MAT 6111 - Mesure et intégration

Intra

Octobre 2011

Chaque question vaut 10 points.

1. Soient $E \subseteq [0,1]$ un ensemble non mesurable et $F = E^c\,[0,1]$ son complément relativement à l'intervalle $[0,1]$. Montrer que
$$0 < \lambda^*(E)\lambda^*(F) \leq 1 \leq \lambda^*(E) + \lambda^*(F).$$
2. Soit $g \in L^1(\mathbb{R})$. Calculer la dérivée de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)}{1+(x-t)^2}\,dx$$
(justifier son calcul).
3. Soient $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $\psi : [c,d] \to \mathbb{R}$ deux fonctions absolument continues telles que $\phi \circ \psi$ soit définie. On suppose que ψ est strictement croissante. Montrer que

   a) la fonction $\phi \circ \psi$ est absolument continue ;

   b) on a $(\phi \circ \psi)' = (\phi' \circ \psi)\,\psi'$ presque partout sur $[c,d]$.

André Giroux