Analyse 2

Notes de cours

André Giroux
Département de Mathématiques et Statistique
Université de Montréal
Avril 2004

Table des matières

Table des figures

1 INTRODUCTION

L'analyse mathématique est l'étude approfondie du calcul différentiel et intégral. Ce cours porte sur le calcul intégral. Il se divise en trois parties. La première présente la définition et les propriétés de l'intégrale d'une fonction continue d'une variable réelle. La seconde utilise cet outil pour introduire les fonctions analytiques élémentaires (les fonctions logarithmique, exponentielle, trigonométriques directes et inverses, eulériennes). La dernière, enfin, porte sur la représentation de ces fonctions par des séries de Taylor et des séries de Fourier.

Il s'agit d'un cours de mathématique formel, avec des démonstrations rigoureuses et complètes de tous les théorèmes présentés. Les exercices proposés sont de même nature et exigent de l'étudiant qu'il en compose des solutions rigoureuses et complètes. Ce cours est un deuxième cours d'analyse et suppose que l'étudiant connaît déjà les propriétés des fonctions continues ainsi que celles des fonctions dérivables. Rappelons quelques-unes de ces propriétés.

On note $[a, b]$ un intervalle **compact** (c'est-à-dire fermé borné),

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\},$$

$]a, b[$ un intervalle **ouvert**,

$$]a, b[= \{x \mid a < x < b\}$$

et (a, b) un intervalle quelconque. (Ces notations présument que $a \leq b$). Un intervalle compact peut être caractérisé par la propriété suivante :

- Toute suite $\{x_n\}_{n\geq 1}$ de points de $[a, b]$ contient une suite partielle $\{x_{n_k}\}_{k\geq 1}$ qui converge vers un point de $[a, b]$ (théorème de Bolzano-Weierstrass).

Soit $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ une fonction. Elle est dite **continue** sur (a, b) si elle est continue en chaque point x_0 de (a, b), c'est-à-dire si en chaque point x_0 de (a, b),

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Un fonction continue jouit des propriétés suivantes :

- L'image d'un intervalle quelconque par une fonction continue est un intervalle (propriété des valeurs intermédiaires).
- L'image d'un intervalle compact par une fonction continue est un intervalle compact (propriété des valeurs extrêmes).

Une fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle y admet une fonction inverse f^{-1} qui est elle aussi continue et strictement monotone.

Exemple.

Si $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^{1/n}$ est définie et continue pour $x \geq 0$ si n est pair et pour tout x si n est impair.

La fonction $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ est dite **dérivable** sur (a, b) si elle est dérivable en chaque point x_0 de (a, b), c'est-à-dire si en chaque point x_0 de (a, b), la limite suivante

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe. On écrit alors

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

La fonction f est dite **continûment dérivable** si sa dérivée f' est continue.

Le théorème fondamental du calcul différentiel est le **théorème des accroissements finis** (quelquefois appelé théorème de la moyenne ou encore théorème de Rolle lorsque $f(a) = f(b) = 0$) :

- Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, il existe un nombre $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

L'inverse d'une fonction dérivable est dérivable aux points y correspondant aux points x où $f'(x) \neq 0$ ($y = f(x)$ et $x = f^{-1}(y)$) et alors

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Exemple.

Un polynôme de degré n,

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

est dérivable sur tout l'axe réel et

$$P_n'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1}.$$

Une fonction rationnelle,

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

est dérivable aux points où elle est définie (c'est-à-dire aux points où le dénominateur $Q_m(x)$ ne s'annule pas) et

$$R'(x) = \frac{P_n'(x)Q_m(x) - P_n(x)Q_m'(x)}{Q_m^2(x)}.$$

Si $p \in \mathbb{Q}$,

$$\frac{d}{dx}x^p = p\,x^{p-1}\ ,\ x > 0.$$

1.1 Exercices 1

Justifier complètement toutes ses affirmations.

1. Vérifier que la suite de points de $[-1, 1]$ définie par

$$x_n = \frac{1 + (-1)^n n}{1 + n}$$

   ne converge pas. En exhiber une suite partielle convergente.

2. Montrer qu'une fonction continue sur un intervalle fermé peut toujours être prolongée à une fonction continue sur $\mathbb{R}$ tout entier. Cela reste-t-il vrai pour un intervalle quelconque ?

3. Donner un exemple d'une fonction continue sur un intervalle fermé qui n'y est pas bornée ou qui n'y atteint pas ses bornes. Même question pour un intervalle borné.

4. Montrer qu'une fonction dérivable sur un intervalle fermé peut toujours être prolongée à une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier.

5. Les fonctions suivantes sont-elles dérivables en tous les points de leur domaine de définition :

$$x^{1/2}\ ,\ x^{1/3}\ ,\ x^{3/2}\ ,\ x^{4/3}\ ?$$

6. Soient $0 < a < b$. Déterminer le point c du théorème des accroissements finis pour la fonction $f(x) = x^2$. Même question pour la fonction $f(x) = x^3$.

2 INTÉGRATION DES FONCTIONS CONTINUES

L'intégration des fonctions continues repose sur une propriété supplémentaire de ces fonctions lorsqu'on les considère sur des intervalles compacts.

2.1 La continuité uniforme

Dire d'une fonction $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ qu'elle est continue, c'est dire qu'elle est continue en chaque point x_0 de (a, b), c'est-à-dire qu'à chaque point x_0 et à chaque $\epsilon > 0$ correspond $\delta > 0$ tel que

$$|x - x_0| < \delta \text{ et } x \in (a, b) \text{ impliquent } |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Le nombre δ dépend à la fois de x_0 et de ϵ :

$$\delta = \delta(x_0, \epsilon).$$

Lorsqu'il peut être choisi indépendamment du point x_0,

$$\delta = \delta(\epsilon),$$

on dit que la fonction est uniformément continue sur l'intervalle (a, b).

En d'autres termes, une fonction $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ est **uniformément continue** sur (a, b) si à chaque $\epsilon > 0$ correspond $\delta > 0$ tel que

$$|x - y| < \delta \text{ et } x, y \in (a, b) \text{ impliquent } |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Exemples.

- La fonction $f(x) = x^2$ est uniformément continue sur $[0, 1]$ puisque :

$$|x^2 - y^2| = |(x + y)(x - y)| \leq 2|x - y|.$$

- La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[1, +\infty[$; en vertu du théorème des accroissements finis en effet, il existe z entre x et y tel que :

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x - y|}{2\sqrt{z}} \leq \frac{|x - y|}{2}.$$

- La fonction $f(x) = x^2$ n'est pas uniformément continue sur $[1, +\infty[$; soient en effet $x_n = (n + 1/n)$ et $y_n = n$. On a toujours

$$|f(x_n) - f(y_n)| = 2 + \frac{1}{n^2} > 2$$

bien que

$$|x_n - y_n| = \frac{1}{n}.$$

Aucun nombre δ ne peut correspondre à $\epsilon = 2$.

– La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est uniformément continue sur l'intervalle $[0, 1]$, en vertu du théorème suivant.

Théorème 1 *Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur un intervalle compact y est uniformément continue.*

Démonstration. Supposons que le théorème est faux. Il existe alors $\epsilon > 0$ tel que, quelque soit $\delta > 0$, on peut trouver deux points x, y de l'intervalle $[a, b]$ pour lesquels :

$$|x - y| < \delta \text{ et } |g(x) - g(y)| > \epsilon.$$

Choisissons successivement $\delta = 1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots$ On obtient deux suites de points x_n et y_n de $[a, b]$ tels que

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ et } |g(x_n) - g(y_n)| > \epsilon.$$

Par compacité, la suite $\{x_n\}_{n\geq 1}$ contient une suite partielle $\{x_{n_k}\}_{k\geq 1}$ qui converge vers un point z de $[a, b]$. Comme

$$|x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k},$$

la suite partielle $\{y_{n_k}\}_{k\geq 1}$ correspondante converge aussi vers z. Par continuité, on a donc

$$\lim_{k\to+\infty}(g(x_{n_k}) - g(y_{n_k})) = g(z) - g(z) = 0$$

ce qui est absurde puisque l'on a toujours

$$|g(x_{n_k}) - g(y_{n_k})| > \epsilon.$$

C.Q.F.D.

2.2 Définition de l'intégrale

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle compact. À chaque partition $\mathcal{P}$ de l'intervalle,

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\} \ \text{ où } \ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

associons avec Riemann une somme supérieure $S(\mathcal{P}, f)$,

$$S(\mathcal{P}, f) = \sum_{k=1}^{n} \sup\{f(x) \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k\}(x_k - x_{k-1}),$$

et une somme inférieure $s(\mathcal{P}, f)$,

$$s(\mathcal{P}, f) = \sum_{k=1}^{n} \inf\{f(x) \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k\}(x_k - x_{k-1}).$$

Lorsque la fonction est positive, ces sommes majorent et minorent respectivement l'aire déterminée par l'axe des abscisses, les droites $x = a$ et $x = b$ et le graphe de la fonction (figure (1) — les points de la partition ne sont pas nécessairement équidistants).

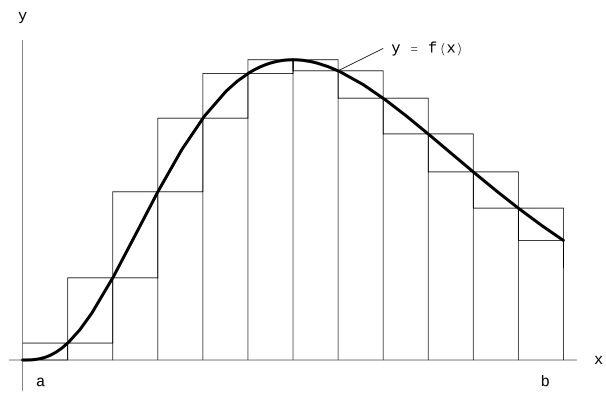

Fig. 1 – Sommes de Riemann

Il est clair que l'on a

$$\inf\{f(x) \mid a \leq x \leq b\}(b-a) \leq s(\mathcal{P}, f) \leq S(\mathcal{P}, f) \leq \sup\{f(x) \mid a \leq x \leq b\}(b-a)$$

pour toute partition $\mathcal{P}$. Observons maintenant que, si $\mathcal{Q}$ est une partition plus fine que $\mathcal{P}$, c'est-à-dire si $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{Q}$, on a

$$S(\mathcal{Q}, f) \leq S(\mathcal{P}, f) \quad , \quad s(\mathcal{P}, f) \leq s(\mathcal{Q}, f). \tag{1}$$

En effet, il suffit de vérifier ces inégalités lorsque $\mathcal{Q}$ s'obtient de $\mathcal{P}$ par adjonction d'un seul point, $\mathcal{Q} = \mathcal{P} \cup \{x*\}$; or si j est l'indice tel que $x_{j-1} < x* < x_j$, on a

$$\begin{aligned} &\sup\{f(x) \mid x_{j-1} \leq x \leq x_j\}(x_j - x_{j-1}) \\ &= \sup\{f(x) \mid x_{j-1} \leq x \leq x_j\}(x_j - x*) + \sup\{f(x) \mid x_{j-1} \leq x \leq x_j\}(x * - x_{j-1}) \\ &\geq \sup\{f(x) \mid x* \leq x \leq x_j\}(x_j - x*) + \sup\{f(x) \mid x_{j-1} \leq x \leq x*\}(x * - x_{j-1}) \end{aligned}$$

et les autres termes de la somme $S(\mathcal{P}, f)$ restent inchangés. De ceci découle la première des inégalités (1). L'autre inégalité s'obtient de façon similaire.

On déduit de ces relations que, quelles que soient les partitions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, on a

$$s(\mathcal{P}, f) \leq s(\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}, f) \leq S(\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}, f) \leq S(\mathcal{Q}, f),$$

c'est-à-dire que toute somme inférieure est plus petite que toute somme supérieure. Ainsi

$$\sup_{\mathcal{P}} s(\mathcal{P}, f) \leq \inf_{\mathcal{P}} S(\mathcal{P}, f).$$

En fait, on a toujours

$$\sup_{\mathcal{P}} s(\mathcal{P}, f) = \inf_{\mathcal{P}} S(\mathcal{P}, f). \tag{2}$$

Cela est une conséquence de la continuité uniforme d'une fonction continue sur un intervalle compact. Démontrons la relation (2). Soit $\epsilon > 0$ arbitraire. Soit $\delta > 0$ un nombre tel que

$$|x - y| < \delta \text{ et } x, y \in [a, b] \text{ impliquent } |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b - a}.$$

Soit aussi

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

une partition pour laquelle

$$x_k - x_{k-1} < \delta \text{ pour tout } k.$$

Soient enfin $u_k, v_k \in [x_{k-1}, x_k]$ tels que, pour tout k,

$$f(u_k) = \inf\{f(x) \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k\} \ , \ f(v_k) = \sup\{f(x) \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$$

(propriété des valeurs extrêmes). Alors

$$S(\mathcal{P}, f) - s(\mathcal{P}, f)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (\sup\{f(x) \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k\} - \inf\{f(x) \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k\})(x_k - x_{k-1})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (f(v_k) - f(u_k))(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\epsilon}{b - a}(x_k - x_{k-1}) = \epsilon$$

ce qui démontre la relation (2).

On exprime l'équation (2) en disant que la fonction f est **intégrable** sur l'intervalle $[a, b]$, d'intégrale :

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sup_{\mathcal{P}} s(\mathcal{P}, f) = \inf_{\mathcal{P}} S(\mathcal{P}, f).$$

Lorsque f est positive, l'intégrale est donc exactement le nombre qui donne l'aire déterminée par l'axe des abscisses, les droites $x = a$ et $x = b$ et le graphe de la fonction.

La signification de l'intégrale ayant été bien établie, nous pouvons maintenant donner avec Darboux une façon plus commode de la calculer (figure (2) — les points où la fonction est évaluée ne sont pas nécessairement équidistants).

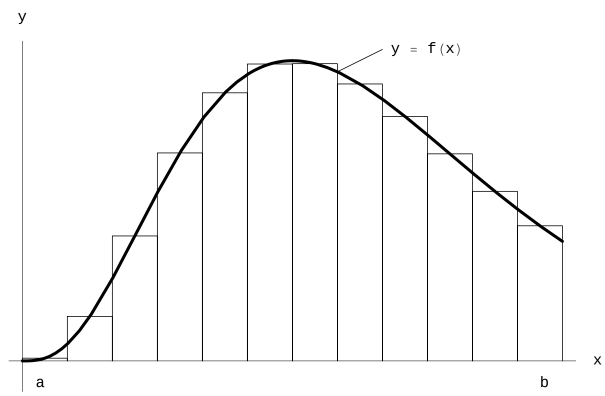

FIG. 2 – Sommes de Darboux

Théorème 2 (Darboux) *Quels que soient les nombres*

$$x_{k,n} \in [a + \frac{k-1}{n}(b-a), a + \frac{k}{n}(b-a)],$$

on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_{k,n}).$$

Démonstration. Soit

$$\mathcal{P}_n = \{a, a + \frac{1}{n}(b-a), a + \frac{2}{n}(b-a), \dots, b\}$$

la partition uniforme de $[a, b]$. On a

$$s(\mathcal{P}_n, f) \leq \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_{k,n}) \leq S(\mathcal{P}_n, f)$$

et

$$s(\mathcal{P}_n, f) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq S(\mathcal{P}_n, f).$$

Ainsi
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n f(x_{k,n})\right| \leq S(\mathcal{P}_n, f) - s(\mathcal{P}_n, f).$$
Or, en utilisant la continuité uniforme de la fonction f et la propriété des valeurs extrêmes, on voit comme précédemment que
$$\lim_{n\to+\infty}(S(\mathcal{P}_n, f) - s(\mathcal{P}_n, f)) = 0.$$
C.Q.F.D.

Exemple.

On a
$$\int_0^1 x\,dx = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{k}{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

2.3 Propriétés de l'intégrale

Les trois propriétés essentielles de l'intégrale d'une fonction continue sont la linéarité, la positivité et l'additivité.

Théorème 3 (Linéarité de l'intégrale) *Soient $f_1, f_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues et $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ des nombres. Alors*
$$\int_a^b (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x))\,dx = c_1\int_a^b f_1(x)\,dx + c_2\int_a^b f_2(x)\,dx.$$

Démonstration. En utilisant les sommes de Darboux-Riemann, on obtient :
$$\int_a^b (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x))\,dx$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n \left(c_1 f_1\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) + c_2 f_2\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)\right)$$
$$= c_1\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n f_1\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) + c_2\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n f_2\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)$$
$$= c_1\int_a^b f_1(x)\,dx + c_2\int_a^b f_2(x)\,dx.$$
C.Q.F.D.

Théorème 4 (Positivité de l'intégrale) *Soient* $f_1, f_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ *des fonctions continues telles que*

$$f_1(x) \leq f_2(x) \text{ pour } a \leq x \leq b.$$

Alors

$$\int_a^b f_1(x)\,dx \leq \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

Démonstration. En utilisant les sommes de Darboux-Riemann, on obtient :

$$\int_a^b f_1(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f_1\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)$$
$$\leq \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f_2\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) = \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

C.Q.F.D.

L'application de ce théorème aux fonctions $f_1 = \pm f$ et $f_2 = |f|$ conduit à **l'inégalité du triangle** pour les intégrales :

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Théorème 5 (Additivité de l'intégrale) *Soient* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue et* $a < c < b$. *Alors*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Démonstration. Soient $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}''$ des partitions des intervalles $[a, b], [a, c]$ et $[c, b]$ respectivement. On a donc :

$$\mathcal{P} \cup \{c\} = \mathcal{P}' \cup \mathcal{P}''.$$

En utilisant les inégalités (1), on voit d'une part que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sup_{\mathcal{P}} s(\mathcal{P}, f) \leq \sup_{\mathcal{P}} s(\mathcal{P} \cup \{c\}, f) = \sup_{\mathcal{P}'\cup\mathcal{P}''} \left(s(\mathcal{P}', f) + s(\mathcal{P}'', f)\right)$$
$$\leq \sup_{\mathcal{P}'} s(\mathcal{P}', f) + \sup_{\mathcal{P}''} s(\mathcal{P}'', f) = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

(exercice (11)) et d'autre part que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \inf_{\mathcal{P}} S(\mathcal{P}, f) \geq \inf_{\mathcal{P}} S(\mathcal{P} \cup \{c\}, f) = \inf_{\mathcal{P}' \cup \mathcal{P}''} (S(\mathcal{P}', f) + S(\mathcal{P}'', f))$$
$$\geq \inf_{\mathcal{P}'} S(\mathcal{P}', f) + \inf_{\mathcal{P}''} S(\mathcal{P}'', f) = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

C.Q.F.D.

Il commode de poser

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

L'intégrale

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

est ainsi définie quelle que soit la position relative des bornes d'intégration a et b — mais la propriété de positivité ne vaut que si $a < b$.

Exemple.

Si $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est continue et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,dt = L.$$

En effet, quelque soit $\epsilon > 0$,

$$\left| \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,dt - L \right| = \left| \frac{1}{x} \int_0^x (f(t) - L)\,dt \right|$$
$$\leq \frac{1}{x} \int_0^y |f(t) - L|\,dt + \frac{1}{x} \int_y^x |f(t) - L|\,dt$$
$$\leq \frac{y}{x} \sup_{t \geq 0} |f(t) - L| + \frac{x - y}{x} \sup_{t \geq y} |f(t) - L|$$
$$< \frac{y}{x} \sup_{t \geq 0} |f(t) - L| + \frac{x - y}{x} \frac{\epsilon}{2}$$

dès que $y = y_\epsilon$ est assez grand puis, y ainsi fixé,

$$\left| \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,dt - L \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

dès que

$$x > \frac{2\,y\,\sup_{t \geq 0} |f(t) - L|}{\epsilon}.$$

2.4 Exercices 2

Justifier complètement toutes ses affirmations.

1. Montrer qu'une fonction $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ admettant une dérivée bornée est uniformément continue.
2. En déduire qu'une fonction rationnelle $R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer qu'une fonction $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ qui est uniformément continue sur $(a, c]$ et sur $[c, b)$ l'est aussi sur (a, b).
4. En déduire que la fonction $f(x) = \sqrt[3]{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
5. La fonction $f(x) = 1/x$ est-elle uniformément continue sur l'intervalle $]0, 1]$? sur l'intervalle $[1, +\infty[$?
6. Les sommes supérieures et les sommes inférieures de Riemann peuvent être calculées pour toute fonction bornée $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mais il n'est plus certain que la fonction soit intégrable, c'est-à-dire que l'équation (2) soit vraie. Considérer avec Dirichlet la fonction indicatrice des nombres rationnels :

$$f(x) = \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} . \end{cases}$$

   Montrer qu'elle n'est intégrable sur aucun intervalle.
7. Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz : si $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sont continues, alors

$$\int_a^b f(x)g(x)\, dx \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)\, dx} \sqrt{\int_a^b g^2(x)\, dx}.$$

   (Suggestion : choisir le nombre λ de façon optimale dans l'inégalité :

$$0 \leq \int_a^b (f(x) + \lambda g(x))^2\, dx.)$$

8. En déduire l'inégalité de Minkowski :

$$\sqrt{\int_a^b (f(x) + g(x))^2\, dx} \leq \sqrt{\int_a^b f(x)^2\, dx} + \sqrt{\int_a^b g(x)^2\, dx}.$$

9. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que
$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$
(Premier théorème de la moyenne).
10. Soit $f : [a, b] \to [0, +\infty[$ une fonction continue et positive telle que
$$\int_a^b f(x)\,dx = 0.$$
Montrer qu'elle est identiquement nulle.
11. Vérifier les relations suivantes :
$$\sup_{a\in A,\, b\in B}(a+b) \leq \sup_{a\in A} a \; + \sup_{b\in B} b,$$
$$\inf_{a\in A,\, b\in B}(a+b) \geq \inf_{a\in A} a \; + \inf_{b\in B} b.$$
12. Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $\{a_n\}_{n\geq 1}$ une suite de nombres convergeant vers a, $a_n > a$. Montrer que
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_{a_n}^b f(x)\,dx.$$

3 THÉORÈME FONDAMENTAL DU CALCUL

Le théorème fondamental du calcul constitue la façon habituelle d'évaluer une intégrale. Il en fait aussi apparaître des propriétés supplémentaires.

3.1 Le théorème fondamental du calcul

Faisant le lien entre le calcul différentiel et le calcul intégral en montrant que la dérivation et l'intégration sont les opérations inverses l'une de l'autre, le théorème fondamental du calcul a deux facettes.

Théorème 6 (Théorème fondamental du calcul I) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, pour tout $x \in [a,b]$,*

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

Démonstration. Posons

$$I(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Soient $a < x < b$ et $h > 0$ assez petit pour que les points $x \pm h$ soient dans $[a,b]$. On a, en vertu des propriétés de linéarité et d'additivité de l'intégrale, que

$$\frac{I(x+h)-I(x)}{h} - f(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h}(f(t)-f(x))\,dt$$

et que

$$\frac{I(x-h)-I(x)}{-h} - f(x) = \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x}(f(t)-f(x))\,dt$$

de telle sorte que, en vertu cette fois de la positivité,

$$\left|\frac{I(x+h)-I(x)}{h} - f(x)\right| \leq \sup\{|f(t)-f(x)| \mid x \leq t \leq x+h\}$$

et que

$$\left|\frac{I(x-h)-I(x)}{-h} - f(x)\right| \leq \sup\{|f(t)-f(x)| \mid x-h \leq t \leq x\}.$$

En utilisant la continuité de la fonction f au point x, on voit donc que

$$\lim_{h\to 0}\frac{I(x+h)-I(x)}{h} = f(x).$$

Les cas où $x = a$ et où $x = b$ sont similaires. C.Q.F.D.

Remarque.

Puisque

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^b f(t)\,dt,$$

on a aussi

$$\frac{d}{dx}\int_x^b f(t)\,dt = -f(x).$$

Théorème 7 (Théorème fondamental du calcul II) *Soit* $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continûment dérivable. Alors*

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Démonstration. Considérons la fonction

$$J(x) = \int_a^x F'(t)\,dt.$$

En vertu du théorème précédent, on a

$$J'(x) = F'(x).$$

Les fonction $J(x)$ et $F(x) - F(a)$ admettent donc la même dérivée sur l'intervalle $[a,b]$. Comme elles s'annulent toutes les deux pour $x = a$, elles coïncident partout sur l'intervalle $[a,b]$:

$$J(b) = F(b) - F(a).$$

C.Q.F.D.

En vertu de ce théorème, il suffit donc, pour évaluer

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

de trouver une fonction $F(x)$ telle que $F'(x) = f(x)$. On a alors tout simplement

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

(Pour abréger l'écriture, on écrit

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.\ )$$

Une telle fonction F se nomme **primitive** de f (puisque que f est sa dérivée) ou encore **intégrale indéfinie** de f. On la dénote par

$$\int f(x)\,dx.$$

En d'autres mots,

$$F(x) = \int f(x)\,dx \;\Leftrightarrow\; F'(x) = f(x).$$

Une primitive n'est définie qu'à l'addition d'une constante près.

Toute fonction continue f admet une primitive, nommément la fonction définie par l'équation

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

(en vertu du théorème (6)) mais si cela s'avère être la seule représentation disponible de F, elle n'est guère utile pour évaluer l'intégrale « définie » de f. Cette situation se présente cependant quelquefois. Et, en règle générale, le calcul des primitives est beaucoup plus difficile que le calcul des dérivées.

Exemple.

Si $p \in \mathbb{Q},\; p \neq -1$,

$$\int x^p\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1}$$

puisque

$$\frac{d}{dx}x^{p+1} = (p+1)x^p.$$

On a donc, si $0 < a < b$,

$$\int_a^b x^p\,dx = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}.$$

3.2 Propriétés supplémentaires de l'intégrale

Le théorème fondamental du calcul met en lumière deux autres propriétés de l'intégrale : l'intégration par parties qui correspond à la règle de dérivation d'un produit et la formule de changement de variable qui correspond à la règle de dérivation en chaîne (exercice (7)).

Théorème 8 (Intégration par parties) *Soient $F, G : [a, b] \to \mathbb{R}$ des fonctions continûment dérivables. Alors*

$$\int_a^b F(x)G'(x)\,dx = F(x)G(x)\Big|_a^b - \int_a^b F'(x)G(x)\,dx. \tag{3}$$

Démonstration. Puisque

$$\frac{d}{dx}F(x)G(x) = F'(x)G(x) + F(x)G'(x),$$

on a

$$F(x)G(x) = \int F'(x)G(x)\,dx + \int F(x)G'(x)\,dx$$

c'est-à-dire

$$\int F(x)G'(x)\,dx = F(x)G(x) - \int F'(x)G(x)\,dx$$

donc

$$\int_a^b F(x)G'(x)\,dx = \int F(x)G'(x)\,dx\Big|_a^b = F(x)G(x)\Big|_a^b - \int F'(x)G(x)\,dx\Big|_a^b$$
$$= F(x)G(x)\Big|_a^b - \int_a^b F'(x)G(x)\,dx.$$

C.Q.F.D.

L'utilisation de la formule (3) pour évaluer une intégrale

$$\int_a^b h(x)\,dx$$

repose sur une factorisation judicieuse de la fonction $h(x)$ sous la forme $h(x) = F(x)G'(x)$.

Exemple.

Soit à évaluer

$$\int_0^1 x\sqrt{x+1}\,dx.$$

Posant $F(x) = x$ et $G'(x) = \sqrt{x+1}$, on a $F'(x) = 1$ et $G(x) = 2(x+1)^{3/2}/3$. Ainsi

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx = \frac{2}{3}x(x+1)^{3/2} - \int \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\,dx$$
$$= \frac{2}{3}x(x+1)^{3/2} - \frac{4}{15}(x+1)^{5/2} = \frac{2}{15}(x+1)^{3/2}(3x-2)$$

et
$$\int_0^1 x\sqrt{x+1}\,dx = \frac{2}{15}\left(2^{3/2}+2\right) = \frac{4(\sqrt{2}+1)}{15}.$$

Théorème 9 (Changement de variable) *Soit $\phi : [c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable strictement monotone et telle que $\phi([c,d]) = [a,b]$. Pour toute fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, on a*
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(\phi(t))|\phi'(t)|\,dt. \tag{4}$$
Démonstration. Soit F une primitive de f. Alors
$$\int f(\phi(t))\phi'(t)\,dt = F(\phi(t)).$$
La fonction ϕ effectue une bijection de l'intervalle $[c,d]$ sur l'intervalle $[a,b]$.

Si ϕ est croissante (c'est-à-dire si $\phi' > 0$), on a
$$\int_c^d f(\phi(t))\phi'(t)\,dt = F(\phi(t))\Big|_c^d = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$
alors que si ϕ est décroissante (c'est-à-dire si $\phi' < 0$), on a
$$\int_c^d f(\phi(t))(-\phi'(t))\,dt = -F(\phi(t))\Big|_c^d = -F(a) + F(b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$
C.Q.F.D.

L'utilisation de la formule (4) pour évaluer une intégrale
$$\int_a^b f(x)\,dx$$
repose sur sur un choix approprié de la nouvelle variable $t = \phi^{-1}(x)$.

Exemple.

Soit à évaluer
$$\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx.$$
On pose $t = x^2 + 1$ de telle sorte que
$$\frac{dt}{dx} = 2x \geq 0,$$
l'intervalle $0 \leq x \leq 1$ correspondant à l'intervalle $1 \leq t \leq 2$. On a
$$\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx = \int_1^2 \sqrt{t}\;\frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{3}\;t^{3/2}\Big|_1^2 = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}.$$

3.3 Exercices 3

Justifier complètement toutes ses affirmations.

1. Déduire le théorème fondamental du calcul (théorème (6)) du premier théorème de la moyenne (exercice (9) du chapitre 2).
2. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions dérivables telles que $a(x) < b(x)$. Calculer
$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt.$$
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Calculer
$$\frac{d}{dx}\int_{0}^{1} f(x+t)\,dt.$$
4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique de période $2p$ ($f(t+2p) = f(t)$ pour tout t). Montrer que, quel que soit le nombre x,
$$\int_{x}^{x+2p} f(t)\,dt = \int_{0}^{2p} f(t)\,dt.$$
5. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Posons
$$\phi(x) = \frac{1}{x}\int_{0}^{x} f(t)\,dt.$$
Montrer que ϕ est croissante si f l'est.
6. Soit $p > 0$. Calculer
$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^p}{n^{p+1}}.$$
7. Déduire la règle de dérivation d'un quotient de la règle de dérivation d'un produit.
8. Soit $p > 2$. Calculer
$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{kn^{p-2}}{(k+n)^p}.$$
9. Soit $f : [-A, A] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que si f est impaire (c'est-à-dire $f(-x) = -f(x)$ pour tout x),
$$\int_{-A}^{A} f(x)\,dx = 0$$

et que si f est paire (c'est-à-dire $f(-x) = f(x)$ pour tout x),

$$\int_{-A}^{A} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{A} f(x)\,dx.$$

10. Soit $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable. Montrer que

$$af(a) = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a xf'(x)\,dx.$$

Donner une interprétation géométrique de cette relation dans le cas où $f'(x) > 0$ et $f(0) = 0$.

11. Soient $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable, positive et décroissante et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b F(x)g(x)\,dx = F(a)\int_a^c g(x)\,dx.$$

(Deuxième théorème de la moyenne — comparer avec le premier (exercice (9) du chapitre 2)). (Suggestion : introduire la fonction

$$G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$$

et intégrer par parties.)

12. Soit $p > 0$. Montrer qu'il existe un nombre $c \in [0,1]$ tel que

$$\int_0^1 \frac{x^p}{x^{2p}+1}\,dx = \frac{c^{p+1}}{p+1}.$$

4 LOGARITHME ET EXPONENTIELLE

Les fonctions logarithmique et exponentielle sont étroitement associées à l'étude des phénomènes de croissance.

4.1 Le logarithme

On sait que la fonction $x \mapsto 1/x$ n'admet pas de primitive rationnelle. Le logarithme est la fonction $\log :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\log x = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

(figure (3)). En vertu du théorème fondamental du calcul (théorème (6)), le logarithme est une fonction dérivable et

$$\frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x} \ .$$

Autre notation : $\ln x$.

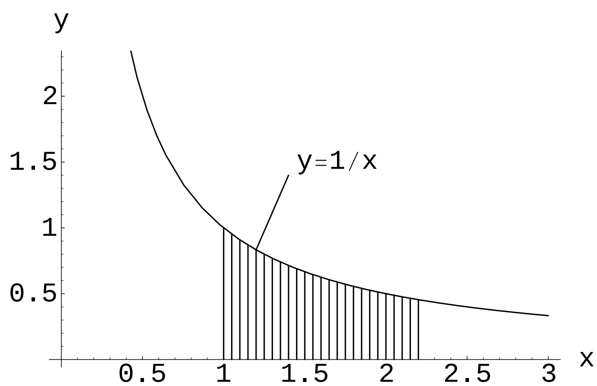

FIG. 3 – Définition du logarithme

Théorème 10 (Équation fonctionnelle du logarithme) *On a*

$$\log xy = \log x + \log y \tag{5}$$

et si $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable telle que

$$f(xy) = f(x) + f(y), \tag{6}$$

il existe un nombre $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) = c \log x.$$

Démonstration. Pour démontrer la première affirmation, introduisons la fonction

$$\phi(x) = \log xy - \log y$$

(en fixant arbitrairement $y > 0$). Comme

$$\phi'(x) = \frac{1}{x} = \frac{d}{dx} \log x$$

et comme

$$\phi(1) = 0 = \log 1,$$

on doit avoir

$$\phi(x) = \log x.$$

Si, d'autre part, f satisfait l'équation fonctionnelle (6), on aura, en dérivant par rapport à x que, quelque soit $y > 0$,

$$yf'(xy) = f'(x)$$

donc

$$yf'(y) = f'(1).$$

En passant aux primitives,

$$f(y) = f'(1) \log y + K$$

où K est une constante. Puisque l'équation fonctionnelle entraîne que $f(1) = 2f(1)$, $f(1) = 0$ donc $K = 0$ et on a bien

$$f(x) = c \log x$$

en posant $c = f'(1)$. C.Q.F.D.

Comme conséquences de l'équation (5), on a

$$\log \frac{1}{x} = -\log x,$$

et

$$\log x^n = n \log x \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

donc aussi

$$\log x^{1/m} = \frac{1}{m} \log x \quad \text{pour tout } m \in \mathbb{N}$$

c'est-à-dire

$$\log x^p = p \log x \quad \text{quelque soit } \ p \in \mathbb{Q}.$$

Puisque, de plus,

$$\frac{d^2}{dx^2}\log x = -\frac{1}{x^2} < 0,$$

le logarithme est une **fonction strictement concave** qui croît (strictement) de $-\infty$ à $+\infty$ lorsque son argument croît de 0 à $+\infty$. Ces données permettent de tracer son graphe (figure (4)).

La concavité d'une fonction entraîne pour cette fonction d'importantes conséquences. (Exercices (7), (8), (9)).

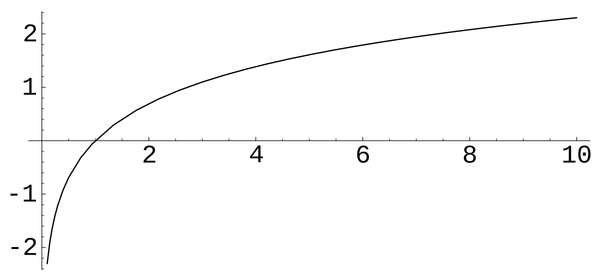

FIG. 4 – Graphe du logarithme

Remarque.

Le logarithme tend vers $+\infty$ avec son argument mais plus lentement que toute puissance (si petite soit-elle) de cet argument. En vertu de la règle de l'Hospital, on a en effet, que quel que soit $p > 0$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x^p} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{-1}}{px^{p-1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{px^p} = 0.$$

Exemple.

On estime le nombre N d'atomes dans l'univers visible à

$$\begin{aligned}N = {}&10000000000000000000000000000000000000000\\&0000000000000000000000000000000000000000.\end{aligned}$$

Le logarithme de ce nombre est

$$\log N < 240.$$

Théorème 11
$$\log e = 1.$$

Démonstration. Le nombre e est défini par
$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

En utilisant les propriétés du logarithme, on obtient :
$$\begin{aligned}
\log e = \log\left(\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) &= \lim_{n\to+\infty}\left(\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\\
= \lim_{n\to+\infty} n\log\left(1+\frac{1}{n}\right) &= \lim_{n\to+\infty}\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)-\log 1}{1/n}\\
&= \frac{d}{dx}\log x\Big|_{x=1} = 1.
\end{aligned}$$

C.Q.F.D.

4.2 La fonction exponentielle

La fonction exponentielle est la fonction inverse du logarithme, $\exp : \mathbb{R} \to]0,+\infty[$, définie par la relation
$$\exp x = y \iff x = \log y,$$

autrement dit
$$\exp(\log y) = y \text{ si } y > 0, \quad \log(\exp x) = x \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

L'équation fonctionnelle (5) du logarithme se traduit donc par l'équation fonctionnelle suivante pour l'exponentielle :
$$\exp(x_1 + x_2) = \exp x_1 \exp x_2.$$

Théorème 12 (Équation différentielle de l'exponentielle) *On a*
$$\frac{d}{dx}\exp x = \exp x$$
et si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable telle que
$$f'(x) = af(x)$$
avec $a \in \mathbb{R}$, il existe un nombre $c \in \mathbb{R}$ tel que
$$f(x) = c\exp(ax).$$

Démonstration. En vertu de la règle pour dériver une fonction inverse, on a bien
$$\frac{d}{dx}\exp x = \frac{1}{\frac{d}{dy}\log y} = \frac{1}{1/y} = y = \exp x.$$
D'autre part, introduisant la fonction
$$g(x) = f(x)\exp(-ax),$$
on a
$$g'(x) = f'(x)\exp(-ax) - af(x)\exp(-ax) = (f'(x) - af(x))\exp(-ax) = 0$$
ce qui entraîne
$$g(x) = c$$
pour une constante c appropriée. C.Q.F.D.

Comme pour toute fonction inverse, le graphe de la fonction exponentielle (figure (5)) est le symétrique de celui du logarithme relativement à la bissectrice $y = x$. Il s'agit d'une **courbe strictement convexe** qui croît (strictement) de 0 à $+\infty$ lorsque l'abscisse croît de $-\infty$ à $+\infty$ et ce, plus rapidement que toute puissance de cette abscisse (exercice (13)).

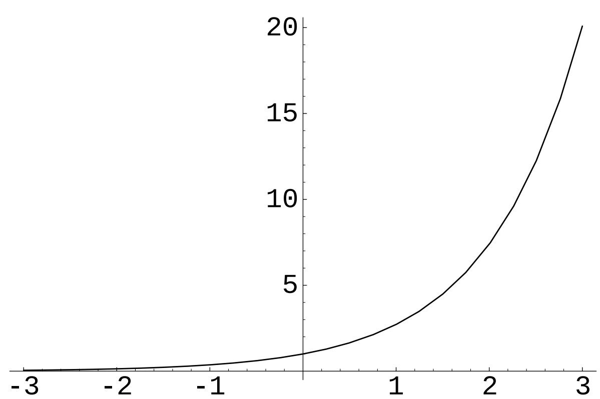

Fig. 5 – Graphe de l'exponentielle

4.3 Exposants irrationnels

Si $n \in \mathbb{N}$ est un entier naturel, x^n est égal au produit de x par lui-même n fois et, lorsque $x \neq 0$, x^{-n} est égal à celui de x^{-1} par lui-même n fois. Si $m \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^{1/m}$ est la fonction inverse de x^m (elle est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ si m si impair et pour tout $x \geq 0$ si m est pair). On convient enfin de poser $x^0 = 1$ lorsque $x > 0$.

La fonction $x \mapsto x^p$ est donc bien définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ pour tout exposant $p \in \mathbb{Q}$. Observons que l'on a

$$\exp(p \log x) = \exp(\log x^p) = x^p.$$

Cette propriété permet d'introduire des exposants irrationnels.

Soit $a \in \mathbb{R}$ un nombre réel quelconque. La fonction $x \mapsto x^a$ est la fonction $]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ définie par l'équation

$$x^a = \exp(a \log x).$$

Observons que, en vertu du théorème (11), l'on a en particulier :

$$e^a = \exp a \text{ pour tout } a \in \mathbb{R}.$$

Les règles de calcul avec les exposants restent encore vraies.

Théorème 13 (Règles des exposants) *Soient $a, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ et $x, y > 0$. Alors*

a) $(xy)^a = x^a y^a$

b) $x^{a_1+a_2} = x^{a_1} x^{a_2}$

c) $x^{a_1 a_2} = (x^{a_1})^{a_2}$

Démonstration. En vertu de la définition que nous avons posée, on a successivement

a) $(xy)^a = e^{a \log xy} = e^{a \log x + a \log y} = e^{a \log x} e^{a \log y} = x^a y^a$;

b) $x^{a_1+a_2} = e^{(a_1+a_2) \log x} = e^{a_1 \log x + a_2 \log x} = e^{a_1 \log x} e^{a_2 \log x} = x^{a_1} x^{a_2}$;

c) $(x^{a_1})^{a_2} = \exp(a_2 \log x^{a_1}) = \exp(a_2 \log(\exp(a_1 \log x))) = \exp(a_2 a_1 \log x) = x^{a_1 a_2}$.

C.Q.F.D.

Une conséquence en est que la formule de dérivation

$$\frac{d}{dx} x^a = a x^{a-1}$$

reste toujours valable.

Fixons maintenant $b > 0, b \neq 1$, et considérons la fonction $g : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ définie par

$$g(x) = b^x.$$

Puisque

$$\frac{d}{dx} g(x) = b^x \log b,$$

elle est strictement monotone (croissante si $b > 1$, décroissante si $b < 1$). Son inverse est le **logarithme de base b**, dénoté par $\log_b$. Autrement dit

$$x = \log_b y \;\Leftrightarrow\; y = b^x.$$

4.4 Les fonctions hyperboliques

Le cosinus hyperbolique et le sinus hyperbolique sont les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par les relations

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \ , \ \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

respectivement.

Théorème 14 *Les fonctions hyperboliques jouissent des propriétés suivantes :*

a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ *;*

b) $\cosh' x = \sinh x$, $\sinh' x = \cosh x$ *;*

c) $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y,$
$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \sinh y \cosh x.$

Démonstration. En vertu des définitions que nous avons posées, on a successivement

a)

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = 1;$$

b)

$$\cosh' x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x \ , \ \sinh' x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x;$$

c)

$$\begin{aligned} &\cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \\ = &\frac{e^{x+y} + e^{x-y} + e^{-x+y} + e^{-x-y}}{4} + \frac{e^{x+y} - e^{x-y} - e^{-x+y} + e^{-x-y}}{4} \\ &= \frac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{2} = \cosh(x+y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sinh x \cosh y + \sinh y \cosh x \\ = &\frac{e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y}}{4} + \frac{e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-x-y}}{4} \\ &= \frac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{2} = \sinh(x+y). \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

Les graphes des fonctions hyperboliques se déduisent de celui de l'exponentielle.

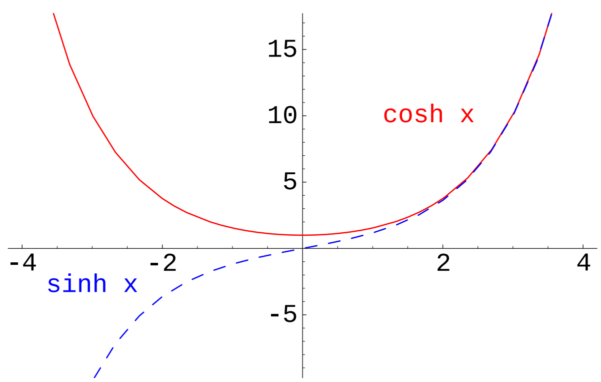

FIG. 6 – Les fonctions hyperboliques

Sa dérivée étant strictement positive, le sinus hyperbolique est une fonction strictement croissante et admet une fonction inverse partout dérivable, l'arcsinus hyperbolique, arcsinh $: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

En résolvant l'équation quadratique

$$e^{2x} - 1 = 2\, y\, e^{x}$$

à l'aide de la formule de Viète, on trouve

$$e^{x} = y + \sqrt{1 + y^2}$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{arcsinh} y = \log(y + \sqrt{1 + y^2}).$$

En dérivant cette dernière relation ou en utilisant la formule pour la dérivée d'une fonction inverse, on obtient enfin

$$\frac{d}{dy} \operatorname{arcsinh} y = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}.$$

Le graphe de l'arcsinus hyperbolique s'en déduit.

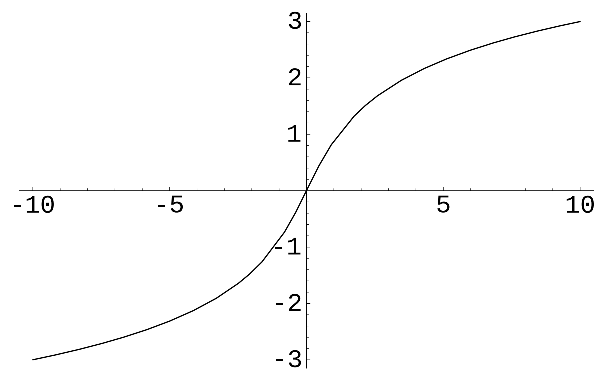

FIG. 7 – L'arcsinus hyperbolique

4.5 Exercices 4

Justifier complètement toutes ses affirmations.

1. Soit

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n.$$

Montrer que la suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $1 - \log 2$ — sa limite est la constante d'Euler-Mascheroni, dénotée γ.

2. Déterminer toutes les fonctions $]0, +\infty, [\to]0, +\infty[$ dérivables qui satisfont l'équation fonctionnelle

$$f(xy) = f(x)f(y).$$

3. Tracer le graphe de la fonction

$$f(x) = \frac{\log x}{x}.$$

4. Calculer les limites suivantes :

   a)
$$\lim_{x\to 0} x^a \log x$$

   b)
$$\lim_{x\to 0} x^x$$

   c)
$$\lim_{x\to 0} x^{1/x}$$

   d)
$$\lim_{x\to +\infty} x^{1/x}.$$

5. Soient $0 < a < b$. Lequel des deux nombres suivants est le plus grand : a^b ou b^a ?

6. Calculer
$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

7. Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable et telle que $f''(x) \geq 0$. Montrer qu'elle satisfait **l'inégalité de convexité** suivante :
$$x_1 < x_3 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_3) \leq \frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$
   qui exprime que son graphe est situé sous n'importe laquelle de ses sécantes (figure (8)). (Suggestion : utiliser le théorème des accroissements finis.)

8. Vérifier que l'inégalité précédente peut s'écrire
$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$
   avec
$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0 \;\text{ et } \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$
   (une combinaison convexe de deux nombres). La généraliser à une combinaison convexe de n nombres
$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$$
   par récurrence sur n (**inégalité de Jensen**).

9. Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable et telle que $f''(x) \geq 0$. Montrer que quel que soit $x_0 \in]a, b[$, le graphe de f est situé au-dessus de sa tangente en x_0 :

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

(figure (8)).(Suggestion : utiliser le théorème fondamental du calcul.)

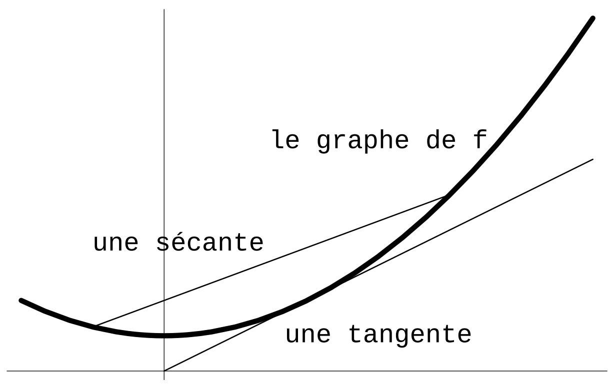

Fig. 8 – Une fonction convexe

10. Démontrer l'inégalité entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique de n nombres positifs $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

11. Démontrer l'inégalité entre la moyenne géométrique et la moyenne harmonique de n nombres strictement positifs $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\frac{n}{1/x_1 + 1/x_2 + \cdots + 1/x_n} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.$$

12. Montrer que

$$\log x \leq x - 1.$$

13. Montrer que

$$e^x \geq x + 1.$$

En déduire directement (c'est-à-dire sans utiliser la règle de l'Hospital) que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0.$$

(Suggestion :
$$\frac{x}{e^x} = 2\,\frac{x/2}{e^{x/2}}\,\frac{1}{e^{x/2}};$$
raisonner par récurrence sur n.)

14. Déterminer toutes les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui satisfont l'équation différentielle
$$f'(x) = -xf(x).$$

15. Déterminer la solution de l'équation logistique :
$$f'(x) = af(x)(b - f(x))\ ,\ x > 0$$
où $a > 0$ et $b > 0$ si $0 < f(0) < b$.

16. Montrer que
$$\log_b y = \frac{\log y}{\log b}.$$

17. La fonction tangente hyperbolique est définie par
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$
Vérifier qu'elle satisfait l'équation différentielle
$$f'(x) = 1 - f^2(x).$$
Exprimer $\tanh(x+y)$ en terme de $\tanh x$ et de $\tanh y$. Tracer le graphe.

18. Vérifier que la tangente hyperbolique admet une fonction inverse, l'arctangente hyperbolique, $\operatorname{arctanh}\ :]-1,1[\to \mathbb{R}$. Montrer que
$$\operatorname{arctanh} y = \frac{1}{2}\log\frac{1+y}{1-y}.$$
Calculer la dérivée de cette fonction et tracer son graphe.

5 FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Les fonctions trigonométriques sont étroitement associées à l'étude des phénomènes périodiques.

5.1 Définition des fonctions trigonométriques

Le nombre π est, par définition, égal à l'aire du disque de rayon unité :

$$\pi = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Pour $-1 \leq y \leq 1$, posons

$$\arccos y = 2\int_{y}^{1} \sqrt{1-t^2}\,dt + y\sqrt{1-y^2}$$

(figure (9) — $\arccos y$ représente l'aire du secteur (pour vérifier cette affirmation, distinguer suivant que y est positif ou négatif)).

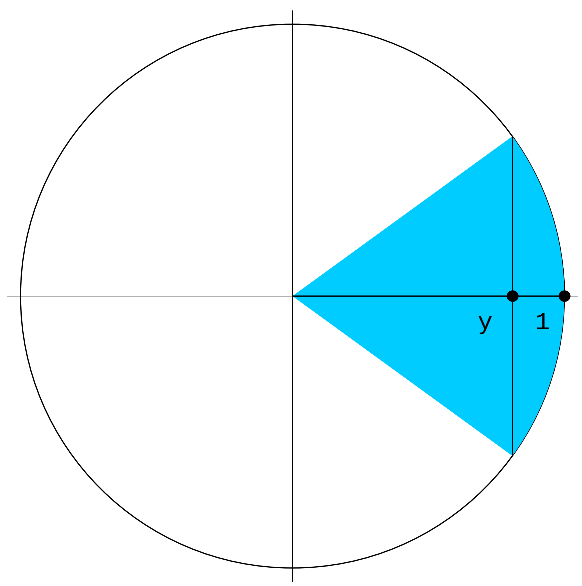

FIG. 9 – Définition de l'arccosinus

La fonction ainsi définie est continue sur $[-1,1]$ mais dérivable seulement sur $]-1,1[$ où

$$\frac{d}{dy}\arccos y = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Elle est strictement décroissante, de π à 0 lorsque son argument y croît de -1 à 1. Donné $0 \leq x \leq \pi$, il existe donc un et un seul nombre $-1 \leq y \leq 1$ tel que

$$\arccos y = x.$$

Les fonctions trigonométriques cosinus et sinus sont définies pour $0 \leq x \leq \pi$ par les relations

$$\cos x = y \ , \ \sin x = \sqrt{1 - y^2}.$$

Elles sont prolongées à l'axe réel $\mathbb{R}$ tout entier en posant d'abord, pour $-\pi < x < 0$,

$$\cos x = \cos(-x) \ , \ \sin x = -\sin(-x)$$

et ensuite, pour $n \in \mathbb{Z}$,

$$\cos(x + 2\pi n) = \cos x \ , \ \sin(x + 2\pi n) = \sin x.$$

Observons les valeurs remarquables

$$\cos 0 = 1 \ , \ \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ , \ \cos \frac{\pi}{2} = 0 \ , \ \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ , \ \cos \pi = -1$$

et

$$\sin 0 = 0 \ , \ \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ , \ \sin \frac{\pi}{2} = 1 \ , \ \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ , \ \sin \pi = 0.$$

Observons aussi que la relation

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

reste valable sur tout l'axe réel.

Les fonctions périodiques de période 2π ainsi obtenues sont continues : ainsi, pour le cosinus,

$$\lim_{x \to 0-} \cos x = \lim_{x \to 0-} \cos(-x) = \lim_{z \to 0+} \cos z = \cos 0$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \pi+} \cos x &= \lim_{x \to \pi+} \cos(x - 2\pi) = \lim_{z \to -\pi+} \cos z \\ &= \lim_{z \to -\pi+} \cos(-z) = \lim_{w \to \pi-} \cos w = \cos \pi. \end{aligned}$$

Elles sont même dérivables et satisfont les relations

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x \ , \ \frac{d}{dx} \sin x = \cos x. \tag{7}$$

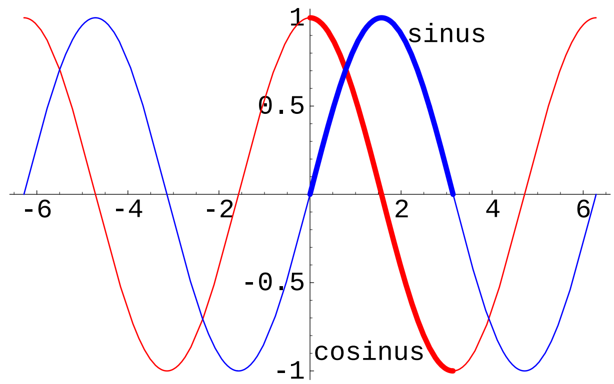

FIG. 10 – Le sinus et le cosinus

Vérifions par exemple, la première de ces relations. Lorsque $0 < x < \pi$ tout d'abord, on a :

$$\frac{d}{dx}\cos x = \frac{1}{\frac{d}{dy}\arccos y} = \frac{1}{\frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}} = -\sqrt{1-y^2} = -\sin x.$$

Considérons ensuite les points de raccordement. En $x = 0$, on a, en utilisant le théorème des accroissement finis — dans ce qui suit $0 < h_1 < h$,

$$\lim_{h\to 0+} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h\to 0+} -\sin h_1 = -\sin 0$$

et

$$\lim_{h\to 0+} \frac{\cos(-h) - 1}{-h} = \lim_{h\to 0+} \frac{\cos h - 1}{-h} = \lim_{h\to 0+} \sin h_1 = \sin 0 = -\sin 0.$$

En $x = \pi$:

$$\lim_{h\to 0+} \frac{\cos(\pi - h) - \cos\pi}{-h} = \lim_{h\to 0+} -\sin(\pi - h_1) = -\sin\pi$$

et

$$\lim_{h\to 0+} \frac{\cos(\pi + h) - \cos\pi}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{\cos(-\pi + h) - \cos\pi}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0+} \frac{\cos(\pi - h) - \cos\pi}{h} = \lim_{h\to 0+} \sin(\pi - h_1) = \sin\pi = -\sin\pi.$$

Ces diverses relations permettent de tracer les graphes des fonctions trigonométriques sinus et cosinus (figure (10)).

La fonction tangente est la fonction définie par la relation

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{si} \quad x \neq \frac{(2n+1)\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}.$$

Son domaine de définition « naturel » est l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$. Elle satisfait la relation

$$\frac{d}{dx} \tan x = 1 + \tan^2 x \tag{8}$$

comme il est aisé de le vérifier à partir de la définition. On en déduit l'allure de son graphe (figure (11)).

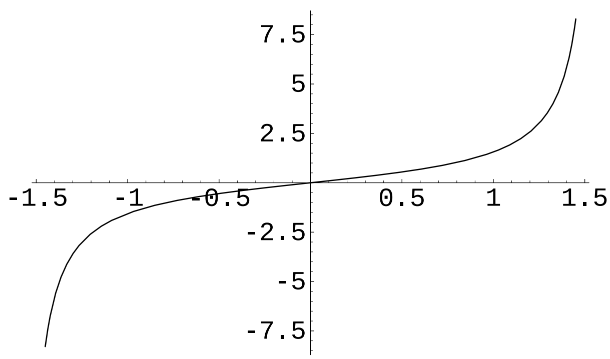

FIG. 11 – La tangente

5.2 Propriétés des fonctions trigonométriques

Théorème 15 (Équation différentielle de sinus et cosinus) *Les fonctions sinus et cosinus sont deux solutions de l'équation différentielle*

$$f''(x) + f(x) = 0. \tag{9}$$

Si, réciproquement $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction deux fois dérivable qui satisfait l'équation précédente, il existe deux nombres $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = a \cos x + b \sin x.$$

Démonstration. La première affirmation suit des relations (7). Pour démontrer la seconde, posons $a = f(0), b = f'(0)$ et considérons la fonction

$$g(x) = f(x) - a\cos x - b\sin x.$$

Elle satisfait l'équation différentielle

$$g''(x) + g(x) = 0$$

sous les conditions initiales

$$g(0) = g'(0) = 0.$$

Introduisons alors la fonction

$$h(x) = g^2(x) + {g'}^2(x).$$

Comme

$$h'(x) = 2g'(x)(g(x) + g''(x)) = 0,$$

on doit avoir

$$h(x) = h(0) = 0 \quad \text{pour tout } x$$

c'est-à-dire que

$$g(x) = 0 \quad \text{pour tout } x.$$

C.Q.F.D.

Théorème 16 (Formules d'addition) *Quelques soient $x, y \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \sin y \cos x \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y. \end{aligned}$$

Démonstration. La fonction $f(x) = \sin(x+y)$, (y fixé), satisfait l'équation différentielle (9) et est donc de la forme $f(x) = a\cos x + b\sin x$. Puisque $f(0) = \sin y$ et que $f'(0) = \cos y$, il faut que $a = \sin y$ et que $b = \cos y$ ce qui démontre la première formule.

La démonstration de la seconde est similaire. C.Q.F.D.

Les relations suivantes sont un cas particulier fréquemment utilisé :

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \ , \ \sin 2x = 2\sin x \cos x.$$

La formule d'addition pour la tangente suit du théorème : si x, y et $x + y \neq (2k+2)\pi/2$ avec $k \in \mathbb{Z}$,

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 + \tan x \tan y}.$$

Théorème 17 (Relations d'orthogonalité) *Quelques soient* $m, n \in \mathbb{N}_0$, *on a :*

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx \sin nx \, dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & si\ m \neq n \\ \pi & si\ m = n \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} 0 & si\ m \neq n \\ \pi & si\ m = n. \end{cases}$$

Démonstration. En vertu des formule d'addition, on a, par exemple,

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos(m-n)x + \cos(m+n)x}{2} dx.$$

Si $m \neq n$, on en tire

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(m-n)x}{m-n} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

alors que si $m = n$, on obtient

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 mx \, dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{\sin 2mx}{2m} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi.$$

Les autres cas sont similaires. C.Q.F.D.

5.3 Les fonctions trigonométriques inverses

La fonction arccosinus (figure (12)), arccos : $[-1, 1] \to [0, \pi]$, est définie par la relation

$$\arccos y = 2 \int_{y}^{1} \sqrt{1 - t^2} \, dt + y\sqrt{1 - y^2}$$

comme nous l'avons vu. Elle est continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $]-1, 1[$, avec

$$\frac{d}{dy} \arccos y = \frac{-1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

C'est une fonction strictement décroissante et l'on a

$$\cos(\arccos y) = y \ , \ \ y \in [-1, 1]$$

et

$$\arccos(\cos x) = x \ , \ \ x \in [0, \pi].$$

Cependant, la fonction cosinus étant une fonction paire et périodique de période 2π, elle n'admet pas d'inverse globale et de la relation $\cos x = y$ on ne peut pas conclure que $x = \arccos y$. En fait, on a

$$\cos x = y \ \Leftrightarrow \ x = \pm \arccos y + 2k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}.$$

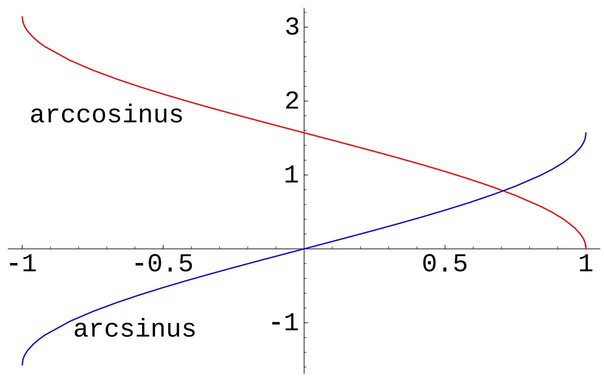

Fig. 12 – L'arcsinus et l'arccosinus

La fonction sinus étant strictement croissante sur $[-\pi/2, \pi/2]$, elle y admet une fonction inverse continue mais dérivable seulement sur $]-1, 1[$ (parce que $\sin'(\pm\pi/2) = 0$). La fonction inverse est l'arcsinus (figure (12)), $\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$. On a donc

$$\sin(\arcsin y) = y \ , \ \ y \in [-1, 1]$$

et

$$\arcsin(\sin x) = x \ , \ \ x \in [\pi/2, \pi/2].$$

Comme $\cos x > 0$ lorsque $-\pi/2 < x < \pi/2$, on a pour tout $y \in]-1, 1[$:

$$\frac{d}{dy} \arcsin y = \frac{1}{\frac{d}{dx} \sin x} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

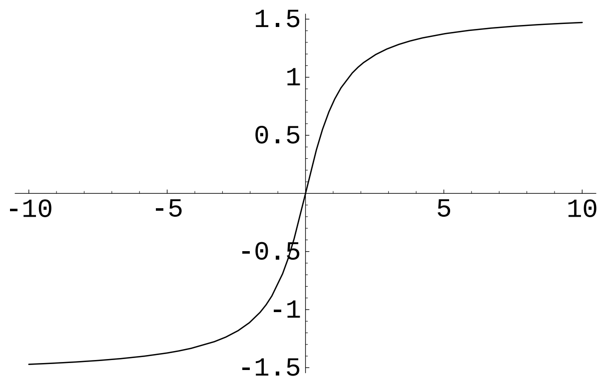

FIG. 13 – L'arctangente

c'est-à-dire que la fonction $\arcsin y + \arccos y$ est constante ; calculant sa valeur à l'origine, on obtient :

$$\arcsin y + \arccos y = \frac{\pi}{2}.$$

La fonction tangente croît (strictement) de $-\infty$ à ∞ lorsque son argument croît de $-\pi/2$ à $\pi/2$. La fonction inverse est la fonction arctangente (figure (13)), $\arctan : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$. On a donc

$$\tan(\arctan y) = y \ , \ \ y \in \mathbb{R}$$

et

$$\arctan(\tan x) = x \ , \ \ x \in]-\pi/2, \pi/2[.$$

En vertu de l'équation (8), la dérivée de cette fonction est une fonction rationnelle :

$$\frac{d}{dy} \arctan y = \frac{1}{1+y^2}.$$

5.4 La notion d'angle

Les fonctions trigonométriques introduites précédemment via le calcul intégral sont bien les mêmes que celles introduites en trigonométrie pour l'étude des triangles. C'est qu'en effet la définition correcte de la notion d'angle repose sur la fonction arccosinus.

Soit P_i le point de coordonnées cartésiennes (x_i, y_i) du plan $(i = 1, 2, 3)$. L'angle u formé par les segments $\overline{P_1P_2}$ et $\overline{P_1P_3}$ est, par définition,

$$u = \arccos \frac{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) + (y_2 - y_1)(y_3 - y_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}}$$

(figure (14), exercice (13)).

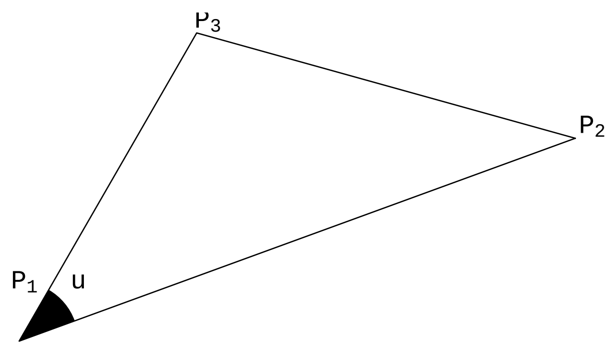

Fig. 14 – Angle entre deux droites

Introduisant la distance $d(P_i, P_j)$,

$$d(P_i, P_j) = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2},$$

cette définition peut s'écrire

$$d^2(P_2, P_3) = d^2(P_1, P_2) + d^2(P_1, P_3) - 2d(P_1, P_2)d(P_1, P_3)\cos u$$

(loi des cosinus), ce qui se réduit à

$$d^2(P_2, P_3) = d^2(P_1, P_2) + d^2(P_1, P_3)$$

lorsque $u = \pi/2$ (théorème de Pythagore).

Ces équations entraînent les relations suivantes pour un triangle rectangle (figure (15)) :

$$\cos u = \frac{A^2 + C^2 - B^2}{2AC} = \frac{A}{C}\ ,\ \sin u = \sqrt{1 - \frac{A^2}{C^2}} = \frac{B}{C}\ ,\ \tan u = \frac{B}{A}.$$

Ces relations sont bien celles que l'on utilise en trigonométrie pour définir les fonctions trigonométriques.

Il y a une autre façon de calculer un angle : en utilisant la longueur d'arc.

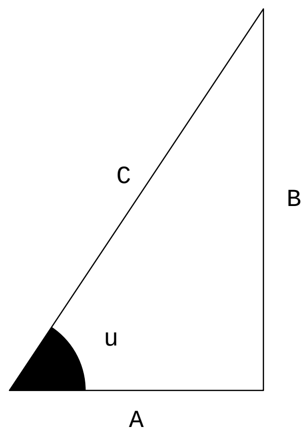

FIG. 15 – Le triangle rectangle

Une courbe plane simple $\mathcal{C}$ est définie par un paramétrage

$$x = x(t)\ ,\ y = y(t)\ ,\ t \in (a, b),$$

où $x(t)$ et $y(t)$ sont des fonctions continûment dérivables telles que

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 > 0$$

(ce qui signifie qu'elle admet une tangente en chaque point) et

$$x(t_1) = x(t_2)\ ,\ y(t_1) = y(t_2)\ \text{ et }\ t_1, t_2 \in]a, b[\ \Rightarrow\ t_1 = t_2$$

(c'est-à-dire qu'elle ne se recoupe pas). La courbe est fermée si

$$x(a) = x(b)\ ,\ y(a) = y(b).$$

Si $t = t(s)$ est une fonction continûment dérivable de $s \in (c, d)$ telle que $t'(s) \neq 0$, les équations

$$x = x(t(s)) = x_1(s)\ ,\ y = y(t(s)) = y_1(s)\ ,\ s \in (c, d),$$

représentent la même courbe $\mathcal{C}$, parcourue à une vitesse différente, dans le même sens si $t'(s) > 0$ et dans le sens contraire si $t'(s) < 0$.

La longueur $L_{\mathcal{C}}$ de la courbe $\mathcal{C}$ est, par définition, le nombre

$$L_{\mathcal{C}} = \int_a^b \sqrt{\frac{dx}{dt}^2 + \frac{dy}{dt}^2}\, dt$$

Comme il se doit, ce nombre ne dépend pas du paramétrage retenu pour la courbe :

$$\int_a^b \sqrt{\frac{dx}{dt}^2 + \frac{dy}{dt}^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{\frac{dx(t(s))}{ds}^2 + \frac{dy(t(s))}{ds}^2}\left|\frac{ds}{dt}\right| dt$$
$$= \int_c^d \sqrt{\frac{dx_1}{ds}^2 + \frac{dy_1}{ds}^2}\left|\frac{ds}{dt}\right| \left|\frac{dt}{ds}\right| ds = \int_c^d \sqrt{\frac{dx_1}{ds}^2 + \frac{dy_1}{ds}^2}\, ds$$

en vertu de la formule du changement de variable (théorème (9)).

De plus, il redonne bien, dans le cas d'un segment de droite, la distance entre les extémités : un paramétrage possible pour la droite $\mathcal{D}$ d'extrémités P_1 et P_2 est en effet

$$x = (1-t)x_1 + tx_2 \ , \ y = (1-t)y_1 + ty_2 \ , \ 0 \leq t \leq 1,$$

ce qui conduit à

$$L_{\mathcal{D}} = \int_0^1 \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}\, dt = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}.$$

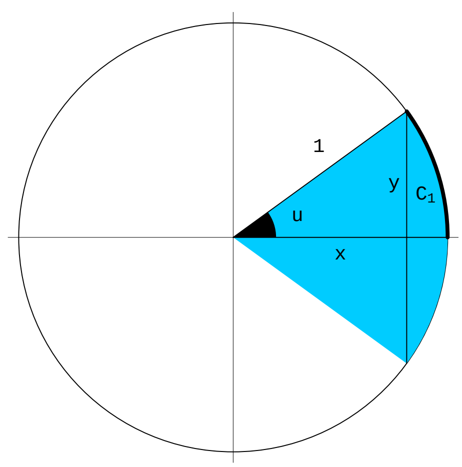

FIG. 16 – Angle et longueur d'arc

Calculons alors la longueur d'un arc $\mathcal{C}_1$ du cercle de rayon unité. En vertu des propriétés des fonctions trigonométriques, un paramétrage possible est

$$x = \cos t \ , \ y = \sin t \ , \ 0 \leq t \leq u \text{ (où } 0 \leq u \leq 2\pi).$$

(figure (16)). On a donc

$$L_{\mathcal{C}_1} = \int_0^u \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\, dt = u.$$

Chacune des définitions présentée ci-dessus permet d'étendre la notion d'angle à une situation différente ; celle avec l'arccosinus permet de définir l'angle dans un espace à un nombre quelconque (éventuellement infini) de dimensions, celle avec l'arc de cercle permet d'introduire la notion d'angle solide dans l'espace usuel.

5.5 Exercices 5

Justifier complètement toutes ses affirmations.

1. Montrer que
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$
2. Vérifier que la fonction sinus est concave sur l'intervalle $[0, \pi/2]$. En déduire que :
$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; \frac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq x.$$
3. Est-il vrai qu'une fonction dérivable est périodique si et seulement si sa dérivée l'est ?
4. Vérifier que la fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par :
$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } \ x = 0 \end{cases}$$
est discontinue mais possède quand même la propriété des valeurs intermédiaires.
5. Obtenir la solution générale l'équation différentielle suivante :
$$f''(x) + \omega^2 f(x) = e^x.$$
6. Montrer que la solution générale de l'équation différentielle
$$f''(x) - f(x) = 0$$
est
$$f(x) = a \cosh x + b \sinh x.$$

7. Exprimer $\sin 3x$ en terme de $\sin x$. En déduire la valeur de $\sin \pi/3$. Calculer $\sin \pi/5$ par la même méthode.
8. Montrer que, quels que soient les coefficients $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$, l'équation

$$a_1 \cos x + b_1 \sin x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx = 0$$

possède toujours au moins une racine dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$.
9. Montrer que si

$$T(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

on a

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} T(x) \cos kx \, dx \ , \ (k = 0, 1, \ldots, n)$$

et

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} T(x) \sin kx \, dx \ , \ (k = 1, 2, \ldots, n)$$

(formules de Fourier pour les coefficients d'un polynôme trigonométrique).
10. Soient $-\pi < x_1 < x_2 < x_3 \leq \pi$ et y_1, y_2, y_3 des nombres quelconques. Déterminer un polynôme trigonométrique de degré un,

$$T(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x,$$

tel que

$$T(x_i) = y_i \ , \ (i = 1, 2, 3).$$

11. Montrer que la fonction $f(y) = \cos(n \arccos y)$ est un polynôme de degré n en y. (Suggestion : raisonner par récurrence sur n).
12. Montrer que la fonction arctan n'est pas une fonction rationnelle.
13. Si

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \ \text{ et } \ \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

soient

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

et

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}.$$

Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\mathbf{x} \centerdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$$

et discuter le cas d'égalité (comparer avec l'exercice (7) du chapitre 2). Vérifier aussi la relation

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\,\mathbf{x} \centerdot \mathbf{y}.$$

14. Montrer que la somme des angles intérieurs d'un triangle est égale à π. (Suggestion : commencer par un triangle rectangle.)
15. Calculer l'aire déterminée par l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Le calcul de sa longueur est-il aussi facile ?

6 CALCUL DES PRIMITIVES

La famille des fonctions introduites est fermée sous l'opération « calcul de la primitive ». En particulier, elle permet de trouver une primitive à toute fonction rationnelle.

6.1 Primitives des fonctions analytiques usuelles

Les entrées de la petite table suivante peuvent être vérifiées en dérivant le membre de droite. Elles ont été obtenues soit directement, soit par une intégration par parties,

$$\int f(x)\,dx = xf(x) - \int xf'(x)\,dx,$$

et/ou par un changement de variable simple ($y = 1 \pm x^2$, $y = \arcsin x$, $y = \operatorname{arcsinh} x$).

1. $$\int x^p\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} \quad \text{si } p \neq -1 \quad \text{pour } x > 0$$

2. $$\int \frac{1}{x}\,dx = \log x \quad \text{pour } x > 0$$

3. $$\int e^x\,dx = e^x$$

4. $$\int \log x\,dx = x\log x - x \quad \text{pour } x > 0$$

5. $$\int \cos x\,dx = \sin x$$

6. $$\int \sin x\,dx = -\cos x$$

7. $$\int \tan x\,dx = -\log\cos x \quad \text{pour } |x| < \frac{\pi}{2}$$

8.
$$\int \arccos x \, dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} \quad \text{pour } |x| < 1$$

9.
$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} \quad \text{pour } |x| < 1$$

10.
$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \log \sqrt{1+x^2}$$

11.
$$\int \cosh x \, dx = \sinh x$$

12.
$$\int \sinh x \, dx = \cosh x$$

13.
$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}) \quad \text{pour } |x| < 1$$

14.
$$\int \sqrt{1+x^2} \, dx = \frac{1}{2}(\text{arcsinh } x + x\sqrt{1+x^2})$$

15.
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x \quad \text{pour } |x| < 1$$

16.
$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \, dx = \text{arcsinh } x$$

On utilise quelquefois des « formules de réduction » pour calculer certaines primitives par récurrence. En voici un exemple.

Soit $N \geq 2$ un entier naturel. Alors

$$\begin{aligned}
\int \sin^N x \, dx &= \int \sin^{N-2} x \, dx - \int \sin^{N-2} x \, \cos^2 x \, dx \\
&= \int \sin^{N-2} x \, dx - \left(\int (\sin^{N-2} x \, \cos x) \, \cos x \, dx \right) \\
&= \int \sin^{N-2} x \, dx - \left(\frac{\sin^{N-1} x}{N-1} \cos x + \int \frac{\sin^{N-1} x}{N-1} \, \sin x \, dx \right) \\
&= \int \sin^{N-2} x \, dx - \frac{\sin^{N-1} x \, \cos x}{N-1} - \int \frac{\sin^N x}{N-1} \, dx
\end{aligned}$$

de telle sorte que

$$\int \sin^N x\, dx \left(1 + \frac{1}{N-1}\right) = \int \sin^{N-2} x\, dx - \frac{\sin^{N-1} x\ \cos x}{N-1}.$$

Autrement dit :

$$\int \sin^N x\, dx = -\frac{\sin^{N-1} x\ \cos x}{N} + \frac{N-1}{N} \int \sin^{N-2} x\, dx. \tag{10}$$

La formule de Wallis est une belle application de cette dernière relation.

Théorème 18 (Le produit de Wallis)

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdots 2n\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdots(2n-1)\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}.$$

Démonstration. En vertu de l'équation (10), on a

$$\int_0^{\pi/2} \sin^N x\, dx = \frac{N-1}{N} \int_0^{\pi/2} \sin^{N-2} x\, dx$$

de telle sorte que, par récurrence sur n,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\, dx = \frac{2n-1}{2n}\, \frac{2n-3}{2n-2}\, \cdots\, \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} dx$$

c'est-à-dire

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\, dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\frac{\pi}{2}$$

et que

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\, dx = \frac{2n}{2n+1}\, \frac{2n-2}{2n-1}\, \cdots\, \frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} \sin x\, dx$$

c'est-à-dire

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\, dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}. \tag{11}$$

Ainsi

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\, dx}{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\, dx}\, \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdots 2n\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdots(2n-1)\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}.$$

Le résultat suit donc des inégalités

$$1 \leq \frac{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\,dx}{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\,dx} = \frac{2n+1}{2n} \frac{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\,dx}{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x\,dx} \leq \frac{2n+1}{2n} = 1 + \frac{1}{2n}.$$

C.Q.F.D.

Remarque.

On utilise souvent la forme équivalente plus simple

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)\sqrt{2n+1}} \tag{12}$$

du produit de Wallis.

6.2 Primitives des fonctions rationnelles

Les entrées de la petite table suivante peuvent être vérifiées en dérivant le membre de droite. Elles ont été obtenues soit par une décomposition en fractions partielles ou soit par un changement de variable simple (après complétion du carré).

1. $$\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b} \log\left|\frac{x-a}{x-b}\right| \quad \text{pour } x \neq a, b$$

2. $$\int \frac{dx}{x^2+2Ax+B} = \frac{1}{\sqrt{B-A^2}} \arctan \frac{x+A}{\sqrt{B-A^2}} \quad \text{si } B - A^2 > 0$$

3. $$\int \frac{x\,dx}{(x-a)(x-b)} = \frac{a}{a-b} \log|x-a| - \frac{b}{a-b} \log|x-b| \quad \text{pour } x \neq a, b$$

4. $$\int \frac{x\,dx}{x^2+2Ax+B} = \log\sqrt{x^2+2Ax+B} - \frac{A}{\sqrt{B-A^2}} \arctan \frac{x+A}{\sqrt{B-A^2}}$$
   $$\text{si } B - A^2 > 0$$

La primitive d'une fonction rationnelle $R = P/Q$ quelconque peut s'obtenir en factorisant son dénominateur Q,

$$Q(x) = \prod_i (x - a_i)^{p_i} \prod_j (x^2 + 2A_j x + B_j)^{q_j},$$

(dans un cours d'analyse complexe, on montre que tout polynôme à coefficients réels admet une telle factorisation) puis en la décomposant en fractions partielles :

$$R(x) = A(x) + \sum_i \frac{\alpha_i\, x^{m_i}}{(x - a_i)^{n_i}} + \sum_j \frac{\beta_j\, x^{u_j}}{(x^2 + 2A_j x + B_j)^{v_j}},$$

(A est un polynôme, identiquement nul si le degré du numérateur P est strictement plus petit que celui du dénominateur Q). Une formule de réduction peut ensuite s'avérer nécessaire.

En vertu du théorème du binôme, on a

$$\int \frac{x^k\, dx}{(x-a)^n} = \int \frac{(x - a + a)^k\, dx}{(x-a)^n} = \int \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^{k-i} (x-a)^{i-n}\, dx.$$

Par suite, si $1 \leq k \leq n-2$,

$$\int \frac{x^k\, dx}{(x-a)^n} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^{k-i} \frac{(x-a)^{i-n+1}}{i-n+1} \quad \text{pour } x \neq a$$

alors que

$$\int \frac{x^{n-1}\, dx}{(x-a)^n} = \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-1}{i} a^{n-1-i} \frac{(x-a)^{i-n+1}}{i-n+1} + \log(x-a) \quad \text{pour } x > a.$$

On a

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 2Ax + B)^n} = \frac{\sqrt{B - A^2}}{(B - A^2)^n} \int \frac{dy}{(y^2+1)^n}$$

en posant

$$y = \frac{x + A}{\sqrt{B - A^2}}.$$

De plus,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} &= \int \frac{(x^2+1-x^2)\,dx}{(x^2+1)^n} = \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} - \int x\,\frac{x\,dx}{(x^2+1)^n}\\ &= \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}\left(\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} - \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}\right)\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{2(n-1)}\,\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} \tag{13}$$

et, si $1 \leq k \leq 2n-1$:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^k\,dx}{(x^2+1)^n} &= \int x^{k-1}\,\frac{x\,dx}{(x^2+1)^n}\\ &= -\frac{1}{2(n-1)}\,\frac{x^{k-1}}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{k-1}{2(n-1)}\int \frac{x^{k-2}\,dx}{(x^2+1)^{n-1}}.\end{aligned}$$

Exemple.

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4\,dx}{x^2+1} = \frac{22}{7} - \pi. \tag{14}$$

En effet, en divisant le numérateur par le dénominateur, on trouve

$$\frac{x^4(1-x)^4}{x^2+1} = x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4 - \frac{4}{x^2+1}$$

ce qui conduit, par intégration, à la relation (14). Cette dernière entraîne en particulier

$$0 < \frac{22}{7} - \pi < \int_0^1 x^4(1-x)^4\,dx = \frac{1}{630}$$

d'où l'estimation

$$3,141 < \pi < 3,143.$$

6.3 Exercices 6

Justifier complètement toutes ses affirmations.

1. Calculer
$$\int \tanh x \, dx.$$
2. Calculer
$$\int \operatorname{arctanh} x \, dx.$$
3. Montrer que
$$\int_0^1 x^m (1-x)^n \, dx = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2m+1} x \cos^{2n+1} x \, dx = \frac{m! \, n!}{(m+n+1)!}.$$
4. La probabilité d'observer autant de piles que de faces lors de $2n$ lancers d'une pièce de monnaie non-biaisée est
$$p_n = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}}.$$
Montrer que
$$\lim_{n \to +\infty} p_n = 0.$$
5. Calculer
$$\int \frac{x^3 \, dx}{(x-1)^4} \; , \; x > 1.$$
6. Calculer
$$\int \frac{x^3 \, dx}{(x^2+1)^2}.$$
7. Calculer
$$\int \frac{x^3 \, dx}{(x^2+x+1)^2}.$$

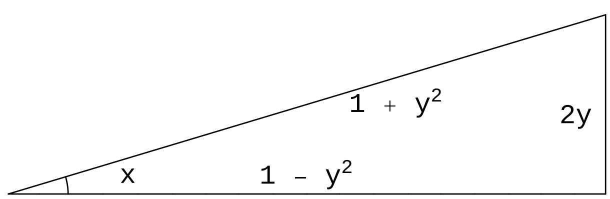

FIG. 17 – Une substitution

8. Soit $0 < y < 1$. On considère le triangle rectangle de côtés $1 - y^2$, $2y$ et $1 + y^2$. Montrer que l'angle x opposé au côté $2y$ vaut $2 \arctan y$. En déduire que la substitution $x = 2 \arctan y$ entraîne

$$\cos x = \frac{1 - y^2}{1 + y^2} \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{2y}{1 + y^2}.$$

9. Calculer

$$\int \frac{1 + \cos x}{1 + \sin x}\, dx \ , \ |x| < \frac{\pi}{2}.$$

7 INTÉGRALES IMPROPRES

La définition de l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle n'a plus de sens si ce dernier n'est pas compact.

7.1 Généralisation de l'intégrale

Soit $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ une fonction continue ($-\infty \leq a < b \leq +\infty$). Elle est donc intégrable sur tout intervalle compact $[\alpha, \beta]$ entièrement contenu dans (a, b). Par définition,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\alpha \to a+,\ \beta \to b-} \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

si la limite existe (c'est-à-dire si l'intégrale est convergente — elle peut être divergente). On généralise ainsi la notion d'intégrale (exercice (12) du chapitre 1) au cas où l'intervalle d'intégration ou la fonction à intégrer (ou les deux) ne sont pas bornés.

De façon explicite, dans le cas par exemple de l'intervalle $(0, +\infty)$, dire que

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = I$$

signifie qu'à chaque $\epsilon > 0$ correspondent $\delta > 0$ et $M > 0$ tels que

$$0 < \alpha < \delta \ \text{ et } \ \beta > M \ \text{ impliquent } \ \left| \int_\alpha^\beta f(x)\,dx - I \right| < \epsilon$$

ou, de manière équivalente, que pour toutes suites $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{\beta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres positifs,

$$\lim_{n \to +\infty} \alpha_n = 0 \ \text{ et } \ \lim_{n \to +\infty} \beta_n = +\infty \ \text{ impliquent } \ \lim_{n \to +\infty} \int_{\alpha_n}^{\beta_n} f(x)\,dx = I.$$

Exemples.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \lim_{\beta \to +\infty} \int_0^\beta \frac{dx}{x^2 + 1}$$
$$= \lim_{\beta \to +\infty} \arctan x \Big|_0^\beta = \lim_{\beta \to +\infty} \arctan \beta = \frac{\pi}{2};$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{\beta \to +\infty} \int_0^\beta e^{-x}\,dx = \lim_{\beta \to +\infty} -e^{-x} \Big|_0^\beta = 1 - e^{-\beta} = 1.$$

Exemple. Soient $0 < \alpha < \beta$. Puisque

$$\int_\alpha^\beta \frac{dx}{x} = \log x \Big|_\alpha^\beta = \log \beta - \log \alpha$$

et que, si $p \neq 1$,

$$\int_\alpha^\beta \frac{dx}{x^p} = \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_\alpha^\beta = \frac{\beta^{-p+1}}{-p+1} - \frac{\alpha^{-p+1}}{-p+1},$$

l'intégrale impropre

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$$

diverge si $p \geq 1$ et

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p} \quad \text{si} \quad p < 1$$

alors que l'intégrale impropre

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$$

diverge si $p \leq 1$ et que

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1} \quad \text{si} \quad p > 1.$$

Ainsi, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$$

est divergente quelque soit $p > 0$.

Les propriétés de linéarité, de positivité et d'additivité (théorèmes (3), (4) et (5)) restent valables pour les intégrales impropres. Par exemple, si les intégrales

$$\int_a^b f_1(x)\,dx \quad \text{et} \quad \int_a^b f_2(x)\,dx$$

sont convergentes et $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$,

$$a_1 \int_a^b f_1(x)\,dx + a_2 \int_a^b f_2(x)\,dx$$

$$= a_1 \lim_{\alpha \to a+,\ \beta \to b-} \int_\alpha^\beta f_1(x)\,dx + a_2 \lim_{\alpha \to a+,\ \beta \to b-} \int_\alpha^\beta f_2(x)\,dx$$

$$= \lim_{\alpha \to a+,\ \beta \to b-} \int_\alpha^\beta (a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x))\,dx = \int_a^b (a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x))\,dx.$$

De même, la formule du changement de variable et celle de l'intégration par parties (convenablement adaptées) (théorèmes (8) et (9)) sont encore vraies (exercice (1)).

L'étude de la convergence des intégrales impropres est semblable à l'étude de la convergence des séries infinies.

Lorsque la fonction intégrée est positive, il n'y a que deux possibilités, à savoir, la divergence vers $+\infty$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = +\infty$$

ou la convergence vers un nombre fini, ce que l'on dénote par

$$\int_a^b f(x)\,dx < +\infty.$$

En effet, les nombres

$$\int_{\alpha_n}^{\beta_n} f(x)\,dx$$

croissent lorsque $\alpha_n \downarrow a$ et $\beta_n \uparrow b$ (exercice (2)).

En conséquence, le critère de comparaison entre intégrales impropres de fonctions positives est applicable. De même, la convergence absolue d'une intégrale impropre entraîne sa convergence simple (exercice (3)).

Exemple.

L'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \sin x^2\,dx$$

est convergente. En effet,

$$\int_1^{\beta} \sin x^2\,dx = \int_1^{\beta^2} \frac{\sin y}{2\sqrt{y}}\,dy = \frac{-\cos y}{2\sqrt{y}}\Big|_1^{\beta^2} - \int_1^{\beta^2} \frac{\cos y}{4\,y^{3/2}}\,dy$$

de telle sorte que

$$\int_1^{+\infty} \sin x^2\,dx = \frac{\cos 1}{2} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos y}{4\,y^{3/2}}\,dy$$

(cette dernière intégrale est absolument convergente). Cet exemple illustre le fait qu'une intégrale impropre peut converger sans que la fonction intégrée $f(x)$ ne tende vers 0 lorsque $x \to +\infty$ — à la différence des séries.

Théorème 19 (Test intégral) *Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue, positive et décroissante. Alors la série $\sum_{k=1}^{+\infty} f(k)$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ convergent ou divergent simultanément.*

Démonstration. Les inégalités

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq f(k)$$

entraînent les inégalités

$$\sum_{k=2}^{+\infty} f(k) \leq \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{+\infty} f(k).$$

C.Q.F.D.

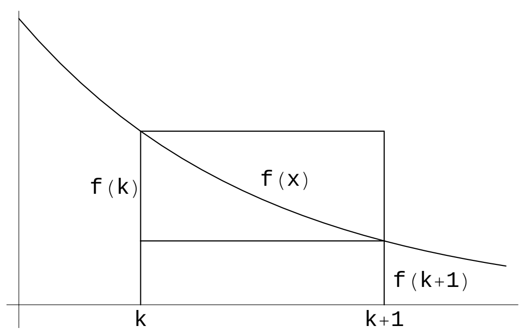

FIG. 18 – Comparaison de séries et d'intégrales

Exemple.
La série

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^p}$$

converge si et seulement si $p > 1$, par comparaison avec l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}.$$

On a de plus l'estimation

$$\frac{1}{p-1} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^p} \leq \frac{p}{p-1}.$$

7.2 La fonction gamma

L'intégrale

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

converge si et seulement si $x > 0$. En effet, puisque

$$\lim_{t\to+\infty} t^{x+1}e^{-t} = 0,$$

on a, pour une constante positive A_x appropriée, que

$$t^{x-1}e^{-t} \le \frac{A_x}{t^2} \quad \text{pour tout } t > 1$$

de telle sorte que, quel que soit x,

$$\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt \le A_x \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} < +\infty.$$

D'autre part, lorsque $x < 1$, l'intégrale est aussi impropre à 0 et elle y converge si et seulement si $x > 0$ puisque

$$\frac{1}{e}\int_0^1 \frac{dt}{t^{1-x}} \le \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt \le \int_0^1 \frac{dt}{t^{1-x}}.$$

La fonction gamma (ou fonction eulérienne de seconde espèce) est la fonction $\Gamma :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par la relation

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt.$$

(La fonction eulérienne de première espèce ou fonction bêta est une fonction de deux variables

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt \ ,\ x > 0 \ ,\ y > 0.$$

(exercice (3) du chapitre 6)).

Théorème 20 (Équation fonctionnelle de la fonction gamma)

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \tag{15}$$

Démonstration. Il suffit d'intégrer par parties :

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\, dt = t^x(-e^{-t})\Big|_0^{+\infty} + x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\, dt = x\Gamma(x).$$

C.Q.F.D.

La relation (15) jointe au fait que

$$\Gamma(1) = 1$$

montre que la fonction gamma interpole les factoriels :

$$\Gamma(n+1) = n! \text{ pour } n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Lue à l'envers,

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x},$$

elle permet de prolonger la fonction gamma à $\mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$. Le tracé du graphe de la fonction gamma est assez complexe et nous allons omettre sa justification dans ce cours (figure (19)).

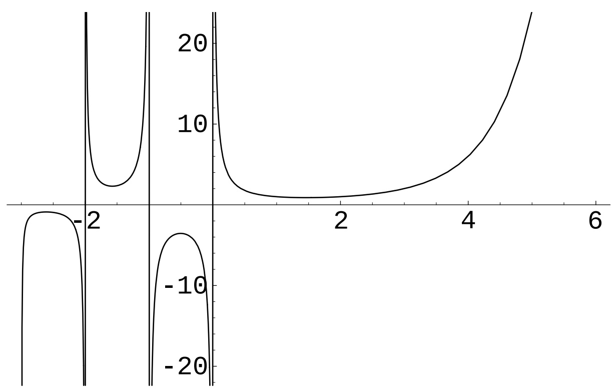

Fig. 19 – La fonction gamma

Théorème 21 (L'intégrale de Gauss)

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{16}$$

Démonstration. La démonstration de cette formule repose sur la convexité de l'exponentielle. En vertu de l'exercice (13) du chapitre 4, nous avons

$$e^x \geq 1 + x \quad \text{pour tout } x.$$

D'où

$$e^{-x^2} \geq 1 - x^2 \ , \ e^{x^2} \geq 1 + x^2$$

c'est-à-dire

$$1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}.$$

En faisant le changement de variable $t = x^2$, nous voyons que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-1/2} e^{-t}\, dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx.$$

Or, en utilisant les inégalités précédentes, on a

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\, dx \leq \int_0^1 e^{-nx^2}\, dx \leq \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

c'est-à-dire (on a posé $y = x\sqrt{n}$ dans l'intégrale du milieu de la ligne précédente)

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\, dx \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-y^2}\, dy \leq \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

Donc, d'une part, en vertu de la relation (11) (et en posant $x = \cos y$ dans l'intégrale de gauche de la ligne précédente),

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-y^2}\, dy \geq \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} y\, dy = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}$$

et (équation (12))

$$\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\, dy \geq \lim_{n \to +\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n\ \sqrt{n}}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

D'autre part, en vertu de la relation (13),

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-y^2}\, dy \leq \frac{(2n-3)(2n-5)\cdots 1}{(2n-2)(2n-4)\cdots 2} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$$

et (équation (12) encore une fois)

$$\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\, dy \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)\sqrt{n}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)}\, \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

C.Q.F.D.

Remarque.

Dans le calcul des probabilités, on rencontre plutôt l'intégrale de Gauss sous la forme équivalente

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\, dt = 1.$$

Théorème 22 (La formule de Stirling)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{\sqrt{n}(\frac{n}{e})^n} = \sqrt{2\pi}.$$

Démonstration. La démonstration de cette formule repose sur la concavité du logarithme. En vertu de l'exercice (7) du chapitre 4, nous avons d'abord

$$0 < k < x < k+1 \;\Rightarrow\; \log x \geq (k+1-x)\log k + (x-k)\log(k+1)$$

c'est-à-dire

$$0 < k < x < k+1 \;\Rightarrow\; \log x \geq \log k + (x-k)\log\frac{k+1}{k}$$

ce qui, par intégration, entraîne

$$\int_k^{k+1} \log x\, dx \geq \frac{1}{2}(\log(k+1) + \log k).$$

En vertu de l'exercice (9) du chapitre 4, nous avons aussi

$$\log x \leq \log k + \frac{1}{k}(x-k) \quad (\text{ pour tout } x).$$

Nous en déduisons tout d'abord que la suite de nombres

$$\frac{n!}{\sqrt{n}(\frac{n}{e})^n}$$

est décroissante. En effet, après simplifications,

$$\log \frac{(n+1)!}{\sqrt{n+1}(\frac{n+1}{e})^{n+1}} - \log \frac{n!}{\sqrt{n}(\frac{n}{e})^n} = \frac{1}{2}(\log(n+1)+\log n) - \int_n^{n+1} \log x \, dx \leq 0.$$

Toute suite décroissante de nombres positifs étant convergente, posons

$$\lambda = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{\sqrt{n}(\frac{n}{e})^n}.$$

Cette limite est strictement positive :

$$\begin{aligned}\log n! = \sum_{k=2}^{n} \log k &\geq \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \left(\log x - \frac{x-k}{k}\right) dx \\ = n\log n - n + 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} &\geq n\log n - n + 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\int_k^{k+1}\frac{dx}{x} \\ &= n\log n - n + 1 + \frac{1}{2}(\log(n+1) - \log 2)\end{aligned}$$

de telle sorte que

$$n! \geq \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n+1}\,\frac{e}{\sqrt{2}}$$

et $\lambda \geq e/\sqrt{2}$. Nous avons finalement (équation (12)),

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{\pi}{2}} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)\sqrt{2n+1}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2^{2n}n!^2}{(2n!)\sqrt{2n+1}} \\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{2^{2n}}{\sqrt{2n+1}}\left(\frac{n!}{\sqrt{n}(\frac{n}{e})^n}\right)^2 \frac{\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{(2n)!}\,\frac{n}{\sqrt{2n}\,2^{2n}} = \frac{\lambda^2}{2\,\lambda} = \frac{\lambda}{2}.\end{aligned}$$

C.Q.F.D.

7.3 Exercices 7

Justifier complètement toutes ses affirmations.

1. Énoncer et démontrer la formule de changement de variable pour les intégrales impropres.
2. Si $f : [0, +\infty[$ est continue et positive, pour montrer que

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = I,$$

il faut montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\beta_n} f(x)\, dx = I$$

pour toute suite $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\lim_{n \to +\infty} \beta_n = +\infty.$$

Montrer qu'il suffit de considérer les suites $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ monotones.

3. Montrer que la convergence absolue implique la convergence simple, c'est-à-dire que la convergence de l'intégrale

$$\int_a^b |f(x)|\, dx$$

entraîne celle de l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

(Suggestion : on a $0 \leq |f| - f \leq 2|f|$).

4. Pour quelles valeurs des paramètres $p > 0$ et $q > 0$ l'intégrale suivante est-elle convergente

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[q]{1 + x^p}}?$$

5. Montrer qu'une fonction rationnelle $R = P/Q$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si son dénominateur Q ne s'annule pas et le degré de Q excède le degré du numérateur P par au moins deux.

6. Montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx$$

est convergente.

7. Montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

est convergente. (Suggestion : intégrer par parties.)

8. Montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$$

est divergente.

9. Calculer

$$\int_0^{+\infty} e^{-px} \cos x \, dx$$

($p > 0$). (Suggestion : intégrer par parties.)

10. Déterminer les valeurs du paramètre $p > 0$ pour lesquelles la série

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^p \log k}$$

est convergente.

11. Calculer $\Gamma(n + \frac{1}{2})$.

12. Calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \, dx$$

pour $k = 0, 1, 2$ ($\sigma > 0$).

8 SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

Si des fonction f_n convergent vers une fonction limite f lorsque $n \to +\infty$, des propriétés telles que la continuité, la dérivabilité ou l'intégrabilité ne sont pas nécessairement préservées.

8.1 La convergence uniforme

On peut considérer une suite de fonctions $f_n : (a, b) \to \mathbb{R}$ comme une famille de suites numériques dépendant d'un paramètre $x \in (a, b)$ ou comme une suite de courbes indexées par un indice $n \in \mathbb{N}$. Le premier point de vue conduit naturellement à la notion de convergence simple (ou ponctuelle), le second conduit à celle de convergence uniforme.

Les fonctions $f_n : (a, b) \to \mathbb{R}$ convergent **simplement** (ou **ponctuellement**) vers la fonction $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ sur l'intervalle (a, b) si, pour chaque $x \in (a, b)$, la suite numérique $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le nombre $f(x)$, c'est-à-dire si à chaque $x \in (a, b)$ et à chaque $\epsilon > 0$ correspond un indice $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N \ \text{ implique } \ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Exemple.

Les fonctions

$$f_n(x) = \frac{1 - nx}{1 + nx}$$

convergent simplement sur l'intervalle $[0, 1]$ vers la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans cet exemple, bien que les fonctions f_n soient continues, la fonction limite f ne l'est pas.

L'indice N de la définition précédente dépend de x et de ϵ,

$$N = N(x, \epsilon).$$

Lorsqu'il peut être choisi indépendamment du nombre $x \in (a, b)$,

$$N = N(\epsilon),$$

on dit que les fonctions $f_n : (a, b) \to \mathbb{R}$ convergent **uniformément** sur (a, b) vers la fonction limite $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. En d'autres mots, les fonctions $f_n : (a, b) \to \mathbb{R}$ convergent uniformément sur (a, b) vers la fonction $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ si à chaque $\epsilon > 0$ correspond un indice $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N \text{ implique } |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \text{ pour tout } x \in (a, b).$$

Exemple.
Les fonctions

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$$

convergent uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $f = 0$ puisque

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Exemple.
Les fonctions

$$f_n(x) = \frac{1 - nx}{1 + nx}$$

ne convergent pas uniformément sur $[0, 1]$ vers leur limite f puisque

$$\left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Aucun indice N ne peut correspondre à $\epsilon = 1$. Cette absence d'uniformité dans la convergence est responsable de la discontinuité de la fonction limite.

Théorème 23 (Continuité d'une fonction limite) *Soient $f_n : (a, b) \to \mathbb{R}$ des fonctions continues qui convergent uniformément sur (a, b) vers une fonction $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Alors f est continue sur (a, b).*

Démonstration. Soit $x_0 \in (a, b)$ un point arbitraire. Montrons que f est continue en x_0. Soit $\epsilon > 0$. La convergence uniforme entraîne l'existence d'un indice $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N \text{ implique } |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3} \text{ pour tout } x \in (a, b).$$

La continuité de la fonction f_N en x_0 entraîne d'autre part l'existence d'un nombre $\delta > 0$ tel que

$$|x - x_0| < \delta \text{ et } x \in (a, b) \text{ impliquent } |f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Donc, si $|x - x_0| < \delta$ et $x \in (a, b)$, on aura

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| < \epsilon.$$

C.Q.F.D.

Théorème 24 (Intégration d'une fonction limite) *Soient $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues sur un intervalle compact $[a, b]$ qui convergent uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Alors*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx.$$

Démonstration. On a

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b f_n(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\, dx.$$

Donné $\epsilon > 0$, soit $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N \text{ implique } |f(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{b - a} \text{ pour tout } x \in [a, b].$$

Alors

$$n \geq N \text{ implique } \left| \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b f_n(x)\, dx \right| < \epsilon.$$

C.Q.F.D.

Remarque.

Le théorème précédent n'est pas vrai si l'intervalle d'intégration n'est pas compact (exercice (5)).

Théorème 25 (Critère de Cauchy) *Les fonctions $f_n : (a, b) \to \mathbb{R}$ convergent uniformément sur (a, b) vers une fonction $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ si et seulement si elles satisfont la condition suivante : à chaque $\epsilon > 0$ correspond un indice $N \in \mathbb{N}$ tel que :*

$$m, n \geq N \text{ implique } |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon \text{ pour tout } x \in (a, b).$$

Démonstration.

La condition est nécessaire. Si les fonctions f_n convergent uniformément vers la fonction f sur (a, b), il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N \text{ implique } |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} \text{ pour tout } x \in (a, b).$$

Alors, si m, $n \geq N$, on aura

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \epsilon \text{ pour tout } x \in (a,b).$$

La condition est suffisante. Si elle est satisfaite, en vertu du critère de Cauchy pour les suites numériques, pour chaque $x \in (a,b)$,

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) \text{ existe,}$$

définissant ainsi une fonction $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ vers laquelle les fonction de la suite convergent :

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

Cette convergence est uniforme. En effet, donné $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait

$$|f_m(x) - f(x)| = \lim_{n\to+\infty} |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon \text{ pour tout } x \in (a,b)$$

dès que $m \geq N$. C.Q.F.D.

Théorème 26 (Critère de Weierstrass) *Soient $f_k : (a,b) \to \mathbb{R}$ des fonctions. La série*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$$

converge uniformément sur (a,b) pourvu qu'il existe une série numérique convergente

$$\sum_{k=0}^{+\infty} M_k < +\infty,$$

telle que

$$|f_k(x)| \leq M_k \text{ pour tout } x \in (a,b).$$

Démonstration. Posons

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x), \; S_n = \sum_{k=0}^{n} M_k.$$

On a

$$|S_n(x) - S_m(x)| \leq |S_n - S_m|$$

et le résultat suit du critère de Cauchy. C.Q.F.D.

En vertu du théorème (24), une série uniformément convergente de fonctions continues sur un intervalle compact peut y être intégrée terme à terme :

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\,dx$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_a^b f_k(x)\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx.$$

Exemple.

En vertu du critère de Weierstrass, la série

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin kx}{k^2}$$

est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ et

$$\int_0^\pi \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin kx}{k^2}\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{(2j+1)^3}.$$

Dans le cas de fonctions continues sur un intervalle compact, les définitions et les théorèmes précédents peuvent s'énoncer élégamment à l'aide de la notion de norme, qui joue pour les fonctions un rôle analogue à celui que joue la notion de valeur absolue pour les nombres. La **norme** $\|f\|$ d'une fonction continue sur un intervalle compact $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est définie par la relation

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| \ \mid\ x \in [a, b]\}.$$

On peut reformuler les énoncés précédents à l'aide de cette notion. Les fonctions f_n convergent uniformément vers la fonction f si et seulement si

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\| = 0.$$

Le critère de Cauchy affirme qu'une condition nécessaire et suffisante pour que les fonctions f_n admettent une limite uniforme est que

$$\lim_{m,n\to+\infty} \|f_m - f_n\| = 0$$

et le critère de Weierstrass dit que la condition

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \|f_k\| < +\infty$$

est suffisante pour assurer la convergence uniforme de la série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x).$$

Remarque.

Lorsqu'une série de fonctions converge en vertu du critère de Weierstrass, on dit qu'elle converge **normalement**.

8.2 L'approximation des fonction continues

Les polynômes sont les plus élémentaires des fonctions continues. Ils peuvent aussi servir à approximer toutes les autres.

Théorème 27 (Weierstrass) *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors il existe une suite de polynômes $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent uniformément vers f sur $[a, b]$.*

Démonstration.

On peut supposer que $[a, b] = [0, 1]$ et que $f(0) = f(1) = 0$ (en soustrayant si nécessaire un polynôme de degré un de f). Prolongeons la fonction f en posant $f(x) = 0$ si $x \notin [0, 1]$. Nous obtenons ainsi une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continue.

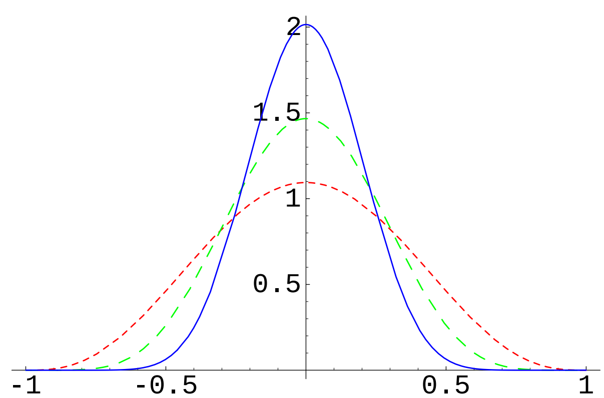

FIG. 20 – Quelques fonctions $Q_n(x)$

Considérons le polynôme (de degré $2n$)

$$Q_n(x) = c_n(1 - x^2)^n$$

où le nombre c_n est défini par

$$\int_{-1}^{1} Q_n(x)\,dx = 1.$$

(figure(20)). Observons que quelque soit $\delta > 0$, on a

$$0 \le Q_n(x) \le c_n(1-\delta^2)^n \quad \text{si} \quad \delta \le |x| \le 1.$$

De plus, en vertu de la convexité de la fonction $u \mapsto (1-u)^n$, on a

$$\frac{1}{c_n} \ge 2\int_0^{1/\sqrt{n}} Q_n(x)\,dx \ge 2\int_0^{1/\sqrt{n}} (1-nx^2)\,dx = \frac{4}{3\sqrt{n}},$$

c'est-à-dire que

$$c_n < \sqrt{n}.$$

Introduisons maintenant le polynôme (de degré $2n$)

$$P_n(x) = \int_0^1 f(s)Q_n(x-s)\,ds.$$

Lorsque $0 \le x \le 1$ et puisque f est nulle à l'extérieur de l'intervalle $[0,1]$,

$$P_n(x) = \int_{x-1}^{x} f(x-t)Q_n(t)\,dt = \int_{-1}^{1} f(x-t)Q_n(t)\,dt.$$

Lorsque $0 \le x \le 1$ et quelque soit $\delta > 0$, on a donc

$$|P_n(x) - f(x)| = \left|\int_{-1}^{1} (f(x-t) - f(x))Q_n(t)\,dt\right| \le \int_{-1}^{1} |f(x-t) - f(x)|Q_n(t)\,dt$$
$$= \int_{|t|<\delta} |f(x-t) - f(x)|Q_n(t)\,dt + \int_{\delta \le |t| \le 1} |f(x-t) - f(x)|Q_n(t)\,dt.$$

Un nombre $\epsilon > 0$ étant donné, choisissons, en vertu de la continuité uniforme de la fonction f, un nombre $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tel que

$$\int_{|t|<\delta} |f(x-t) - f(x)|Q_n(t)\,dt < \frac{\epsilon}{2}\int_{|t|<\delta} Q_n(t)\,dt < \frac{\epsilon}{2}.$$

On a alors

$$|P_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} + 2\,\|f\|\,2\,c_n\,(1-\delta^2)^n < \frac{\epsilon}{2} + 4\,\|f\|\,\sqrt{n}\,(1-\delta^2)^n.$$

En utilisant le fait que

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n}\,(1-\delta^2)^n = 0,$$

nous pouvons choisir un entier n_ϵ tel que

$$n \geq n_\epsilon \text{ implique } |P_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

pour tout $x \in [0,1]$. C.Q.F.D.

Remarque.

Le polynôme P_n du théorème précédent est la **convolution** de la fonction donnée f avec le « noyau » Q_n sur l'intervalle $[-1,1]$. La représentation

$$P_n(x) = \int_{-1}^{1} f(s)Q_n(x-s)\,ds$$

montre qu'il est, comme le noyau, un polynôme alors que la représentation

$$P_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x-t)Q_n(t)\,dt$$

montre qu'il constitue une moyenne pondérée des valeurs de la fonction f sur l'intervalle, un poids plus grand étant accordé aux valeurs près de x, d'où la convergence vers $f(x)$.

8.3 Les séries entières

Les séries de fonctions les plus simples sont les séries entières (ou séries de puissances), qui sont des séries de la forme

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$$

— les coefficients a_k sont donnés. La plus simple des séries entières est la **série géométrique**, pour laquelle ces coefficients sont tous égaux à 1. Puisque, si $x \neq 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

(comme il est aisé de le vérifier en multipliant les deux membres de l'équation par $1-x$), la série géométrique de raison x converge si et seulement si $|x|<1$ auquel cas

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}\ , \quad |x|<1.$$

Dans le cas général, les coefficients a_k déterminent les valeurs de x pour lesquelles la série entière converge, via la notion de rayon de convergence. Et le calcul de ce rayon de convergence se fait au moyen d'une limite supérieure.

Soit $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. La suite

$$M_n = \sup\{u_k \mid k \geq n\}$$

est décroissante et bornée, donc elle est convergente. Sa limite est la **limite supérieure** de la suite $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$:

$$\limsup_k u_k = \lim_{n\to+\infty} \sup\{u_k \mid k \geq n\}.$$

De même, la suite

$$m_n = \inf\{u_k \mid k \geq n\}$$

est croissante et bornée, donc convergente. Sa limite est la **limite inférieure** de la suite $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$:

$$\liminf_k u_k = \lim_{n\to+\infty} \inf\{u_k \mid k \geq n\}.$$

Si la suite n'est pas bornée supérieurement, on convient de poser

$$\limsup_k u_k = +\infty$$

et si elle n'est pas bornée inférieurement, on pose

$$\liminf_k u_k = -\infty.$$

Ainsi, pour toute suite $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, on a

$$-\infty \leq \liminf_k u_k \leq \liminf_k u_k \leq +\infty.$$

Exemple.

On a

$$\limsup_k \frac{(-1)^k k}{k+1} = 1 \ , \ \liminf_k \frac{(-1)^k k}{k+1} = -1$$

puisque $M_n = 1$ et $m_n = -1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Un nombre u est une **valeur adhérente** (ou un point d'accumulation) de la suite $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ s'il existe une suite partielle qui converge vers u :

$$u = \lim_{j\to+\infty} u_{k_j}.$$

En convenant que $+\infty$ est une valeur adhérente d'une suite qui n'est pas bornée supérieurement et que $-\infty$ est une valeur adhérente d'une suite qui n'est pas bornée inférieurement, toute suite admet au moins une valeur adhérente.

Exemple.

La suite

$$u_k = \sin k \frac{p}{q}\pi \quad \text{où} \quad p, q \in \mathbb{N},$$

ne contient qu'un nombre fini de valeurs distinctes, ceux des nombres

$$\sin \frac{p}{q}\pi, \sin 2\frac{p}{q}\pi, \ldots, \sin(2q-1)\frac{p}{q}\pi, \sin 2q\frac{p}{q}\pi$$

qui sont distincts. Ces valeurs sont toutes des valeurs adhérentes. La plus grande de ces valeurs est la limite supérieure de la suite, la plus petite, sa limite inférieure.

Théorème 28 *La limite supérieure d'une suite $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est égale à sa plus grande valeur adhérente et sa limite inférieure, à la plus petite.*

Démonstration. Si les valeurs adhérentes sont en nombre infini, leur borne supérieure est encore une valeur adhérente (exercice (15)), c'est elle la plus la plus grande dans ce cas.

La suite n'est pas bornée supérieurement si et seulement si sa limite supérieure est $+\infty$ mais aussi si et seulement si $+\infty$ en est une valeur adhérente.

Si la suite est bornée supérieurement, soit α sa plus grande valeur adhérente. Soit $\epsilon > 0$ arbitraire. Puisque l'on a $u_k < \alpha + \epsilon$ pour tout k assez grand, on a aussi

$$\limsup_k u_k \leq \alpha.$$

Réciproquement, puisque $\sup\{u_k \mid k \geq n\} < \limsup_k u_k + \epsilon$ pour tout n assez grand, on a aussi

$$\alpha \leq \limsup_k u_k.$$

La démonstration pour la limite inférieure est semblable. C.Q.F.D.

Théorème 29 (Formule de Cauchy pour le rayon de convergence) *Donnée une série entière,*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k,$$

soit

$$R = \frac{1}{\limsup_k |a_k|^{1/k}}$$

donc $0 \leq R \leq +\infty$. *Alors la série converge sur l'intervalle* $]-R, R[$, *de façon uniforme sur tout sous-intervalle compact* $[-r, +r]$ *et elle diverge si* $|x| > R$.

Démonstration. Si $R = 0$, la série diverge pour tout $x \neq 0$. En effet, quel que soit $x \neq 0$, il y a un nombre infini d'indices k pour lesquels

$$|a_k|^{1/k} > \frac{1}{|x|}$$

et la série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$$

ne peut converger puisque que son terme général ne tend pas vers 0.

Si $0 < R < +\infty$, soient $0 < r < R$ arbitraire et $|x| \leq r$. Pour tout k suffisamment grand, on a

$$|a_k|^{1/k} < \frac{2}{R+r}$$

donc

$$|a_k x^k| < \left(\frac{2r}{R+r}\right)^k$$

et la série, éventuellement majorée par une série géométrique de raison inférieure à 1, est uniformément convergente en vertu du critère de Weierstrass. Si $|x| > R$ par contre, il y a un nombre infini d'indices k pour lesquels

$$|a_k|^{1/k} > \frac{1}{|x|}$$

et la série diverge pour la même raison que précédemment.

Si $R = +\infty$ enfin, le raisonnement sur la convergence du paragraphe précédent s'applique quelques soient les nombres $R > r > 0$ et la série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$. C.Q.F.D.

Remarque.

On ne peut rien conclure aux extrémités de l'intervalle de convergence, les points où $|x| = R$, comme le montre l'exemple des séries

$$\sum_{k=1}^{+\infty} x^k, \ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} x^k, \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} x^k$$

qui ont toutes 1 pour rayon de convergence et qui convergent exactement sur les intervalles $]-1,1[$, $[-1,1[$ et $[-1,1]$ respectivement.

Exemple.

La série exponentielle

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

converge pour tout $x \in \mathbb{R}$. En effet,

$$\limsup_k \left(\frac{1}{k!}\right)^{1/k} = \lim_{k\to+\infty} \left(\frac{1}{k!}\right)^{1/k} = 0$$

puisque, en vertu de la formule de Stirling, on a

$$\lim_{k\to+\infty} \left(\frac{1}{k!}\right)^{1/k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{e}{k\,(2\pi k)^{1/2k}}.$$

Théorème 30 (Dérivation terme à terme d'une série entière) *Soient R le rayon de convergence de la série entière*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$$

et $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ sa somme :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k.$$

Alors la fonction f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]-R, R[$ *et*

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1}, \quad |x| < R.$$

Démonstration. Le rayon de convergence de la série $\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1}$ est encore égal à R. Posons

$$g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1}, \quad |x| < R.$$

L'intégration terme à terme étant permise, on a que

$$\int_0^x g(t)\, dt = f(x) - a_0$$

et le théorème fondamental du calcul (théorème (6)) montre que

$$g(x) = f'(x).$$

C.Q.F.D.

Remarque.

En répétant ce raisonnement, on voit que la somme d'une série entière est une fonction indéfiniment dérivable et que

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)$$

(formule de Taylor pour les coefficients d'une série entière).

8.4 Exercices 8

Justifier complètement toutes ses affirmations.

1. Déterminer
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1 + nx}{1 + nx^2} \ , \quad x \in \mathbb{R}.$$
La convergence est-elle uniforme ?
2. Déterminer
$$\lim_{n \to +\infty} \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) \ , \quad x > -1.$$
La convergence est-elle uniforme ?
3. Déterminer
$$\lim_{n \to +\infty} x e^{-nx} \ , \quad x \geq 0.$$
La convergence est-elle uniforme ?

4. Montrer par un exemple approprié que la convergence uniforme de fonctions dérivables f_n vers une fonction dérivable f n'entraîne pas nécessairement la convergence des dérivées f_n' vers la dérivée f'.
5. Montrer par un exemple approprié que le théorème (24) n'est pas nécessairement vrai si l'intervalle d'intégration n'est pas compact.
6. Montrer que la série
$$\sum_{k=1}^{+\infty} ke^{-kx} \cos kx$$
converge uniformément sur tout intervalle $[a, +\infty[\ (a > 0)$.
7. Montrer que la série
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin kx}{k^2 + x^2}$$
converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
8. Montrer que la série
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sin \frac{x}{k^2}$$
converge uniformément sur tout intervalle $[-M, M]$.
9. Soient $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues. Montrer que
$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$$
et que
$$\|fg\| \leq \|f\|\|g\|.$$
Ces inégalités peuvent-elles être strictes ?
10. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que
$$\int_0^1 x^n f(x)\, dx = 0 \ \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}_0.$$
Montrer qu'elle est identiquement nulle.
11. Déterminer la limite supérieure et la limite inférieure de la suite
$$\left(1 + \frac{\cos k\pi}{k}\right)^k.$$

12. Déterminer les valeurs adhérentes, la limite supérieure et la limite inférieure de la suite
$$\frac{k \cos k\frac{\pi}{2}}{k+1}.$$
13. Déterminer les valeurs adhérentes, la limite supérieure et la limite inférieure de la suite
$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$$
14. Montrer, si elles sont vraies, les inégalités suivantes
$$\limsup_k (u_k + v_k) \leq \limsup_k u_k + \limsup_k v_k$$
et
$$\limsup_k u_k v_k \leq \limsup_k u_k \ \limsup_k v_k.$$
Ces inégalités peuvent-elles êtres strictes ? Restent-elles vraies si on y remplace $\limsup_k$ par $\liminf_k$?
15. Montrer que si une suite admet un nombre infini de valeurs adhérentes, leur borne supérieure est encore une valeur adhérente de la suite.
16. Soit $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres strictement positifs pour lesquels la limite
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$$
existe. Montrer qu'alors
$$\lim_{k\to+\infty} (a_k)^{1/k}$$
existe aussi et que ces deux limites sont égales. Donner un exemple où la seconde limite existe mais pas la première. (formule de d'Alembert pour le rayon de convergence).
17. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles la série
$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 x^k$$
converge et calculer sa somme.
18. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles la série
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1}$$
converge et calculer sa somme.

9 SÉRIES DE TAYLOR

Les puissances entières de la variable peuvent servir à représenter toutes les fonctions de l'analyse.

9.1 Développements limités

Le calcul différentiel repose sur l'observation que, localement, « toute » fonction est presque linéaire. Soit f une fonction dérivable dans un intervalle ouvert I contenant le point x_0. Alors,

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \text{ lorsque } x \approx x_0.$$

En effet, la définition de $f'(x_0)$ peut se mettre sous la forme

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r_1(x) \ , \ x \in I$$

où

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r_1(x)}{x - x_0} = 0.$$

Cette approximation locale peut être raffinée lorsque la fonction admet des dérivées supplémentaires.

Théorème 31 (Taylor) *Soit f une fonction $n+1$ fois continûment dérivable dans un intervalle I contenant un intervalle ouvert contenant le point x_0(dans un **voisinage** I de x_0). Alors*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + r_n(x) \ , \ x \in I \tag{17}$$

où

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Le reste r_n peut s'exprimer sous forme intégrale :

$$r_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x - t)^n f^{(n+1)}(t) \, dt$$

ou sous forme différentielle :

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

où ξ est un point entre x et x_0.

Démonstration.

Première démonstration. En écrivant le reste sous forme intégrale, on voit que la relation à démontrer se réduit au théorème fondamental du calcul (théorème (7)) lorsque $n = 0$. D'où le raisonnement suivant. En intégrant n fois par parties :

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt \\
&= f(x_0) + \left(-(x-t)f'(t)\Big|_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} (x-t)f''(t)\,dt \right) \\
&= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \left(-\frac{1}{2}(x-t)^2 f''(t)\Big|_{x_0}^{x} + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} (x-t)^2 f'''(t)\,dt \right) \\
&= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 \\
&\quad + \left(-\frac{1}{3!}(x-t)^3 f'''(t)\Big|_{x_0}^{x} + \frac{1}{3!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^3 f^{(iv)}(t)\,dt \right) \\
&= \cdots \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Seconde démonstration. En écrivant le reste sous forme différentielle, on voit que la relation à démontrer se réduit au théorème des accroissements finis lorsque $n = 0$. D'où le raisonnement suivant. Introduisons la fonction auxiliaire

$$g(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(t-x_0)^k - C(t-x_0)^{n+1}$$

où

$$C = \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}{(x-x_0)^{n+1}}$$

(x et x_0 sont fixés, par exemple, $x > x_0$). Cette fonction g est $n+1$ fois continûment dérivable dans l'intervalle I et

$$g(x_0) = g'(x_0) = g''(x_0) = \cdots = g^{(n)}(x_0) = 0,$$

$$g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - (n+1)!C.$$

Puisque $g(x_0) = g(x) = 0$, il existe $x_1 \in]x_0, x[$ tel que $g'(x_1) = 0$. Mais alors $g'(x_0) = g'(x_1) = 0$. Donc il existe $x_2 \in]x_0, x_1[$ tel que $g''(x_2) = 0$. En répétant ce raisonnement n fois, on voit qu'il existe $x_n \in]x_0, x_{n-1}[$ tel que $g^{(n)}(x_n) = 0$. Alors, toujours en vertu du théorème des accroissements finis, il existe $\xi \in]x_0, x_n[$ tel que

$$g^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - (n+1)!C = 0$$

c'est-à-dire

$$\frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

C.Q.F.D.

Le théorème précédent admet une sorte de réciproque. Si f est une fonction $n+1$ fois continûment dérivable dans un voisinage I de x_0 telle que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + r_n(x) \ , \ x \in I$$

avec

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0,$$

alors, nécessairement,

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad \text{pour} \quad 0 \leq k \leq n.$$

On a en effet que $r_n(x)$ est $n+1$ fois continûment dérivable et satisfait les relations

$$f^{(k)}(x_0) = k!\, a_k + r_n^{(k)}(x_0)$$

et il suffit de vérifier que $r_n^{(k)}(x_0) = 0$ pour $0 \leq k \leq n$. Par récurrence sur k. On a

$$0 = \lim_{x \to x_0} r_n(x) = r(x_0).$$

Supposant ensuite que $r_n(x_0) = r_n'(x_0) = \cdots = r_n^{(k)}(x_0) = 0$, on a en appliquant plusieurs fois la règle de l'Hospital :

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{x \to x_0} \frac{r_n(x)}{(x-x_0)^{k+1}} &= \lim_{x \to x_0} \frac{r_n'(x)}{(k+1)(x-x_0)^k} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{r_n''(x)}{(k+1)k(x-x_0)^{k-1}} = \cdots \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{r_n^{(k)}(x)}{(k+1)k\cdots 2(x-x_0)} = \frac{r^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}. \end{aligned}$$

Les développements limités des fonctions suivantes s'obtiennent directement du théorème précédent.

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\ x^k + \frac{e^\xi}{(n+1)!}\ x^{n+1}\ ,\ x \in \mathbb{R}, \tag{18}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\ x^{2k} + \frac{(-1)^{n+1}\cos\xi}{(2n+2)!}\ x^{2n+2}\ ,\ x \in \mathbb{R},$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\ x^{2k+1} + \frac{(-1)^{n+1}\cos\xi}{(2n+3)!}\ x^{2n+3}\ ,\ x \in \mathbb{R},$$

$$(1+x)^p = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!}\ x^k + r_n(x)\ ,\ x > -1, \tag{19}$$

(le binôme de Newton) où

$$r_n(x) = \frac{p(p-1)\cdots(p-n)}{n!} \int_0^x (x-t)^n (1+t)^{p-n-1}\, dt,$$

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\ x^k + \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}\ x^{n+1}\ ,\ x > -1.$$

En intégrant l'identité

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} + \frac{(-1)^{n+1} t^{2(n+1)}}{1+t^2},$$

on obtient

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\ x^{2k+1} + r_{2n+2}(x)\ ,\ x \in \mathbb{R}$$

où

$$r_{2n+2}(x) = (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2}\, dt.$$

Il s'agit bien là du développement limité de Taylor puisque l'on a

$$\left| \frac{1}{x^{2n+2}}\ (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2}\, dt \right| \leq \frac{1}{|x|^{2n+2}} \int_0^{|x|} t^{2(n+1)}\, dt = \frac{|x|}{2n+3}.$$

Exemples.

– En laissant n tendre vers $+\infty$ dans la relation

$$\log 2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

(où $0 < \xi < 1$), on trouve

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \log 2.$$

– En laissant n tendre vers $+\infty$ dans la relation

$$\arctan 1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2}\, dt,$$

on trouve

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

9.1.1 Notations de Landau

Il est commode d'écrire avec Landau que

$$\phi(x) = \circ(\psi(x)) \ , \ x \to x_0$$

(lire : ϕ est négligeable devant ψ lorsque x tend vers x_0) si

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\phi(x)}{\psi(x)} = 0,$$

d'écrire

$$\phi(x) = \bigcirc(\psi(x)) \ , \ x \to x_0$$

(lire : ϕ est comparable à ψ lorsque x tend vers x_0) si l'expression

$$\left| \frac{\phi(x)}{\psi(x)} \right|$$

reste bornée lorsque x tend vers x_0 et enfin

$$\phi(x) \sim \psi(x) \ , \ x \to x_0$$

(lire : ϕ est équivalente à ψ lorsque x tend vers x_0) si

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\phi(x)}{\psi(x)} = 1.$$

Ici, $-\infty \leq x_0 \leq +\infty$. Ces notations s'emploient aussi pour les suites (avec $x_0 = +\infty$).

Exemples.

–
$$x^2 = \circ(x) \ , \ x \to 0;$$
–
$$\sin x = \bigcirc(1) \ , \ x \to 0;$$
–
$$\sin x \sim x \ , \ x \to 0;$$
–
$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \ , \ n \to +\infty.$$

Avec ces notations, un développement limité s'écrit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \circ(x-x_0)^n \ , \ x \to x_0.$$

Exemple.
On a
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \circ(x^3)$$
et
$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \circ(x^4)$$
de telle sorte que

$$\cos x \sin x = x - \frac{x^3}{2} + x \circ (x^3) - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{12} - \frac{x^3}{6} \circ (x^3)$$
$$+ \circ (x^4) - \circ(x^4) \left(\frac{x^2}{2}\right) + \circ(x^4) \circ (x^3) = x - \frac{2\,x^3}{3} + \circ(x^4).$$

9.2 Séries infinies

Si la fonction f est indéfiniment dérivable et si le reste r_n dans son développement limité au point x_0 tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, on peut la représenter comme la somme d'une série de puissances entières de $x - x_0$.

Théorème 32 *Les fonctions analytiques usuelles admettent les représentations suivante :*

1.

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\ x^k \ ,\ x \in \mathbb{R}$$

2.

$$\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\ x^{2k} \ ,\ x \in \mathbb{R}$$

3.

$$\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\ x^{2k+1} \ ,\ x \in \mathbb{R}$$

4.

$$(1+x)^p = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!} x^k \ ,\ |x| < 1$$

5.

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\ x^k \ ,\ |x| < 1$$

6.

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\ x^{2k+1} \ ,\ |x| < 1$$

7.

$$\arcsin x = x + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k}\ \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \ ,\ |x| < 1.$$

Démonstration. Il s'agit de voir que le reste $r_n(x)$ dans le développement limité de la fonction tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ pour x dans l'intervalle indiqué.

Considérons d'abord la fonction exponentielle. Donné $x \in \mathbb{R}$, choisissons un indice $N > 2|x|$ et considérons r_n lorsque $n > N$. Nous utilisons l'équation (18) :

$$\left| \frac{e^\xi}{(n+1)!}\ x^{n+1} \right| \leq e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = \Pi_N \, \Pi_n$$

où

$$\Pi_N = e^{|x|} \frac{|x|^N}{N!}$$

est fixé et

$$\Pi_n = \frac{|x|^{n+1-N}}{(N+1)(N+2)\cdots(n+1)} < \frac{1}{2^{n+1-N}}$$

tend vers 0 avec $1/n$.

Les fonctions cosinus et sinus se traitent de la même façon.

Pour le binôme de Newton, donné $x \in]-1,1[$, soit N un indice tel que

$$N > \frac{2|p||x|}{1-|x|}$$

et considérons r_n pour $n > N$. Nous utilisons la relation (19) :

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{p(p-1)\cdots(p-n)}{n!}\int_0^x (x-t)^n(1+t)^{p-n-1}\,dt\right| \\
&= \left|\frac{(p-1)\cdots(p-n)}{n!}\right|\left|\int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n p(1+t)^{p-1}\,dt\right| \\
&\leq \left|\frac{(p-1)\cdots(p-n)}{n!}\right| |x|^n \,|(1+x)^p - 1|
\end{aligned}$$

(pour vérifier le détail de ce calcul, distinguer suivant que x est positif ou négatif) de telle sorte que

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{p(p-1)\cdots(p-n)}{n!}\int_0^x (x-t)^n(1+t)^{p-n-1}\,dt\right| \\
&\leq \left|\frac{(p-1)\cdots(p-N)}{N!}\right| |x|^N \,|(1+x)^p-1| \left|\frac{(p-N-1)\cdots(p-n)}{(N+1)\cdots n}\right| |x|^{n-N} = \Pi_N\,\Pi_n
\end{aligned}$$

où

$$\Pi_N = \left|\frac{(p-1)\cdots(p-N)}{N!}\right| |x|^N \,|(1+x)^p-1|$$

est fixé et

$$\begin{aligned}
\Pi_n &= \left|\frac{(p-N-1)(p-N-2)\cdots(p-n)}{(N+1)(N+2)\cdots n}\right| |x|^{n-N} \\
&\leq \left(1+\frac{|p|}{N+1}\right)\left(1+\frac{|p|}{N+2}\right)\cdots\left(1+\frac{|p|}{n}\right)|x|^{n-N} \\
&\leq \left(\left(1+\frac{|p|}{N+1}\right)|x|\right)^{n-N} \leq \left(\frac{1+|x|}{2}\right)^{n-N}
\end{aligned}$$

tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Lorsque p est un entier positif, la série se termine avec $k = p$ et le binôme de Newton se réduit au théorème binomial de l'algèbre :

$$(1+x)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^k.$$

Les séries pour le logarithme, l'arctangente et l'arcsinus peuvent être obtenues le plus simplement à partir du binôme de Newton par intégration terme à terme de la série appropriée. On a ($p = -1$ dans le binôme de Newton)

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k\, x^k \ , \ |x| < 1$$

donc

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}\, x^{k+1} \ , \ |x| < 1.$$

Aussi ($p = -1$, $x \mapsto x^2$)

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k\, x^{2k} \ , \ |x| < 1$$

de telle sorte que

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\, x^{2k+1} \ , \ |x| < 1.$$

Enfin ($p = -1/2$, $x \mapsto -x^2$)

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k}\, x^{2k} \ , \ |x| < 1$$

donc

$$\arcsin x = x + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k}\, \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \ , \ |x| < 1.$$

C.Q.F.D.

Remarque. Il peut paraître surprenant que le rayon de convergence de la série pour la fonction arctangente soit égal à 1 alors que la fonction est indéfiniment dérivable sur tout l'axe réel. L'analyse complexe en fournit l'explication.

Exemple.

Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ e^{-1/x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Elle est indéfiniment dérivable et l'on a

$$f^{(k)}(x) = f(x)\, p_{2k}\left(\frac{1}{x}\right)$$

où p_{2k} est un polynôme de degré $2k$, comme on peut le vérifier par récurrence sur k. Cela repose seulement sur le fait que quelque soit n

$$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x^n}\, e^{-1/x} = 0.$$

On en déduit que

$$f^{(k)}(0) = 0 \quad \text{pour tout} \quad k \geq 0.$$

Ainsi cette fonction pourtant indéfiniment dérivable n'est égale à la somme de sa série de Taylor dans aucun intervalle centré à l'origine.

Théorème 33 *Le nombre e est irrationnel.*

Démonstration. On a

$$e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}.$$

Supposons que e est rationnel, soit $e = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{N}$. On a alors

$$(q-1)!\, p - \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} = \sum_{k=q+1}^{+\infty} \frac{q!}{k!}.$$

Or ceci est impossible. En effet, le membre de gauche de cette équation est un entier alors que le membre de droite ne l'est pas :

$$0 < \sum_{k=q+1}^{+\infty} \frac{q!}{k!} < \frac{1}{q+1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(q+2)^k} = \frac{q+2}{(q+1)^2} < 1.$$

C.Q.F.D.

Théorème 34 *Le nombre π est irrationnel.*

Démonstration. Considérons le polynôme

$$\phi(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}.$$

On peut écrire

$$n!\phi(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} x^{2n-k} = \sum_{j=n}^{2n} \binom{n}{2n-j} (-1)^{j-n} x^j.$$

On a d'abord

$$0 < \phi(x) < \frac{1}{n!} \quad \text{si} \quad 0 < x < 1.$$

De plus,

$$\phi^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \le k < n, \\ \dfrac{1}{n!}\dbinom{n}{2n-k}(-1)^{k-n}k! & \text{si} \quad n \le k \le 2n, \\ 0 & \text{si} \quad 2n < k \end{cases}$$

et

$$\phi^{(k)}(1) = (-1)^k \phi^{(k)}(0).$$

Les nombres $\phi(0), \phi(1), \phi'(0), \phi'(1), \phi''(0), \phi''(1), \ldots$ sont donc tous des entiers.

Supposons donc que π est rationnel, soit $\pi = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{N}$. Introduisons le polynôme

$$\psi(x) = q^{2n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \pi^{2n-2k} \phi^{(2k)}(x).$$

Les nombres $\psi(0)$ et $\psi(1)$ sont donc eux aussi des entiers. D'autre part, ce polynôme ψ satisfait l'équation différentielle

$$\psi''(x) + \pi^2 \psi(x) = q^{2n} \pi^{2n+2} \phi(x)$$

de telle sorte que

$$\frac{d}{dx}\big(\psi'(x)\sin \pi x - \pi\psi(x)\cos \pi x\big) = \big(\psi''(x) + \pi^2\psi(x)\big)\sin \pi x = q^{2n}\pi^{2n+2}\phi(x)\sin \pi x.$$

Ainsi

$$\int_0^1 q^{2n}\pi^{2n+1}\phi(x)\sin \pi x\, dx = \left(\frac{\psi'(x)\sin \pi x}{\pi} - \psi(x)\cos \pi x\Big|_0^1\right) = \psi(0) + \psi(1)$$

est un entier et ce quelque soit $n \in \mathbb{N}$. Ceci est impossible puisque

$$0 < \int_0^1 q^{2n} \pi^{2n+1} \phi(x) \sin \pi x \, dx < \frac{q^{2n} \pi^{2n+1}}{n!}$$

et que

$$\frac{q^{2n} \pi^{2n+1}}{n!} < 1$$

dès que n est suffisamment grand. C.Q.F.D.

9.3 Exercices 9

Justifier complètement toutes ses affirmations.

1. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable. Montrer que

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq (b-a) \left| \frac{f(b) + f(a)}{2} \right| + \frac{(b-a)^2}{2} \|f'\|.$$

2. Obtenir le développement limité d'ordre 2 au point $x_0 = n$ pour la fonction

$$f(x) = x^n e^{-x}.$$

3. Considérons le développement limité d'une fonction f au point x_0. Soit $k > 0$ le rang du premier terme après $f(x_0)$ qui est non nul dans ce développement. Montrer que si k est pair la fonction admet un extrémum relatif (local) en x_0. Qu'arrive-t-il k est impair ?

4. Obtenir le développement limité d'ordre 5 de la fonction tangente à l'origine (utiliser les notations de Landau).

   (Suggestion : $\sin x = \tan x \cos x$).

5. Montrer que les inégalités

$$1 + \sin x < e^x < \frac{1}{\sqrt{1 - 2x}}$$

   sont valables dans un petit intervalle ouvert autour de l'origine.

6. Soit $R > 0$. Représenter la fonction

$$f(x) = \frac{1}{(R-x)^2} - \frac{1}{(R+x)^2}$$

   comme la somme d'une série de puissances entières de x dans le plus grand intervalle possible autour de l'origine.

7. Obtenir la série de Taylor à l'origine de la fonction
$$\sinh x.$$
Déterminer son rayon de convergence.
8. Mêmes questions pour la fonction
$$\operatorname{arcsinh} x.$$
9. Mêmes questions pour la fonction
$$\operatorname{arctanh} x.$$
10. Mêmes questions pour la fonction
$$\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}.$$
11. Calculer
$$\int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} e^{-kx} \cos kx \, dx.$$
12. Montrer que le nombre $\cos 1$ est irrationnel.

10 SÉRIES DE FOURIER

La représentation d'une fonction par sa série de Taylor est limitée de deux façons : d'abord, elle ne s'applique qu'aux fonctions indéfiniment dérivables et ensuite, elle est locale — les sommes partielles de la série obtenue ne constituent une approximation de la fonction que dans un voisinage (qui peut être très petit) du point autour duquel on la calcule.

La série de Fourier ne souffre pas de ces inconvénients : on peut prescrire à l'avance l'intervalle de convergence et elle permet de représenter des fonctions très générales, présentant même certains types de discontinuités.

Le prix à payer : alors que la série de Taylor utilise les monômes

$$1, x, x^2, x^3, x^4, \ldots,$$

la série de Fourier se sert des fonctions transcendantes

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots$$

La résolution des équations aux dérivées partielles, objet d'étude d'un cours d'analyse appliquée, explique en partie le choix de ces fonctions.

10.1 La série de Fourier

Dans tout ce chapitre, nous considérons des fonctions $f : [-\pi, \pi[\to \mathbb{R}$, prolongées à $\mathbb{R}$ par périodicité.

Remarque. Le nombre π n'a été choisi que pour simplifier l'écriture. Si $f : [a, b[\to \mathbb{R}$, on se ramène à l'intervalle $[-\pi, \pi[$ en considérant la fonction g

$$g(x) = f\left(a + \frac{b-a}{2\pi}(x+\pi)\right).$$

La fonction paire (ou la fonction impaire) qui coïncide avec

$$f\left(a + \frac{b-a}{\pi}x\right)$$

lorsque $0 \leq x < \pi$ peut aussi être utilisée.

Nous dirons d'une fonction f qu'elle est continue par morceaux si

C1 il existe un nombre fini $n \geq 0$ de points

$$-\pi = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n < x_{n+1} = \pi$$

tels que f est continue sur chaque intervalle ouvert $]x_{j-1}, x_j[$, $1 \leq j \leq n+1$;

C2 les limites unilatérales

$$f(x_j-) = \lim_{x \to x_j-} f(x), \;\; f(x_j+) = \lim_{x \to x_j+} f(x)$$

existent (comme nombres réels finis) pour chaque $0 \leq j \leq n+1$.

Remarquons que l'on a toujours, par périodicité, $f(x_0-) = f(x_{n+1}-)$ et $f(x_0+) = f(x_{n+1}+)$ alors que la relation $f(x_0+) = f(x_{n+1}-)$ n'est pas nécessairement valable.

Nous dirons d'une fonction f qu'elle satisfait les conditions de Dirichlet si (figure(21))

D1 il existe un nombre fini $n \geq 0$ de points

$$-\pi = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n < x_{n+1} = \pi$$

tels que f est continûment dérivable sur chaque intervalle ouvert $]x_{j-1}, x_j[$, $1 \leq j \leq n+1$;

D2 les limites unilatérales

$$f(x_j-) = \lim_{x \to x_j-} f(x), \;\; f(x_j+) = \lim_{x \to x_j+} f(x)$$

et

$$f'(x_j-) = \lim_{x \to x_j-} f'(x), \;\; f'(x_j+) = \lim_{x \to x_j+} f'(x)$$

existent (comme nombres réels finis) pour chaque $0 \leq j \leq n+1$.

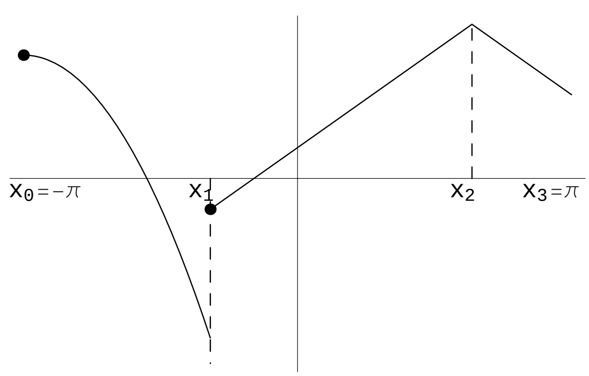

FIG. 21 – Les conditions de Dirichlet

L'intégrale d'une fonction f continue par morceaux est définie sur l'intervalle $(-\pi, \pi)$ par la relation

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\ dx = \sum_{j=1}^{n+1} \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\, dx$$

et, sur un intervalle $(a, b) \subseteq (-\pi, \pi)$ quelconque, par

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\mathbb{I}_{(a,b)}(x)\, dx$$

où $\mathbb{I}_E$ est la fonction indicatrice de l'ensemble E (égale à 1 ou à 0 suivant que son argument appartient ou non à E — exercice (6) du chapitre 2). L'intégrale sur un intervalle qui n'est pas contenu dans $(-\pi, \pi)$ est définie en utilisant la périodicité de f. Cette extension de la définition de l'intégrale préserve ses propriétés de linéarité, de posivité et d'additivité.

Les coefficients de Fourier d'une fonction continue par morceaux sont, par définition, les nombres

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos kx\, dx\ ,\ (k = 0, 1, \ldots)$$

et

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin kx\, dx\ ,\ (k = 1, 2, \ldots)$$

(ce choix est dicté par la propriété d'orthogonalité des fonctions trigonométriques — exercice (9) du chapitre 5).

La série trigonométrique formée à l'aide de ces coefficients,

$$S(f)(x) = \frac{1}{2}a_0(f) + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx),$$

est la série de Fourier de la fonction f. (On a choisi d'écrire le terme constant sous la forme $\frac{1}{2}a_0(f)$ afin que la formule pour $a_0(f)$ soit la même que celle pour $a_k(f)$ lorsque $k \geq 1$ — ce terme constant est donc la valeur moyenne de la fonction sur une période.)

Lorsque la fonction f est paire, la série de Fourier se réduit à

$$S(f)(x) = \frac{1}{2}a_0(f) + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k(f) \cos kx$$

où

$$a_k(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos kx\,dx\ ,\ (k = 0, 1, \ldots)$$

et lorsqu'elle est impaire, à

$$S(f)(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k(f)\sin kx,$$

avec

$$b_k(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin kx\,dx\ ,\ (k = 1, 2, \ldots)$$

Les sommes partielles de la série de Fourier seront dénotées par

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{2}a_0(f) + \sum_{k=1}^{n}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx).$$

Il s'agit d'étudier leur convergence vers la fonction.

Exemples.

1. Pour la fonction f_1 définie par

$$f_1(x) = x(x - \pi)\ \text{ si }\ -\pi \leq x < \pi,$$

on a

$$S(f_1)(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\left(\frac{4}{k^2}\cos kx + \frac{2\pi}{k}\sin kx\right).$$

2. Pour la fonction f_2 définie par

$$f_2(x) = \pi - |x|\ \text{ si }\ -\pi \leq x < \pi,$$

on a

$$S(f_2)(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{4}{\pi(2j+1)^2}\cos(2j+1)x.$$

3. Pour la fonction f_3 définie par

$$f_3(x) = \operatorname{sgn} x\ \text{ si }\ -\pi \leq x < \pi,$$

on a

$$S(f_3)(x) = \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{4}{\pi(2j+1)}\sin(2j+1)x.$$

(La fonction sgn donne le signe de son argument :

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.)} \end{cases}$$

10.2 Théorèmes de convergence

Désignons par T_n un polynôme trigonométrique de degré n arbitraire :

$$T_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Théorème 35 (Approximation en moyenne quadratique) *Pour toute fonction f continue par morceaux, on a*

$$\begin{aligned} \inf\{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}(f(x) - T_n(x))^2\,dx \mid T_n\} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}(f(x) - S_n(f)(x))^2\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(x)\,dx - \left(\frac{1}{2}a_0^2(f) + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2(f) + b_k^2(f)\right). \end{aligned}$$

Démonstration. Que les sommes partielles de la série de Fourier constituent ses meilleures approximations en moyenne quadratique résulte directement des propriétés d'orthogonalité des fonctions trigonométriques. On a

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}(f(x) - T_n(x))^2\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(x)\,dx - \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)T_n(x)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} T_n^2(x)\,dx. \end{aligned}$$

Or, en vertu de la définition même des coefficients de Fourier,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)T_n(x)\,dx = \frac{1}{2}a_0\,a_0(f) + \sum_{k=1}^{n}(a_k\,a_k(f) + b_k\,b_k(f))$$

et, à cause de l'orthogonalité des fonctions trigonométriques,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} T_n^2(x)\,dx = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)$$

de telle sorte que, en complétant les carrés,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}(f(x)-T_n(x))^2\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(x)\,dx$$

$$+\frac{1}{2}(a_0-a_0(f))^2+\sum_{k=1}^{n}((a_k-a_k(f))^2+(b_k-b_k(f))^2)$$

$$-\left(\frac{1}{2}a_0^2(f)+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2(f)+b_k^2(f))\right).$$

On voit donc que

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}(f(x)-T_n(x))^2\,dx \geq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}(f(x)-S_n(x))^2\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(x)\,dx-\left(\frac{1}{2}a_0^2(f)+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2(f)+b_k^2(f)\right).$$

C.Q.F.D.

Théorème 36 (Bessel) *Pour toute fonction f continue par morceaux, on a*

$$\frac{1}{2}a_0^2(f)+\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2(f)+b_k^2(f) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(x)\,dx.$$

Démonstration. Cette inégalité découle directement du théorème précédent. Quelque soit n, on a en effet

$$\frac{1}{2}a_0^2(f)+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2(f)+b_k^2(f)) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(x)\,dx$$

et donc, en laissant n tendre vers $+\infty$, on voit que la série des carrés des coefficients de Fourier est convergente et satisfait l'inégalité de Bessel :

$$\frac{1}{2}a_0^2(f)+\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2(f)+b_k^2(f) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(x)\,dx.$$

C.Q.F.D.

En particulier, les coefficients de Fourier $a_n(f)$ et $b_n(f)$ d'une fonction f continue par morceaux tendent vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. La démonstration du théorème suivant repose sur ce fait.

Théorème 37 (Dirichlet) *La série de Fourier d'une fonction f qui satisfait les conditions de Dirichlet converge vers cette fonction en tout point, à la condition de la redéfinir aux éventuels points de discontinuité x_j en posant*

$$f(x_j) = \frac{f(x_j-) + f(x_j+)}{2}.$$

Démonstration. En remplaçant les coefficients de Fourier par leur expression intégrale puis en permutant la somme et l'intégrale, on obtient

$$\begin{aligned} S_n(f)(x) &= \frac{1}{2}a_0(f) + \sum_{k=1}^{n}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(x-t)\right)dt \end{aligned}$$

En vertu de l'identité trigonométrique

$$2\cos a \sin b = \sin(a+b) - \sin(a-b),$$

on a

$$\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(x-t)\right) = \frac{\sin(2n+1)\dfrac{x-t}{2}}{2\sin\dfrac{x-t}{2}}$$

donc

$$\begin{aligned} S_n(f)(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\,\frac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{2\sin\frac{x-t}{2}}\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x-s)\,\frac{\sin(2n+1)\frac{s}{2}}{2\sin\frac{s}{2}}\,ds, \end{aligned}$$

ce que l'on exprime en disant que la somme partielle $S_n(f)(x)$ est la convolution de la fonction f avec le noyau de Dirichlet D_n sur l'intervalle $[-\pi,\pi]$ (figure(22)) :

$$D_n(s) = \frac{\sin(2n+1)\frac{s}{2}}{2\pi\sin\frac{s}{2}}.$$

En appliquant cette relation à la fonction $g=1$, pour laquelle on a aussi $S_n(g)=1$, on voit que ce noyau possède la propriété suivante :

$$1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\sin(2n+1)\frac{s}{2}}{2\sin\frac{s}{2}}\,ds.$$

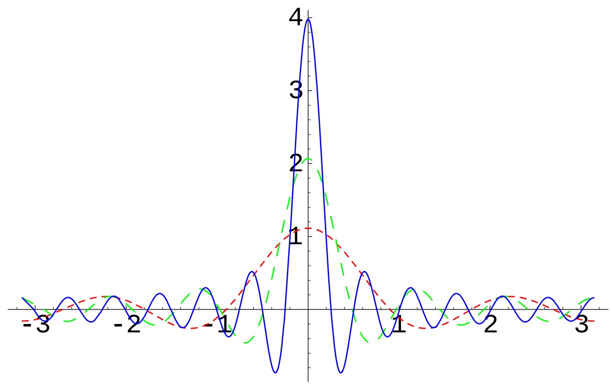

FIG. 22 – Quelques fonctions $D_n(x)$

Soit donc $x \in [-\pi, \pi[$. Supposons d'abord que x n'est pas égal à l'un des points x_j. On a alors

$$\begin{aligned} S_n(f)(x) - f(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}(f(x-s)-f(x))\,\frac{\sin(2n+1)\frac{s}{2}}{2\sin\frac{s}{2}}\,ds \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\phi_x(s)\cos ns\,ds + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\psi_x(s)\sin ns\,ds \end{aligned}$$

en posant

$$\phi_x(s) = \frac{f(x-s)-f(x)}{2}$$

et

$$\psi_x(s) = \frac{f(x-s)-f(x)}{2}\,\frac{\cos\frac{s}{2}}{\sin\frac{s}{2}}.$$

La fonction $s \mapsto \phi_x(s)$ étant continue par morceaux, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\phi_x(s)\cos ns\,ds = 0.$$

Il en va de même pour la fonction $s \mapsto \psi_x(s)$ puisque

$$\lim_{s\to 0}\psi_x(s) = \lim_{s\to 0}\frac{f(x-s)-f(x)}{s}\,\frac{\frac{s}{2}}{\sin\frac{s}{2}}\cos\frac{s}{2} = -f'(x)$$

de telle sorte que l'on a également

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\psi_x(s)\sin ns\,ds = 0$$

ce qui complète le raisonnement lorsque x est un point régulier.

Supposons maintenant que $x = x_j$. Alors

$$
\begin{aligned}
&S_n(f)(x) - \frac{f(x-)+f(x+)}{2} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(f(x-s) - \frac{f(x-)+f(x+)}{2}\right)\frac{\sin(2n+1)\frac{s}{2}}{2\sin\frac{s}{2}}\,ds \\
&+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(f(x+s) - \frac{f(x-)+f(x+)}{2}\right)\frac{\sin(2n+1)\frac{s}{2}}{2\sin\frac{s}{2}}\,ds \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(f(x-s)+f(x+s)-(f(x-)+f(x+)))\frac{\sin(2n+1)\frac{s}{2}}{2\sin\frac{s}{2}}\,ds \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\phi_x(s)\cos ns\,ds + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\psi_x(s)\sin ns\,ds
\end{aligned}
$$

où, maintenant,

$$
\phi_x(s) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad -\pi \le s \le 0, \\ \dfrac{f(x-s)+f(x+s)-(f(x-)+f(x+))}{2} & \text{si} \quad 0 < s < \pi \end{cases}
$$

et

$$
\psi_x(s) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad -\pi \le s \le 0, \\ \dfrac{f(x-s)+f(x+s)-(f(x-)+f(x+))}{2}\dfrac{\cos\frac{s}{2}}{\sin\frac{s}{2}} & \text{si} \quad 0 < s < \pi. \end{cases}
$$

La fonction ϕ_x est bien évidemment continue par morceaux de telle sorte que

$$
\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\phi_x(s)\cos ns\,ds = 0.
$$

Il en est de même pour la fonction ψ_x puisque en vertu de la règle de l'Hospital, on a

$$
\begin{aligned}
\lim_{s\downarrow 0}\psi_x(s) &= \lim_{s\downarrow 0}\frac{f(x-s)-f(x-)+f(x+s)-f(x+)}{s}\frac{\frac{s}{2}}{\sin\frac{s}{2}}\ \cos\frac{s}{2} \\
&= -f'(x-)+f'(x+).
\end{aligned}
$$

Ainsi

$$
\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\psi_x(s)\sin ns\,ds = 0
$$

aussi et la démonstration est complète. C.Q.F.D.

Exemples.

1. Pour la fonction f_1 définie par

$$f_1(x) = x(x-\pi) \quad \text{si} \quad -\pi \leq x < \pi,$$

on a

$$S(f_1)(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{4}{k^2} \cos kx + \frac{2\pi}{k} \sin kx \right)$$

de telle sorte que

$$S(f_1)(x) = \begin{cases} x(x-\pi) & \text{si} \quad -\pi < x < \pi, \\ \pi^2 & \text{si} \quad x = -\pi. \end{cases}$$

On tire en particulier de ce dernier cas

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

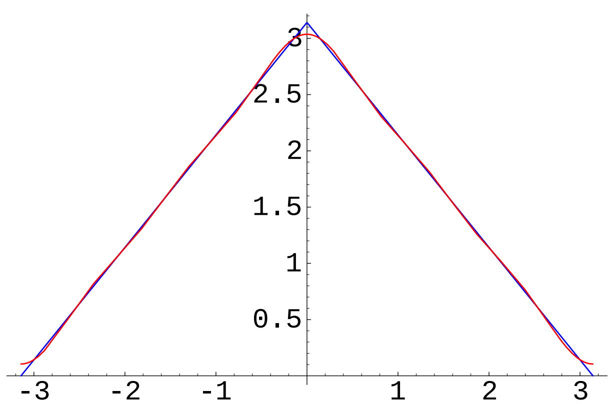

FIG. 23 – Fonctions f_2 et $S_6(f_2)$

2. Pour la fonction f_2 définie par

$$f_2(x) = \pi - |x| \quad \text{si} \quad -\pi \leq x < \pi,$$

on a

$$S(f_2)(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi(2j+1)^2} \cos(2j+1)x = f_2(x)$$

pour tout x. La convergence de la série est uniforme dans ce cas-ci et la fonction limite est continue (figure(23)).

3. Pour la fonction f_3 définie par

$$f_3(x) = \operatorname{sgn} x \text{ si } \quad -\pi \leq x < \pi,$$

on a

$$S(f_3)(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi(2j+1)} \sin(2j+1)x.$$

Ainsi (figure(24))

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(2j+1)} \sin(2j+1)x = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x = \pi, \\ -\frac{\pi}{4} & \text{si } \ -\pi < x < 0, \\ 0 & \text{si } \ x = 0, \\ \frac{\pi}{4} & \text{si } \ 0 < x < \pi. \end{cases}$$

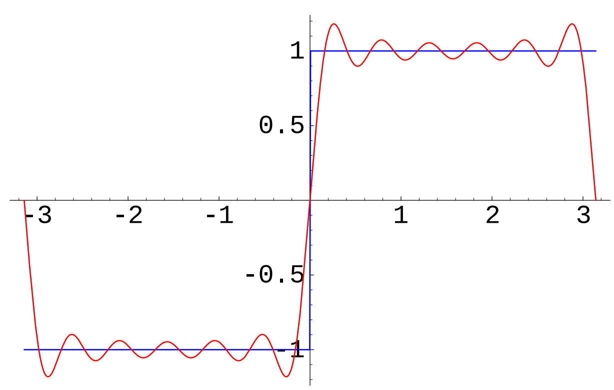

FIG. 24 – Fonctions f_3 et $S_{12}(f_3)$

10.3 L'approximation des fonctions continues périodiques

On sait que les moyennes arithmétiques des termes d'une suite forment une nouvelle suite plus régulière que la suite originelle, qui peut par exemple converger lorsque la suite elle-même ne converge pas.

Théorème 38 (Fejér) *Soit* $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue telle que* $f(-\pi) = f(\pi)$*. Alors les moyennes arithmétiques* $\sigma_n(f)$ *des sommes partielles* $S_n(f)$ *de sa série de Fourier convergent vers la fonction* f *uniformément sur* $[-\pi, \pi]$*.*

Démonstration. Par définition,

$$\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k(f)(x).$$

Comme

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \, \frac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}} \, dt$$

on a, en vertu de l'identité trigonométrique

$$2 \sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b),$$

que

$$\begin{aligned}
\sigma_n(f)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x-s) \, \frac{\sin^2(n+1)\frac{s}{2}}{(n+1)\sin^2\frac{s}{2}} \, ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x-s) \, \frac{1-\cos(n+1)s}{(n+1)\,(1-\cos s)} \, ds.
\end{aligned}$$

La fonction σ_n est donc la convolution de la fonction donnée f avec le noyau de Fejér F_n sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ (figure(25)) :

$$F_n(s) = \frac{\sin^2(n+1)\frac{s}{2}}{2\pi(n+1)\sin^2\frac{s}{2}}.$$

Alors, quelque soit $\delta > 0$,

$$\begin{aligned}
|\sigma_n(f)(x) - f(x)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} (f(x-s) - f(x)) \, \frac{1-\cos(n+1)s}{(n+1)\,(1-\cos s)} \, ds \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(x-s) - f(x)| \, \frac{1-\cos(n+1)s}{(n+1)\,(1-\cos s)} \, ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{|s|<\delta} |f(x-s) - f(x)| \, \frac{1-\cos(n+1)s}{(n+1)\,(1-\cos s)} \, ds \\
&+ \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |s| \leq \pi} |f(x-s) - f(x)| \, \frac{1-\cos(n+1)s}{(n+1)\,(1-\cos s)} \, ds \\
&\leq \sup_{|s|<\delta} |f(x-s) - f(x)| + 2\|f(x)\| \frac{2}{(n+1)\,(1-\cos\delta)}
\end{aligned}$$

Donné $\epsilon > 0$, on peut choisir, en vertu de la continuité uniforme, $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ pour que

$$\sup_{|s|<\delta} |f(x-s) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$$

quelque soit $x \in \mathbb{R}$ puis n_ϵ pour que

$$2\|f(x)\| \frac{2}{(n+1)(1-\cos\delta)} < \frac{\epsilon}{2}$$

pour tout $n > n_\epsilon$. C.Q.F.D.

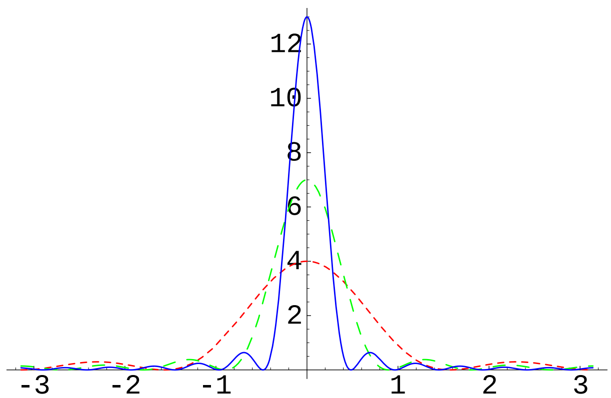

FIG. 25 – Quelques fonctions $F_n(x)$

Théorème 39 (Parseval) *Soit $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(-\pi) = f(\pi)$. Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} (S_n(f)(x) - f(x))^2 dx = 0$$

et

$$\frac{1}{2} a_0^2(f) + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k^2(f) + b_k^2(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f^2(x)\, dx.$$

Démonstration. Les fonctions $\sigma_n(f)$ convergent uniformément vers f sur $[-\pi, \pi]$ donc elles convergent en moyenne quadratique vers f et le résultat suit du théorème (35).

C.Q.F.D.

10.4 Exercices 10

1. Montrer que toute fonction définie sur un intervalle symétrique par rapport à l'origine peut s'y représenter comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

2. Les coefficients $a_k(f)$ et $b_k(f)$ de Fourier d'une fonction f tendent vers 0 d'autant plus vite que la fonction est plus régulière. Montrer, par exemple, que si f admet une deuxième dérivée continue, on a

$$a_k(f) = \circ(\frac{1}{k^2}),\ b_k(f) = \circ(\frac{1}{k^2})$$

lorsque $k \to +\infty$.

3. Déterminer le minimum de l'expression

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}(t^2 - a - b\cos t - c\sin t)^2\,dt$$

lorsque a, b et c parcourent l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

4. Obtenir la série de Fourier de la fonction f définie par

$$f(x) = \pi^2 - x^2 \quad \text{si} \quad -\pi \leq x < \pi.$$

Étudier sa convergence.

5. Mêmes questions pour la fonction

$$f(x) = |\sin x| \quad \text{si} \quad -\pi \leq x < \pi.$$

6. Mêmes questions pour la fonction

$$f(x) = x \quad \text{si} \quad -\pi \leq x < \pi.$$

En déduire la somme de la série

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin ky}{k}.$$

7. Représenter la fonction x comme une somme de cosinus sur l'intervalle $(0, A)$.

8. Montrer qu'une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique et continue est entièrement déterminée par ses coefficients de Fourier.

9. Montrer que

$$x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\cos 2kx\ ,\ 0 < x < \pi$$

et que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Références

[1] Jacques Labelle et Armel Mercier. *Introduction à l'analyse réelle.* Modulo, Montréal, 1993.
Manuel de premier cycle,
Math-Info : QA 300 L324 1993.

[2] Charles Cassidy et Marie-Louis Lavertu. *Introduction à l'analyse.* Presses de l'Université Laval, Québec, 1994.
Manuel de premier cycle,
Math-Info : QA 331.5 C384 1994.

[3] Walter Rudin. *Principes d'analyse mathématique.* Ediscience, Paris, 1995.
Manuel de premier cycle,
Math-Info QA 300 R 8212 1995.

[4] Michael Spivak. *Calculus.* Publish or Perish, Houston, 1994.
Manuel de premier cycle,
Math-Info QA 303 S64 1994.

Index