hat{f}$ et $\mathbb{F}_1(g) = \breve{g}$, il s'agit de voir que

$$\mathbb{F}_1 \circ \mathbb{F}\,(f) = f.$$

Lorsque

$$f,\ \hat{f} \in \mathfrak{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}), \tag{10}$$

cette relation est certainement satisfaite, en vertu de la formule d'inversion de Fourier. Reste à supprimer les hypothèses supplémentaires (10). Or, si $f \in \mathfrak{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, la fonction f_σ,

$$f_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\xi)\hat{n}_\sigma(\xi) \, d\xi,$$

satisfait les conditions (10). En effet, il est clair que $f_\sigma \in \mathfrak{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ et que $\hat{f}_\sigma = \hat{f} n_\sigma \in \mathfrak{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$. On a aussi $f_\sigma \in \mathfrak{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$; en effet,

$$\begin{aligned}
|f_\sigma(x)|^2 &\leq \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-\xi)| \hat{n}_\sigma(\xi) \, d\xi \right)^2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-\xi)| \hat{n}_\sigma(\xi) d\xi \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-\eta)| \hat{n}_\sigma(\eta) d\eta \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(x-\xi)|^2 + |f(x-\eta)|^2}{2} \, \hat{n}_\sigma(\xi) \, d\xi \, \hat{n}_\sigma(\eta) \, d\eta \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-\xi)|^2 \hat{n}_\sigma(\xi) \, d\xi,
\end{aligned}$$

en vertu du théorème de Tonelli et de l'inégalité élémentaire

$$ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2},$$

de telle sorte que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_\sigma(x)|^2 \, dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \, dx.$$

De façon similaire,

$$|f_\sigma(x) - f(x)|^2 \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-\xi) - f(x)|^2 \hat{n}_\sigma(\xi) \, d\xi$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_\sigma(x) - f(x)|^2 \, dx \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{n}_\sigma(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-\xi) - f(x)|^2 \, dx,$$

ce qui entraîne, comme précédemment, que

$$\lim_{\sigma \to +\infty} \|f_\sigma - f\|_2 = 0.$$

On en déduit que si $f \in \mathfrak{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, on a

$$\|\mathbb{F}_1 \circ \mathbb{F}(f) - f\|_2 \leq \|\mathbb{F}_1 \circ \mathbb{F}(f_\sigma) - \mathbb{F}_1 \circ \mathbb{F}(f)\|_2 + \|f_\sigma - f\|_2 = 2\|f_\sigma - f\|_2 < \epsilon$$

si σ est assez grand, donc que

$$\mathbb{F}_1 \circ \mathbb{F}(f) = f$$

dans ce cas également. Finalement, l'espace $\mathfrak{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ étant dense dans l'espace $\mathfrak{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ (grâce aux fonctions de test), soit $f_1 \in \mathfrak{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ telle que

$$\|f_1 - f\|_2 < \frac{\epsilon}{2}.$$

Alors

$$\|\mathbb{F}_1 \circ \mathbb{F}(f) - f\|_2 \leq \|\mathbb{F}_1 \circ \mathbb{F}(f) - \mathbb{F}_1 \circ \mathbb{F}(f_1)\|_2 + \|f_1 - f\|_2 < \epsilon$$

ce qui entraîne

$$\mathbb{F}_1 \circ \mathbb{F}(f) = f$$

pour toute fonction $f \in \mathfrak{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$. C.Q.F.D.

Remarque. On trouve d'autres notations pour les notions précédentes. Si

$$\tilde{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\xi t} \, dt = \sqrt{2\pi}\, \hat{f}(\xi),$$

la formule d'inversion de Fourier s'écrit

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi$$

et l'identité de Parseval devient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{f}(\xi)|^2\, d\xi.$$

De même, si

$$f \tilde{*} g\,(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) g(y)\, dy = \sqrt{2\pi}\, f * g\,(x),$$

on a encore

$$\widetilde{(f \tilde{*} g)} = \tilde{f}\, \tilde{g}.$$

Ou encore, si

$$\tilde{\tilde{f}}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi\xi t}\, dt = \sqrt{2\pi}\, \hat{f}(2\pi\xi),$$

la formule d'inversion est

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\tilde{f}}(\xi) e^{i2\pi x\xi}\, d\xi,$$

celle de Parseval demeure

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{\tilde{f}}(\xi)|^2\, d\xi$$

et

$$\widetilde{\widetilde{(f \tilde{*} g)}} = \tilde{\tilde{f}}\, \tilde{\tilde{g}}.$$

9.3 Exercices

1. Soit $f \in \mathfrak{L}^1_{2\pi}$. Montrer que

$$\lim_{|k| \to +\infty} c_k(f) = 0.$$

Suggestion : considérer d'abord le cas d'une fonction continue.

2. Soit $f \in \mathfrak{L}^1_{2\pi}$ une fonction à variation bornée sur $[-\pi, \pi]$. Montrer que

$$|c_k(f)| \leq \frac{\mathrm{var}(f, [-\pi, \pi])}{4k}.$$

Suggestion : remarquer que

$$c_k(f) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(s - \frac{\pi}{k}) e^{-iks} \, ds.$$

3. Développer la fonction $f(x) = \pi^2 - x^2$ en une série trigonométrique sur l'intervalle $(-\pi, \pi)$. En déduire la valeur des sommes

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}, \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4}.$$

4. Développer la fonction $f(x) = x$ en une série trigonométrique sur l'intervalle $(-\pi, \pi)$. En déduire la valeur des sommes

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin kx}{k}.$$

5. Soient $f \in \mathfrak{L}^1_{2\pi}$ une fonction réelle et

$$S(f)(x) = \frac{1}{2} a_0(f) + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx)$$

sa série de Fourier écrite sous « forme réelle ». Quelle est l'expression intégrale des coefficients ? Que devient l'identité de Parseval ?

6. Soit $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ une fonction indéfiniment dérivable à support compact. Montrer que, quel que soit $N \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{|\xi| \to +\infty} \xi^N \hat{f}(\xi) = 0.$$

En déduire que, si $f \in \mathfrak{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$,

$$\lim_{|\xi| \to +\infty} \hat{f}(\xi) = 0.$$

7. Calculer la transformée de Fourier de la fonction
$$f(x) = e^{-|x|}.$$
En déduire la valeur de
$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \xi x}{1+\xi^2}\ d\xi.$$
8. Calculer la transformée de Fourier de la fonction
$$f(x) = \mathbb{I}_{[-1,1]}(x).$$
En déduire la valeur de
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\ dx.$$
9. Calculer la convolution $\mathbb{I}_{[-1,1]} * \mathbb{I}_{[-1,1]}$ et vérifier l'équation $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$ dans ce cas.
10. Montrer que si $f, g \in \mathfrak{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ on a
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\hat{g}(x)\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)g(x)\ dx.$$
Suggestion : considérer d'abord le cas où $f, g \in \mathfrak{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$.
11. Soit $f \in \mathfrak{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ une fonction telle que
$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |f(k)| < +\infty.$$
Supposons que supp($\hat{f}$)=$[\pi, \pi]$. Montrer que
$$c_k(\hat{f}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(-k).$$
En déduire que la formule d'interpolation suivante
$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f(k) \frac{\sin \pi(x-k)}{\pi(x-k)}$$
est vraie presque partout sur $\mathbb{R}$. Que donne cette formule lorsque
$$\hat{f}(\xi) = (\pi - |\xi|)\mathbb{I}_{[-\pi,\pi]}(\xi)?$$

Références

[1] Nicolas Bourbaki. *Éléments d'histoire des mathématiques.* Collection Histoire de la pensée. Hermann, Paris, 1969.
Le traité de Bourbaki est parsemé de notes historiques qui ont été colligées en un volume.
Math-Info QA 21 B68 1974.

[2] André Gramain. *Intégration.* Collection Méthodes. Hermann, Paris, 1988.
Manuel de niveau premier cycle, approche abstraite.
Math-Info QA 312 G73 1988.

[3] Bertrand Hauchecorne. *Les contre-exemples en mathématiques.* Ellipses, Paris, 1988.
Un recueil de contre-exemples tirés de toutes les branches des mathématiques.
Math-Info QA 43 H38 1988.

[4] Thomas W. Korner. *Fourier Analysis.* Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
Présentation originale de sujet, niveau premier cycle.
Math-Info QA 403.5 K675 1989.

[5] Henri Lebesgue. *Oeuvres scientifiques.* L'enseignement mathématique, Genève, 1972.
Les oeuvres complètes de Lebesgue en cinq volumes.
Math-Info QA 3 L42.

[6] Michel Métivier. *Probabilités : dix leçons d'introduction.* Ellipses, Paris, 1987.
Survol des probabilités et de la théorie de la mesure. Bonne bibliographie.
Math-Info QA M463 1987.

[7] Murray R. Spiegel. *Lebesgue Measure and Integration.* Schaum's outline series. Mc Graw-Hill, New-York, 1969.
Manuel de niveau premier cycle, beaucoup d'exercices.
Math-Info QA 331.5 S64.

[8] George Temple. *100 Years of Mathematics.* Duckworth, Londres, 1981.
Panorama de l'histoire des mathématiques au XX^{e} siècle.
Math-Info QA 26 T46.

Index