MAT 6111 - MESURE ET INTÉGRATION

Examen final

Le 20 décembre 2012, de 10h00 à 13h00.

1. Vérifier qu'une fonction $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ est à variation bornée si et seulement si son graphe est **rectifiable**, c'est-à-dire si et seulement si les sommes
$$\sigma(\phi, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\phi(x_k) - \phi(x_{k-1}))^2 + (x_k - x_{k-1})^2}$$
restent bornées quelle que soit la partition $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de l'intervalle $[a,b]$.
2. Soient $\mathfrak{T}_1$ et $\mathfrak{T}_2$ deux tribus sur X.
   - Montrer par un exemple approprié que $\mathfrak{T}_1 \cup \mathfrak{T}_2$ n'est pas nécessairement une tribu sur X.
   - Montrer que
$$\mathfrak{T}(\mathfrak{T}_1 \cup \mathfrak{T}_2) = \mathfrak{T}(\{E_1 \cup E_2 \mid E_1 \in \mathfrak{T}_1,\ E_2 \in \mathfrak{T}_2\}).$$
3. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive. Montrer que l'ensemble
$$E = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b\ ,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$
est mesurable (relativement à la tribu produit) et calculer sa mesure.
4. Calculer $\mu_F(]n, n+1])$, $\mu_F([n, n+1])$, $\mu_F(]n+1/2, n+3/2])$ et $\mu_F([n+1/2, n+3/2])$ $(n \in \mathbb{N})$ lorsque $F(x)$ est la partie entière de x.
5. Soit $f : [0, A] \to \mathbb{R}$ une fonction s'annulant à l'origine et admettant une dérivée continue. Montrer que, quel que soit $p \geq 1$, on a
$$\|f\|_p \leq \frac{A}{p^{1/p}} \|f'\|_p.$$
L'égalité est-elle possible ?

André Giroux