

MAT 6111 - MESURE ET INTÉGRATION

Examen intra

Le 25 octobre 2012, de 10h30 à 12h00.

Chaque question vaut 10 points.

1. Soit $E \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble mesurable. Montrer que l'ensemble des translatés

$$E + \mathbb{N} = \{x + n \mid x \in E, n \in \mathbb{N}\}$$

est mesurable. Calculer sa mesure dans le cas où E est un intervalle de longueur finie $l > 0$.

2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction (quelconque). Montrer que la fonction

$$F(x) = \limsup_{y \rightarrow x} f(y) \quad (= \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{|y-x| < \delta} f(y))$$

est mesurable.

3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable telle que $x \mapsto xf(x)$ soit aussi intégrable. Montrer que

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin xt \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) \cos xt \, dx.$$

André Giroux