

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Notes de cours pour MAT 2115

André Giroux
Département de Mathématiques et Statistique
Université de Montréal
2008

Table des matières

1	ÉQUATIONS DU PREMIER ORDRE	2
1.1	L'équation linéaire	2
1.2	Le théorème fondamental	4
1.3	Méthodes graphiques	8
1.4	Équations séparables	8
1.5	Équations autonomes	11
1.6	Équations exactes	13
1.7	Méthodes numériques	15
2	ÉQUATIONS LINÉAIRES DU SECOND ORDRE	17
2.1	Théorèmes généraux	17
2.2	Équations homogènes autonomes	20
2.3	Équations inhomogènes	23
2.4	Équations homogènes à coefficients analytiques	27
2.5	Coefficients analytiques, points réguliers	28
2.6	Coefficients analytiques, points singuliers	33
3	SYSTEMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES	44
3.1	Le théorème fondamental généralisé	44
3.2	Systèmes linéaires, théorèmes généraux	46
3.3	Systèmes homogènes autonomes, $n = 2$	48
3.4	Systèmes homogènes autonomes, $n \geq 2$	52
3.5	Systèmes linéaires quelconques	57

1 ÉQUATIONS DU PREMIER ORDRE

On considère l'équation différentielle du premier ordre avec condition initiale

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0.$$

1.1 L'équation linéaire

Considérons d'abord l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t) \tag{1}$$

où p et q sont des fonctions continues dans un intervalle $|t - t_0| \leq a$. Introduisant la fonction

$$P(t) = \int p(t) dt,$$

l'équation (1) est équivalente à la suivante

$$\frac{d}{dt} \left(e^{P(t)} y \right) = q(t) e^{P(t)}$$

et donc sa solution peut s'écrire

$$y = \left\{ \int q(t) e^{P(t)} dt + C \right\} e^{-P(t)}$$

où C est une constante arbitraire. Observons que cette solution est la somme de deux termes,

$$y_1 = C e^{-P(t)}$$

qui est la solution générale de l'équation homogène

$$y' + p(t)y = 0$$

et

$$y_2 = \left(\int q(t) e^{P(t)} dt \right) e^{-P(t)}$$

qui est une solution particulière (sans constante d'intégration) de l'équation inhomogène originelle

$$y' + p(t)y = q(t).$$

On peut aussi écrire la solution sous la forme

$$y = \left\{ y_0 e^{P_0} + \int_{t_0}^t q(s) e^{P(s)} ds \right\} e^{-P(t)}$$

où $y_0 = y(t_0)$ et $P_0 = P(t_0)$. Ceci montre que, si z est la solution de l'équation (1) sous la condition initiale

$$z(t_0) = z_0,$$

on aura

$$|y - z| = |y_0 - z_0| e^{P_0 - P(t)}.$$

Ainsi, le problème

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t), \quad y(t_0) = y_0$$

admet une et une seule solution dans l'intervalle $|t - t_0| \leq a$ et cette solution dépend de façon continue de la condition initiale.

Exemple.

La solution générale de l'équation

$$y' - ty = t$$

est

$$y = -1 + C e^{t^2/2}.$$

Exemple.

La solution du problème

$$y' - \frac{1}{t}y = \sqrt{t}, \quad y(1) = a$$

est

$$y = 2t^{3/2} + (a - 2)t.$$

La commande *Mathematica* (version 6) de base pour résoudre une équation différentielle est `DSolve` (figures (1), page(4) et (2), page(4)).

`DSolve[y'[t] - t y[t] == t, y[t], t]`

$$\left\{ \left\{ y[t] \rightarrow -1 + e^{\frac{t^2}{2}} C[1] \right\} \right\}$$

FIG. 1 –

`DSolve[{y'[t] - \frac{1}{t} y[t] == \sqrt{t}, y[1] == a}, y[t], t]`

$$\left\{ \left\{ y[t] \rightarrow -2 t + a t + 2 t^{3/2} \right\} \right\}$$

FIG. 2 –

1.2 Le théorème fondamental

Théorème 1 (Picard) *Si les fonctions $f(t, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)$ sont continues dans le rectangle $|t - t_0| \leq a$, $|y - y_0| \leq b$, il existe un intervalle $|t - t_0| \leq h$ dans lequel le problème*

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \quad (2)$$

admet une solution unique et cette solution dépend continûment de la condition initiale.

Démonstration.

EXISTENCE

On peut supposer $t_0 = y_0 = 0$. La fonction $y = \phi(t)$ est une solution du problème (2) si et seulement si

$$\phi(t) = \int_0^t f(s, \phi(s)) ds. \quad (3)$$

Posons

$$K = \sup_{|t| \leq a, |y| \leq b} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right|, \quad M = \sup_{|t| \leq a, |y| \leq b} |f(t, y)|$$

et soit

$$h \leq \inf \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}.$$

On considère les fonctions ϕ_n définies récursivement par

$$\phi_0(t) = 0, \quad \phi_n(t) = \int_0^t f(s, \phi_{n-1}(s)) ds.$$

Ces fonctions sont bien définies car $|\phi_n(t)| \leq b$ si $|t| \leq h$. En effet, si $|t| \leq h$,

$$|\phi_1(t)| = \left| \int_0^t f(s, \phi_0(s)) ds \right| \leq M|t| \leq Mh \leq b$$

et, par récurrence sur n ,

$$|\phi_n(t)| = \left| \int_0^t f(s, \phi_{n-1}(s)) ds \right| \leq M|t| \leq Mh \leq b.$$

D'autre part, puisque, en vertu du théorème des accroissements finis,

$$|f(t, y_2) - f(t, y_1)| = \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y_3) \right| |y_2 - y_1| \leq K|y_2 - y_1|,$$

on a

$$|f(t, \phi_n(t)) - f(t, \phi_{n-1}(t))| \leq K|\phi_n(t) - \phi_{n-1}(t)|. \quad (4)$$

Pour montrer que les fonctions ϕ_n convergent vers une fonction ϕ qui satisfait l'équation (3), on écrit

$$\phi_n(t) = \phi_0(t) + \sum_{k=1}^n (\phi_k(t) - \phi_{k-1}(t))$$

et on montre que cette dernière somme converge uniformément sur l'intervalle $|t| \leq h$. On a

$$|\phi_1(t) - \phi_0(t)| = \left| \int_0^t f(s, \phi_0(s)) ds \right| \leq M|t|.$$

Ensuite

$$\begin{aligned} |\phi_2(t) - \phi_1(t)| &= \left| \int_0^t (f(s, \phi_1(s)) - f(s, \phi_0(s))) ds \right| \\ &\leq \left| \int_0^t K|\phi_1(s) - \phi_0(s)| ds \right| \leq \left| \int_0^t KM|s| ds \right| = MK \frac{|t|^2}{2}. \end{aligned}$$

Par récurrence sur n , supposant que

$$|\phi_n(t) - \phi_{n-1}(t)| \leq MK^{n-1} \frac{|t|^n}{n!},$$

on aura

$$\begin{aligned} |\phi_{n+1}(t) - \phi_n(t)| &= \left| \int_0^t (f(s, \phi_n(s)) - f(s, \phi_{n-1}(s))) ds \right| \\ &\leq \left| \int_0^t K|\phi_n(s) - \phi_{n-1}(s)| ds \right| \leq \left| \int_0^t MK^n \frac{|s|^n}{n!} ds \right| = MK^n \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} |\phi_k(t) - \phi_{k-1}(t)| &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} MK^n \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!} \\ &\leq \frac{M}{K} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(Kh)^{n+1}}{(n+1)!} < +\infty \end{aligned}$$

ce qui termine, en vertu de la relation (4), la démonstration de l'existence d'une solution ϕ :

$$\begin{aligned} &\left| \phi(t) - \int_0^t f(s, \phi(s)) ds \right| \\ &\leq |\phi(t) - \phi_n(t)| + \left| \int_0^t f(s, \phi_{n-1}(s)) ds - \int_0^t f(s, \phi(s)) ds \right| \\ &\leq \sup_{|t| \leq h} \{|\phi(t) - \phi_n(t)|\} + Kh \sup_{|t| \leq h} \{|\phi(t) - \phi_{n-1}(t)|\}. \end{aligned}$$

UNICITÉ

Supposons deux solutions

$$\phi(t) = \int_0^t f(s, \phi(s)) ds, \quad \psi(t) = \int_0^t f(s, \psi(s)) ds$$

et posons

$$\sigma(t) = (\phi(t) - \psi(t))^2.$$

Alors

$$\sigma'(t) = 2(\phi(t) - \psi(t))(f(\phi(t), t) - f(\psi(t), t)) \leq 2K(\phi(t) - \psi(t))^2$$

donc

$$\frac{d}{dt} (\sigma(t)e^{-2Kt}) \leq 0$$

et

$$0 \leq \sigma(t) \leq \sigma(0)e^{2Kt} = 0, \quad 0 \leq t \leq h.$$

De même,

$$\sigma'(t) \geq -2K\sigma(t)$$

et

$$0 \leq \sigma(t) \leq 0, \quad -h \leq t \leq 0.$$

CONTINUITÉ

Soient

$$\phi_1(t) = y_1 + \int_0^t f(s, \phi_1(s)) ds, \quad \phi_2(t) = y_2 + \int_0^t f(s, \phi_2(s)) ds$$

et posons

$$\sigma(t) = (\phi_1(t) - \phi_2(t))^2.$$

Alors, comme précédemment,

$$\frac{d}{dt} (\sigma(t)e^{-2Kt}) \leq 0$$

et

$$\sigma(t) \leq (y_1 - y_2)^2 e^{2Kt}, \quad 0 \leq t \leq h.$$

De même,

$$\sigma(t) \leq (y_1 - y_2)^2 e^{-2Kt}, \quad -h \leq t \leq 0.$$

Finalement,

$$|\phi_1(t) - \phi_2(t)| \leq |y_1 - y_2| e^{K|t|}, \quad |t| \leq h.$$

C.Q.F.D.

Remarque.

Pour une équation linéaire, $b = +\infty$ et $h = a$. Dans le cas général, on peut avoir $h < a$.

Exemple.

Il est facile de vérifier que la solution du problème

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t-4}{y+1}, \quad y(0) = 1$$

est

$$y = -1 + \sqrt{(t-4)^2 - 12}.$$

On a ici $h = 4 - \sqrt{12}$ bien que a puisse être choisi arbitrairement grand.

Exemple.

La solution du problème

$$\frac{dy}{dt} = (1+t)y, \quad y(0) = 1$$

est

$$\phi(t) = e^{t+t^2/2} = 1 + t + t^2 + \frac{2}{3}t^3 + \frac{5}{12}t^4 + \frac{13}{60}t^5 + \dots$$

Les trois premières fonctions calculées par la méthode de Picard sont

$$\phi_1(t) = 1 + t + \frac{1}{2}t^2,$$

$$\phi_2(t) = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{8}t^4$$

et

$$\phi_3(t) = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{2}{3}t^3 + \frac{3}{8}t^4 + \frac{1}{8}t^5 + \frac{1}{48}t^6.$$

Les commandes *Mathematica* associées sont illustrés à la figure (3), page(9).

1.3 Méthodes graphiques

Résoudre une équation différentielle $y' = f(x, y)$, c'est déterminer explicitement ($y = \phi(x, C)$) ou implicitement ($\Phi(x, y, C) = 0$) une famille de courbes ayant leur tangentes données et résoudre un problème $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, c'est déterminer celle de ces courbes qui passe par un point donné. On peut donc visualiser la situation en traçant le champ de vecteurs associé à l'équation.

Exemple.

La solution du problème

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t-4}{y+1}, \quad y(0) = 1$$

est

$$y = -1 + \sqrt{(t-4)^2 - 12}.$$

La commande *Mathematica* `VectorFieldPlot` requiert le chargement préalable du package `VectorFieldPlots` appelé grâce à `Needs` (figure (4), page(10)).

1.4 Équations séparables

Une équation différentielle d'ordre un est dite séparable si elle est de la forme

$$\frac{dy}{dt} = \frac{g(t)}{h(y)}.$$

Sa solution générale peut s'obtenir, au moins implicitement, en « séparant les variables » et en intégrant :

$$\int h(y) dy = \int g(t) dt + C.$$

```
DSolve[{y'[t] == (1 + t) y[t], y[0] == 1}, y[t], t]
```

```
{{y[t] -> e^{t + t^2/2}}}
```

```
Series[e^{t + t^2/2}, {t, 0, 5}]
```

```
1 + t + t^2 + 2 t^3 / 3 + 5 t^4 / 12 + 13 t^5 / 60 + O[t]^6
```

```
phi[0, t_] := 1
```

```
phi[n_, t_] := 1 + Integrate[(1 + s) phi[n - 1, s] ds, {s, 0, t}]
```

```
Table[phi[n, t], {n, 1, 3}]
```

```
{1 + t + t^2 / 2, 1 + t + t^2 + t^3 / 2 + t^4 / 8, 1 + t + t^2 + 2 t^3 / 3 + 3 t^4 / 8 + t^5 / 8 + t^6 / 48}
```

```
Plot[{e^{t + t^2/2}, 1 + t + t^2 / 2, 1 + t + t^2 + t^3 / 2 + t^4 / 8, 1 + t + t^2 + 2 t^3 / 3 + 3 t^4 / 8 + t^5 / 8 + t^6 / 48}, {t, 0, 1}, AxesLabel -> {t, y}]
```

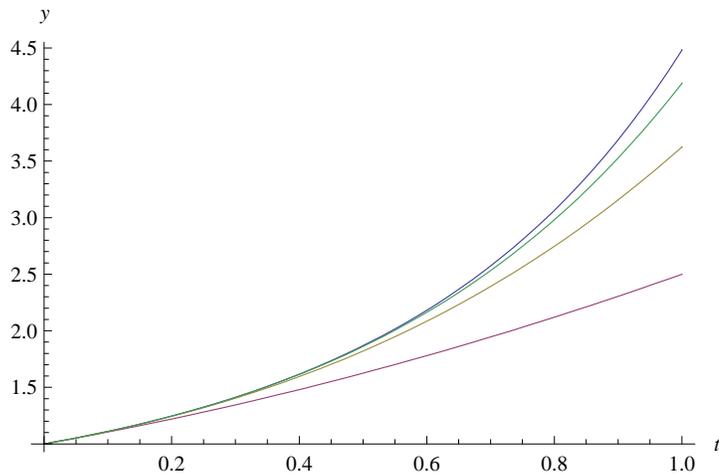


FIG. 3 -

```
Needs["VectorFieldPlots`"]

champ = VectorFieldPlot[{{1,  $\frac{t-4}{y+1}$ }}, {t, -1, 1}, {y, 0, 2}, Axes -> True, AxesLabel -> {t, y}];

courbe = Plot[-1 +  $\sqrt{(t-4)^2 - 12}$ , {t, -1, 1}];

point = Graphics[{PointSize[0.025], Red, Point[{0, 1}]}];

Show[{champ, courbe, point}]
```

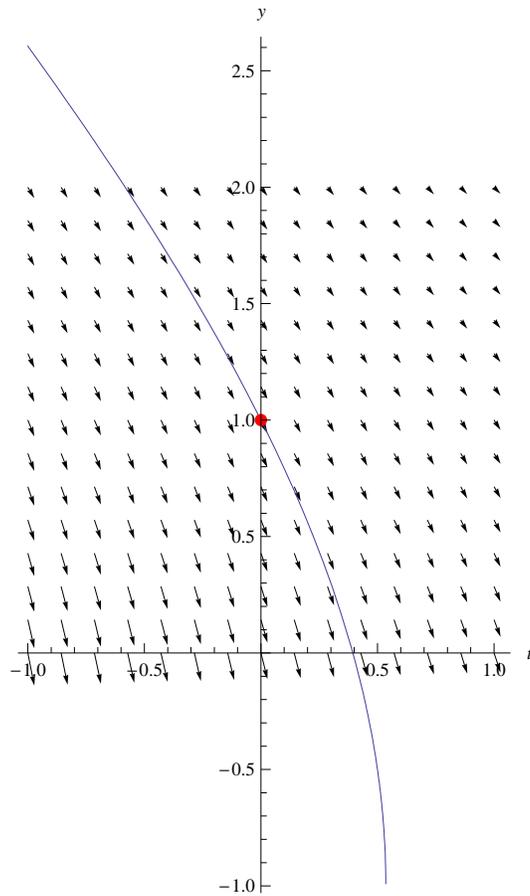


FIG. 4 -

Exemple.

La solution générale de l'équation

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t-4}{y+1}$$

est

$$(y+1)^2 = (t-4)^2 + C.$$

Une équation différentielle de la forme

$$\frac{dy}{dt} = g\left(\frac{y}{t}\right)$$

peut se ramener à une équation séparable en posant

$$z = \frac{y}{t}.$$

On obtient alors

$$\int \frac{dz}{g(z) - z} = \int \frac{dt}{t} + C.$$

Exemple.

La solution générale de

$$\frac{dy}{dt} = 1 + \frac{y}{t} + \frac{y^2}{t^2}$$

est

$$\arctan \frac{y}{t} = \ln t + C \text{ si } t > 0.$$

Le champ de vecteurs et quelques solutions sont présentés à la figure(5), page(12).

1.5 Équations autonomes

Une équation différentielle est dite autonome si le temps n'y apparaît pas explicitement :

$$\frac{dy}{dt} = f(y).$$

Les zéros de la fonction f sont alors des solutions constantes de l'équation, des solutions d'équilibre. Elles peuvent être asymptotiquement stables (y_2), instables (y_1 et y_3) ou semi-stables (y_4) (figure(6), page(13)).

```
Needs["VectorFieldPlots`"]

champ =
  VectorFieldPlot[{{1, 1 +  $\frac{y}{t} + \left(\frac{y}{t}\right)^2$ }, {t, 0.1, 4}, {y, 0, 5}, Axes -> True, AxesLabel -> {t, y}}];

graphes =
  ContourPlot[Evaluate[Table[ArcTan[ $\frac{y}{t}$ ] = Log[t] + k, {k, 0, 2, 0.2}]], {t, 0.1, 4}, {y, 0, 5}];

Show[{champ, graphes}]
```

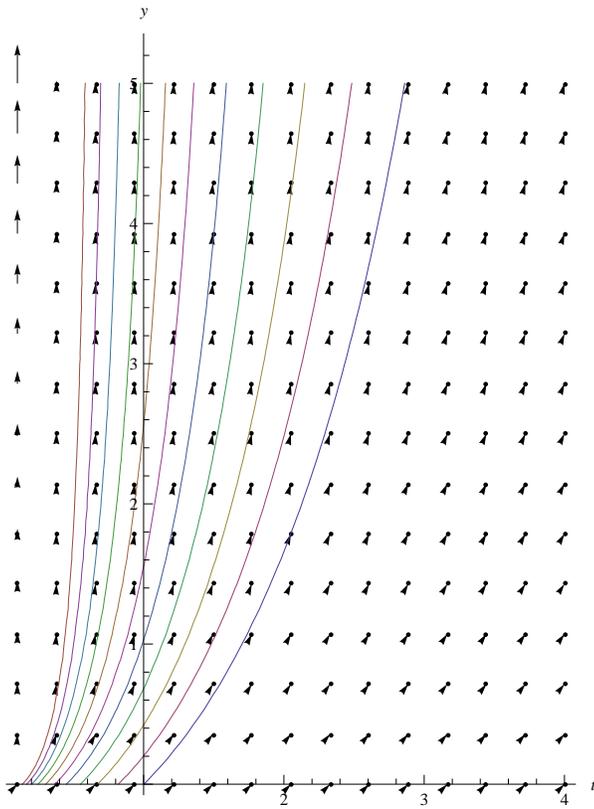


FIG. 5 -

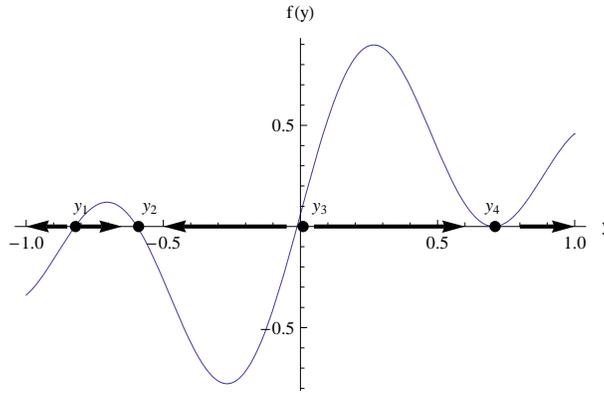


FIG. 6 –

Exemple. L'équation logistique

On considère le problème

$$\frac{dy}{dt} = r \left(1 - \frac{y}{K}\right) y, \quad y(0) = y_0$$

où $r > 0$ et $0 < y_0 < K$. L'équation différentielle est autonome, admettant 0 pour point d'équilibre répulsif et K pour point d'équilibre attractif. Elle est donc séparable et sa solution s'obtient de

$$\int_{y_0}^y \frac{dz}{(1 - z/K)z} = \int_0^t r \, ds$$

en décomposant en fractions partielles, ce qui donne

$$y = \frac{K y_0}{y_0 + (K - y_0)e^{-rt}}$$

(figure (7), page(14).)

1.6 Équations exactes

On dit d'une équation différentielle écrite sous la forme

$$M(x, y) \, dx + N(x, y) \, dy = 0 \tag{5}$$

qu'elle est exacte s'il existe une fonction $F(x, y)$ telle que

$$dF = M \, dx + N \, dy.$$

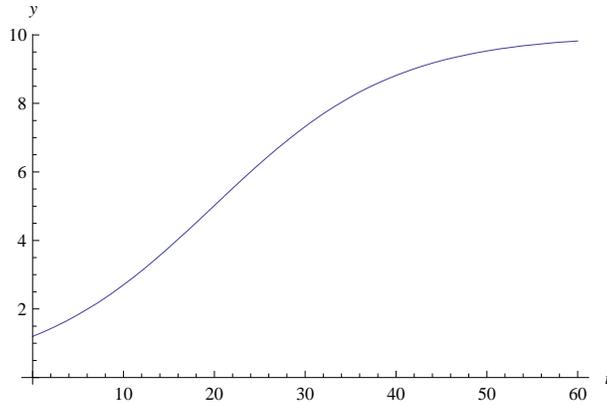


FIG. 7 - $r = 0, 1, y_0 = 1, 2, K = 10$

Sa solution générale est alors donnée implicitement par

$$F(x, y) = C.$$

Une condition nécessaire pour que l'équation soit exacte est que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

et cette condition est aussi suffisante lorsque la région du plan où l'on considère l'équation est ouverte, connexe et simplement connexe. La fonction F s'obtient des relations

$$F(x, y) = \int M(x, y) dx + C(y)$$

et

$$N(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\int M(x, y) dx \right) + C'(y).$$

Exemple.

L'équation

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 + y^2}{2y(x+1)}$$

est exacte et sa solution est

$$x^3 + (x+1)y^2 = C.$$

La solution du problème

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 + y^2}{2y(x+1)}, \quad y(0) = 1$$

est donc

$$y = \sqrt{\frac{1-x^3}{1+x}}, \quad -1 < x < 1$$

et celle de

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 + y^2}{2y(x+1)}, \quad y(-2) = -2$$

est

$$y = -\sqrt{\frac{-12-x^3}{1+x}}, \quad -2,20975 < x < -1.$$

Une fonction $\mu(x, y)$ est un facteur intégrant pour l'équation (5) si

$$\mu(x, y)(M(x, y) dx + N(x, y) dy) = 0$$

est exacte. La condition pour ceci est que

$$\mu = \frac{\mu_x N - \mu_y M}{M_y - N_x}.$$

Par exemple, si la fonction

$$\frac{N}{M_y - N_x}$$

ne dépend que de x , on aura un facteur intégrant ne dépendant que de x , déterminé par l'équation linéaire séparable

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{M_y - N_x}{N} \mu.$$

1.7 Méthodes numériques

La plupart des équations différentielles ne peuvent pas être résolues analytiquement et nécessitent l'emploi de méthodes numériques. Ces méthodes sont toutes basées sur l'approximation du problème

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

par l'équation aux différences finies

$$y_{n+1} = y_n + f(t_n, y_n)(t_{n+1} - t_n).$$

Elle permet de calculer la suite des nombres y_1, y_2, y_3, \dots à partir de y_0 ; en général, le pas $h = t_{n+1} - t_n$ est constant et la fonction $\phi(t)$ est approximée par la ligne polygonale de sommets $(h, y_1), (2h, y_2), (3h, y_3), \dots$

Exemple.

La commande *Mathematica* de base pour résoudre numériquement une équation différentielle est `NDSolve` (figure(8), page(16)). .

```
solution = y[t] /. NDSolve[{y'[t] == Sin[t] + y[t]^2, y[0] == 1}, y[t], {t, -1, 1}];  
Plot[solution, {t, -1, 1}, AxesLabel -> {t, y}]
```

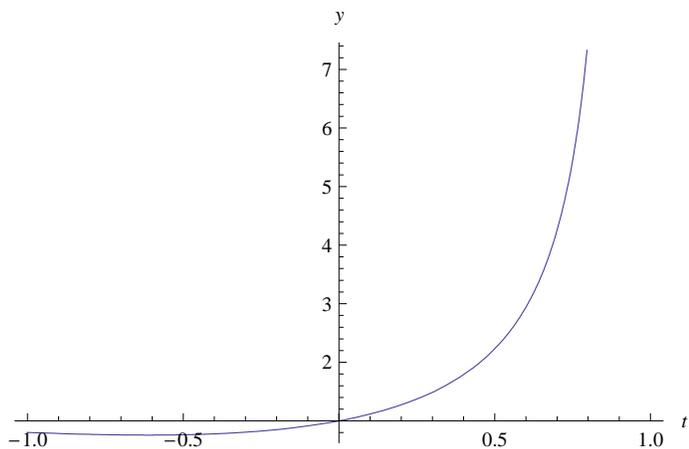


FIG. 8 -

2 ÉQUATIONS LINÉAIRES DU SECOND ORDRE

On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \quad (6)$$

où p , q et g sont des fonctions continues dans un intervalle $|t - t_0| \leq a$. Deux problèmes \mathbf{P} et \mathbf{H} sont associés :

$$\mathbf{P} \quad y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0$$

et

$$\mathbf{H} \quad y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0.$$

2.1 Théorèmes généraux

Théorème 2 *Si les fonctions p et q sont continues dans l'intervalle $|t - t_0| \leq a$, le problème \mathbf{P} admet au plus une solution dans l'intervalle $|t - t_0| \leq a$.*

Démonstration.

En effet, la différence y de deux solutions sera une solution du problème \mathbf{H} avec $y_0 = y'_0 = 0$. Posons

$$K = \sup_{|t-t_0| \leq a} \{ |1 - q(t)| + 2|p(t)| \}$$

et introduisons la fonction

$$\sigma(t) = y(t)^2 + y'(t)^2.$$

Alors

$$\begin{aligned} \sigma'(t) &= 2y(t)y'(t) + 2y'(t)y''(t) \\ &= 2y(t)y'(t) + 2y'(t)(-p(t)y'(t) - q(t)y(t)) \\ &= 2y(t)y'(t)(1 - q(t)) - 2y'(t)^2p(t) \\ &\leq (y(t)^2 + y'(t)^2)|1 - q(t)| + y'(t)^2 2|p(t)| \leq K\sigma(t) \end{aligned}$$

donc

$$\frac{d}{dt} (\sigma(t)e^{-Kt}) \leq 0$$

et

$$\sigma(t)e^{-Kt} \leq \sigma(0), \quad t_0 \leq t \leq t_0 + a$$

c'est-à-dire

$$\sigma(t) = 0, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + a.$$

De façon semblable,

$$\sigma'(t) \geq -K\sigma(t)$$

et

$$\sigma(t) = 0, \quad t_0 - a \leq t \leq t_0.$$

C.Q.F.D.

Des fonctions f_1, f_2, \dots, f_n sont **linéairement indépendantes sur un intervalle** (a, b) si la relation

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + \dots + a_n f_n(t) \equiv 0 \text{ sur } (a, b)$$

entraîne

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0.$$

Dans le cas de deux fonctions dérivables sur (a, b) , une condition suffisante pour cela est que leur **wronskien** $W(f_1, f_2)(t)$ ne s'y annule jamais,

$$W(f_1, f_2)(t) = \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) \end{vmatrix}.$$

Théorème 3 (Abel) *Si la fonction p est continue dans l'intervalle $|t - t_0| \leq a$ et si y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation*

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

sur l'intervalle $|t - t_0| \leq a$, on a

$$W(t) = W(t_0)e^{-\int_{t_0}^t p(s) ds}.$$

Démonstration.

On a

$$\begin{aligned} W'(t) &= y_1'(t)y_2'(t) + y_1(t)y_2''(t) - y_1''(t)y_2(t) - y_1'(t)y_2'(t) \\ &= -y_1(t)(p(t)y_2'(t) + q(t)y_2(t)) + y_2(t)(p(t)y_1'(t) + q(t)y_1(t)) \\ &= -p(t)W(t) \end{aligned}$$

de telle sorte que

$$W(t) = W(t_0)e^{-\int_{t_0}^t p(s) ds}.$$

C.Q.F.D.

Théorème 4 Si les fonctions p et q sont continues dans l'intervalle $|t-t_0| \leq a$ et si y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

sur l'intervalle $|t-t_0| \leq a$, elles sont linéairement indépendantes sur l'intervalle $|t-t_0| \leq a$ si et seulement si leur wronskien ne s'y annule jamais.

Démonstration.

En vertu du théorème d'Abel, le wronskien est identiquement nul ou n'est jamais nul.

Si y_1 et y_2 sont linéairement dépendantes sur l'intervalle $|t-t_0| \leq a$, leur wronskien w est identiquement nul.

Réciproquement, si leur wronskien est identiquement nul, on pourra trouver deux constantes c_1 et c_2 non toutes deux nulles telles que la fonction $y = c_1y_1 + c_2y_2$ satisfasse le problème **H** avec $y_0 = y'_0 = 0$. Mais alors on devra avoir $y \equiv 0$ (théorème (2)) et y_1, y_2 seront linéairement dépendantes. C.Q.F.D.

Théorème 5 Si les fonctions p et q sont continues dans l'intervalle $|t-t_0| \leq a$, la solution générale y du problème **P** est de la forme

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + Y$$

où Y est une solution particulière de l'équation (6) et y_1, y_2 sont des solutions linéairement indépendantes de l'équation

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0.$$

Démonstration.

Toute telle fonction est une solution de l'équation (6) et l'indépendance linéaire des fonctions y_1 et y_2 garantit que l'on pourra aussi satisfaire les conditions initiales. C.Q.F.D.

Remarque.

Ce théorème n'affirme pas l'existence d'une solution. Voir le théorème (7), page(44).

Remarque.

Si l'on connaît une solution y_1 de l'équation

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0,$$

on pourra toujours en obtenir une autre sur tout intervalle où y_1 ne s'annule pas en résolvant l'équation linéaire du premier ordre

$$y' - \frac{y_1'}{y_1}y = \frac{W}{y_1}$$

avec

$$W = Ce^{-\int p(t)dt}.$$

2.2 Équations homogènes autonomes

Pour résoudre l'équation

$$ay'' + by' + cy = 0$$

on cherche une solution de la forme

$$y = e^{rt}.$$

Le paramètre r doit alors satisfaire **l'équation caractéristique**

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{7}$$

Trois cas se présentent.

- L'équation (7) admet deux racines réelles distinctes :

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

et la solution générale de l'équation différentielle est

$$y = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t}.$$

La solution du problème **H** est alors

$$y = \frac{y_0' - y_0r_2}{r_2 - r_1}e^{r_1(t-t_0)} + \frac{y_0r_1 - y_0'}{r_2 - r_1}e^{r_2(t-t_0)}.$$

- L'équation (7) admet deux racines complexes conjuguées :

$$r_1 = \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}, \quad r_2 = \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

et la solution générale de l'équation différentielle peut s'écrire

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

ou, écrivant $r_1 = \lambda - i\mu$ et $r_2 = \lambda + i\mu$ et utilisant la formule d'Euler,

$$y = e^{\lambda t} (a_1 \cos \mu t + a_2 \sin \mu t)$$

ou encore

$$y = e^{\lambda t} A \cos(\mu t + \alpha).$$

- L'équation (7) admet une racine réelle double

$$r_0 = \frac{-b}{2a}$$

ce qui donne une solution

$$y_1 = e^{r_0 t}.$$

On peut en obtenir une seconde en résolvant l'équation linéaire d'ordre un

$$y' - r_0 y = e^{r_0 t}$$

ce qui donne

$$y_2 = t e^{r_0 t}$$

et conduit à la solution générale de l'équation différentielle

$$y = (c_1 + c_2 t) e^{r_0 t}$$

pour ce cas (exceptionnel).

La commande *Mathematica* de base pour résoudre les équations linéaires du second ordre est toujours `DSolve` (figure (9), page (22)).

Exemple. L'équation différentielle d'Euler

L'équation

$$t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + \alpha t \frac{dy}{dt} + \beta y = 0$$

n'est pas autonome mais elle le devient sous le changement de variables $s = \ln t$:

$$\frac{d^2 y}{ds^2} + (\alpha - 1) \frac{dy}{ds} + \beta y = 0.$$

Sa solution générale est donc de la forme

$$y = d_1 t^{r_1} + d_2 t^{r_2}, \quad t > 0$$

```

DSolve[{y''[t] - 3 y'[t] + y[t] == 0, y[0] == 1, y'[0] == 1}, y[t], t] // Simplify
{{y[t] -> 1/10 e^{-1/2 (-3+sqrt(5)) t} (5 + sqrt(5) - (-5 + sqrt(5)) e^{sqrt(5) t})}}
DSolve[{y''[t] - 3 y'[t] + 3 y[t] == 0, y[0] == 1, y'[0] == 0}, y[t], t]
{{y[t] -> e^{3 t/2} (Cos[sqrt(3) t/2] - sqrt(3) Sin[sqrt(3) t/2])}}
DSolve[{y''[t] + 2 y'[t] + y[t] == 0}, y[t], t] // Simplify
{{y[t] -> e^{-t} (C[1] + t C[2])}}

```

FIG. 9 –

ou

$$y = (d_1 + d_2 \ln t)t^{r_0}, \quad t > 0$$

dans le cas exceptionnel.

Exemple. L'oscillateur harmonique (début)

Si y est le déplacement de sa position d'équilibre d'une particule de masse m soumise exclusivement à une force de rappel $F = -ky$ et à une force d'amortissement $F = -\gamma y'$, son mouvement sera régi par

$$my'' + \gamma y' + ky = 0, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0$$

où y_0 est le déplacement initial de la particule et y'_0 est la vitesse qui lui est initialement impartie. On pose

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \alpha = \frac{\gamma}{2m}$$

et les racines de l'équation caractéristique sont

$$r_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}.$$

Le cas sans amortissement ($\gamma = 0$) conduit à des oscillations perpétuelles de période $p = 2\pi/\omega$ et d'amplitude $A = \sqrt{y_0^2 + (y'_0/\omega)^2}$:

$$y = y_0 \cos \omega t + \frac{y'_0}{\omega} \sin \omega t.$$

Le cas amorti faiblement ($\gamma^2 - 4km < 0$) conduit à des oscillations qui s'éteignent exponentiellement :

$$y = e^{-\alpha t} \left(y_0 \cos \sqrt{\omega^2 - \alpha^2} t + \frac{y'_0 + \alpha y_0}{\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}} \sin \sqrt{\omega^2 - \alpha^2} t \right).$$

Dans le cas fortement amorti ($\gamma^2 - 4km > 0$), la particule revient à son point d'équilibre directement dans un temps (mathématiquement) infini puisque $r_1, r_2 < 0$:

$$y = \frac{r_2 y_0 - y'_0}{r_2 - r_1} e^{r_1 t} + \frac{-r_1 y_0 + y'_0}{r_2 - r_1} e^{r_2 t}.$$

Le cas critique, enfin, où $\gamma^2 - 4km = 0$ admet une solution de comportement analogue à celle du cas précédent :

$$y = (y_0 + (y'_0 + \alpha y_0) t) e^{-\alpha t}.$$

2.3 Équations inhomogènes

Pour obtenir une solution particulière Y de l'équation (6), deux méthodes (au moins) sont disponibles. Les deux supposent que l'on connaît déjà deux solutions linéairement indépendantes y_1 et y_2 de l'équation

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0.$$

La première méthode requiert que l'équation soit à coefficients p et q constants et que le second membre soit de la forme

$$g(t) = \sum_{k=1}^n P_k(t) e^{\lambda_k t}$$

où les P_k sont des polynômes et les nombres λ_k peuvent être complexes. On cherche une solution de la forme

$$Y = \sum_{k=1}^n Y_k$$

où, pour chaque k , Y_k est une solution de l'équation (6) du « même type » que $P_k(t)e^{\lambda_k t}$. Il faut tenir compte de ce que le nombre λ_k peut être une solution de l'équation (7).

Exemples.

1.

$$y'' - 4y' + 3y = t^2 + 2$$

Puisque $\lambda = 0$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique, on cherche Y sous la forme $Y = at^2 + bt + c$. Le calcul donne

$$Y = \frac{1}{3}t^2 + \frac{8}{9}t + \frac{44}{27}.$$

2.

$$y'' - 3y' + 3y = \sin t$$

Puisque $\lambda = \pm i$ ne sont pas des racines de l'équation caractéristique, on cherche Y sous la forme $Y = a \cos t + b \sin t$. Le calcul donne

$$Y = \frac{3}{13} \cos t + \frac{2}{13} \sin t.$$

3.

$$y'' + y' - 2y = te^t$$

Puisque $\lambda = 1$ est une racine de l'équation caractéristique, on cherche Y sous la forme $Y = (at^2 + bt + c)e^t$. Le calcul donne

$$Y = \left(\frac{1}{6}t^2 - \frac{1}{9}t + \frac{1}{27} \right) e^t.$$

La seconde méthode, dite de la « variation des paramètres », est due à Lagrange et est complètement générale. Elle consiste à chercher une solution de la forme

$$Y = c_1(t)y_1 + c_2(t)y_2$$

avec

$$c_1'(t)y_1 + c_2'(t)y_2 = 0. \quad (8)$$

On a alors

$$Y'' + p(t)Y' + q(t)Y = c_1'(t)y_1' + c_2'(t)y_2'$$

et l'on veut que

$$c_1'(t)y_1' + c_2'(t)y_2' = g(t). \quad (9)$$

Puisque le wronskien $W(t)$ de y_1 et y_2 est non nul, le système (8) et (9) admet une solution unique et

$$c_1(t) = \int \frac{-y_2 g(t)}{W(t)} dt, \quad c_2(t) = \int \frac{y_1 g(t)}{W(t)} dt.$$

On a donc

$$Y(t) = y_1(t) \int \frac{-y_2(t)g(t)}{W(t)} dt + y_2(t) \int \frac{y_1(t)g(t)}{W(t)} dt$$

Exemple.

Des solutions linéairement indépendantes sur $]0, +\infty[$ de l'équation d'Euler

$$t^2 y'' + ty' + y = 0$$

sont $y_1 = \cos \ln t$ et $y_2 = \sin \ln t$; leur wronskien est $W = 1/t$. Une solution de l'équation inhomogène

$$t^2 y'' + ty' + y = \frac{1}{t^2}$$

sera donc

$$Y(t) = \cos \ln t \int \frac{-\sin \ln t}{t^3} dt + \sin \ln t \int \frac{\cos \ln t}{t^3} dt = \frac{1}{5t^2}.$$

La solution générale de l'équation inhomogène est alors

$$y = c_1 \cos \ln t + c_2 \sin \ln t + \frac{1}{5t^2}$$

et la solution du problème **P** avec $y(1) = y'(1) = 1$ est

$$y = 4 \cos \ln t + 7 \sin \ln t + \frac{1}{5t^2}.$$

Exemple. L'oscillateur harmonique (suite)

Si y est le déplacement de sa position d'équilibre d'une particule de masse m soumise à une force de rappel $F = -ky$, à une force d'amortissement $F = -\gamma y'$ et à une force externe $F(t)$, son mouvement sera régi par

$$my'' + \gamma y' + ky = F(t), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0$$

où y_0 est le déplacement initial de la particule et y'_0 est la vitesse qui lui est initialement impartie.

Appliquer une force constante F_0 à la particule revient à changer son point d'équilibre puisque $Y = F_0/k$.

Dans le cas des oscillations non amorties, appliquer une force $F(t) = \sin \rho t$ à la particule produit

$$Y = \frac{\sin \rho t}{\omega^2 - \rho^2} \quad \text{si } \rho \neq \omega$$

et

$$Y = -\frac{t}{2\omega} \cos \omega t \quad \text{si } \rho = \omega$$

(phénomène de résonance). Les solutions générales sont donc

$$y = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t + \frac{\sin \rho t}{(\omega^2 - \rho^2)}$$

et

$$y = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t - \frac{t}{2\omega} \cos \omega t$$

respectivement. Dans le premier cas, la solution n'est périodique que si ρ et ω sont commensurables. Figures (10), page (26) et (11), page (26).

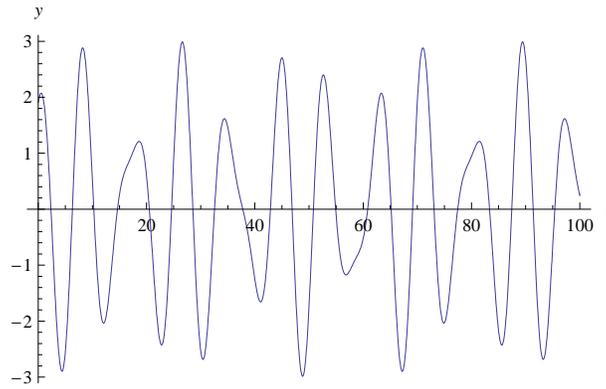


FIG. 10 –

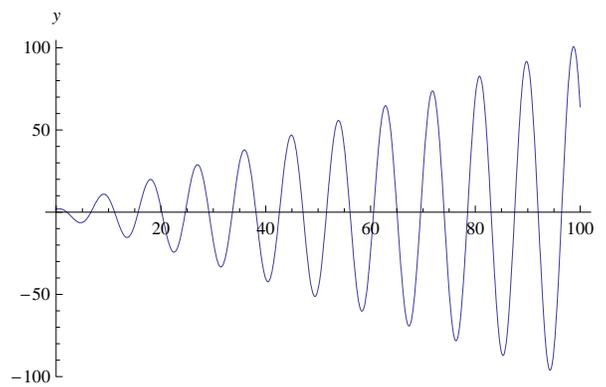


FIG. 11 –

2.4 Équations homogènes à coefficients analytiques

Théorème 6 (Cauchy) *Si les fonctions $p(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k(x-x_0)^k$ et $q(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} q_k(x-x_0)^k$ sont analytiques en x_0 , l'équation*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0$$

admet une solution analytique en x_0 ,

$$y = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-x_0)^k,$$

dont le rayon de convergence $\rho(y)$ satisfait l'inégalité

$$\rho(y) \geq \inf\{\rho(p), \rho(q)\}.$$

Démonstration.

Formellement, on a

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = -\sum_{k=0}^n ((n+1-k)p_k a_{n+1-k} + q_k a_{n-k}), \quad n \geq 0$$

et ces relations déterminent a_2, a_3, a_4, \dots à partir de a_0 et de a_1 .

Considérons une équation

$$z'' + P(x)z' + Q(x)z = 0$$

où

$$P(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} P_k(x-x_0)^k, \quad Q(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} Q_k(x-x_0)^k$$

sont telles que

$$|p_k| \leq P_k, \quad |q_k| \leq Q_k$$

et soit

$$z = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(x-x_0)^k$$

sa solution formelle

$$c_{n+2} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^n ((n+1-k)P_k c_{n+1-k} + Q_k c_{n-k}).$$

Alors $|a_0| \leq c_0$ et $|a_1| \leq c_1$ entraînent, par récurrence sur n , que

$$|a_{n+2}| \leq c_{n+2}, \quad n \geq 0.$$

Soit $R < \inf\{\rho(p), \rho(q)\}$. Puisque

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |p_k| R^k < +\infty, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} |q_k| R^k < +\infty,$$

il existe $M > 0$ tel que

$$|p_k| \leq MR^{-k} = P_k, \quad |q_k| \leq M(k+1)R^{-r} = Q_k.$$

L'équation correspondante pour z est

$$z'' + \frac{M}{(1-x/R)} z' + \frac{M}{(1-x/R)^2} z = 0$$

qui admet la solution

$$z = \frac{1}{(1-x/R)^\mu} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \binom{-\mu}{k} \left(-\frac{x}{R}\right)^k, \quad |x| < R$$

si

$$\mu(\mu+1) + MR\mu + MR^2 = 0.$$

Ainsi la solution formelle y est convergente pour $|x| < R$ quel que soit $R < \inf\{\rho(p), \rho(q)\}$. (Méthode des séries majorantes). C.Q.F.D.

2.5 Coefficients analytiques, points réguliers

Pour l'équation à coefficients analytiques

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0,$$

le point x_0 est régulier si $P(x_0) \neq 0$. En divisant par $P(x)$, on se ramène donc au voisinage de x_0 à la situation du théorème (6). Dans les exemples suivants, $x_0 = 0$.

Exemple. Airy

$$y'' - xy = 0$$

La relation de récurrence pour les coefficients de la solution $y = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ est

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} = a_{k-1} \text{ pour } k \geq 1, \quad a_2 = 0.$$

D'où

$$a_{3k} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (3k-1)3k}, \quad a_{3k+1} = \frac{a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdots (3k)(3k+1)}, \quad a_{3k+2} = 0$$

et

$$y = a_0 \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{3k}}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (3k-1)3k} \right) + a_1 \left(x + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{3k+1}}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdots (3k)(3k+1)} \right).$$

Exemple. Hermite

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$

La relation de récurrence pour les coefficients de la solution $y = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ est

$$a_{k+2} = -\frac{\lambda - 2k}{(k+2)(k+1)} a_k \text{ pour } k \geq 0.$$

D'où

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{\lambda(\lambda-4)(\lambda-8) \cdots (\lambda-4(k-1))}{(2k)!} a_0,$$

$$a_{2k+1} = (-1)^k \frac{(\lambda-2)(\lambda-6) \cdots (\lambda-4(k-1)-2)}{(2k+1)!} a_1$$

et

$$y = a_0 \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\lambda(\lambda-4)(\lambda-8) \cdots (\lambda-4(k-1))}{(2k)!} x^{2k} \right) + a_1 \left(x + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{(\lambda-2)(\lambda-6) \cdots (\lambda-4(k-1)-2)}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right).$$

Lorsque $\lambda = 2n$ est un entier pair, $a_{n+2} = 0$ et la solution paire est un polynôme si n est pair, la solution impaire est un polynôme si n est impair. Le $n^{\text{ième}}$ polynôme d'Hermite est normalisé par la condition que le coefficient de x^n vaut 2^n . Son expression est

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{n! 2^{n-2k}}{k!(n-2k)!} x^{n-2k}.$$

(Figure(12), page(30)). Les polynômes d'Hermite satisfont les relations d'orthogonalité suivantes :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)H_m(x)e^{-x^2} dx = 0 \text{ si } n \neq m$$

comme on le voit en réécrivant l'équation différentielle sous la forme

$$\frac{d}{dx} \left(H_n'(x)e^{-x^2} \right) = -2nH_n(x)e^{-x^2}$$

et en intégrant par parties.

Plot[HermiteH[5, x], {x, -2, 2}, AxesLabel -> {x, "H₅(x)"}]

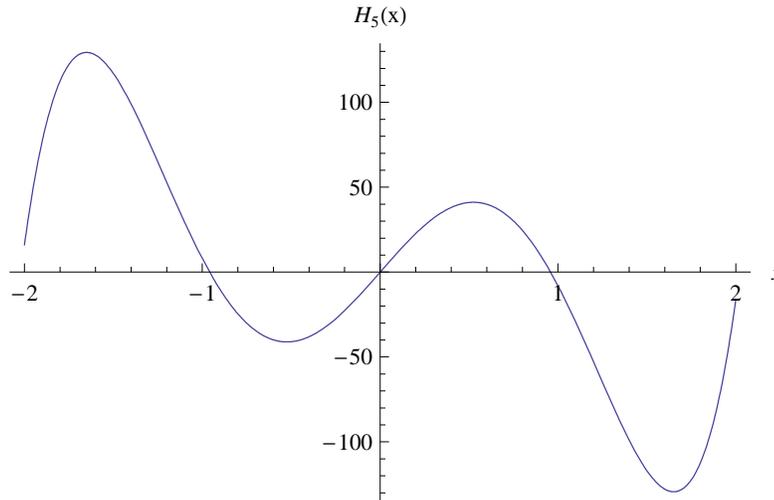


FIG. 12 -

Exemple. Tchebychev

$$(1 - x^2)y'' - xy' + \alpha y = 0$$

La relation de récurrence pour les coefficients de la solution $y = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ est

$$a_{k+2} = -\frac{\alpha^2 - k^2}{(k+2)(k+1)} a_k \text{ pour } k \geq 0.$$

D'où

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{\alpha^2(\alpha^2 - 4)(\alpha^2 - 16) \cdots (\alpha^2 - (2k - 2)^2)}{(2k)!} a_0$$

$$a_{2k+1} = (-1)^k \frac{(\alpha^2 - 1)(\alpha^2 - 9)(\alpha^2 - 25) \cdots (\alpha^2 - (2k - 1)^2)}{(2k + 1)!} a_1$$

et

$$y = a_0 \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\alpha^2(\alpha^2 - 4)(\alpha^2 - 16) \cdots (\alpha^2 - (2k - 2)^2)}{(2k)!} x^{2k} \right)$$

$$+ a_1 \left(x + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{(\alpha^2 - 1)(\alpha^2 - 9)(\alpha^2 - 25) \cdots (\alpha^2 - (2k - 1)^2)}{(2k + 1)!} x^{2k+1} \right).$$

Lorsque $\alpha = n$ est un entier, $a_{n+2} = 0$ et la solution paire est un polynôme si n est pair, la solution impaire est un polynôme si n est impair. Le $n^{\text{ième}}$ polynôme de Tchebychev est normalisé par la condition que le coefficient de x^n vaut 2^{n-1} . Son expression est

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \sum_{j=k}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2j} \binom{j}{k} x^{n-2k}.$$

Le polynôme de Tchebychev possède la propriété remarquable de pouvoir s'écrire sous la forme

$$T_n(x) = \cos n(\arccos x).$$

En effet, posant $x = \cos \theta$, l'équation

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + \alpha y = 0$$

devient

$$\frac{d^2 y}{d\theta^2} + n^2 y = 0$$

et $y = \cos n\theta$ est la solution qui coïncide avec $T_n(\cos \theta)$. Les zéros du polynôme de Tchebychev sont donc les nombres

$$\cos \frac{2k + 1}{2n} \pi, \quad 0 \leq k \leq n - 1$$

et ils satisfont les relations d'orthogonalité

$$\int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = 0 \quad \text{si } n \neq m.$$

`Plot[ChebyshevT[6, x], {x, -1, 1}, AxesLabel -> {x, "T6(x)"}]`

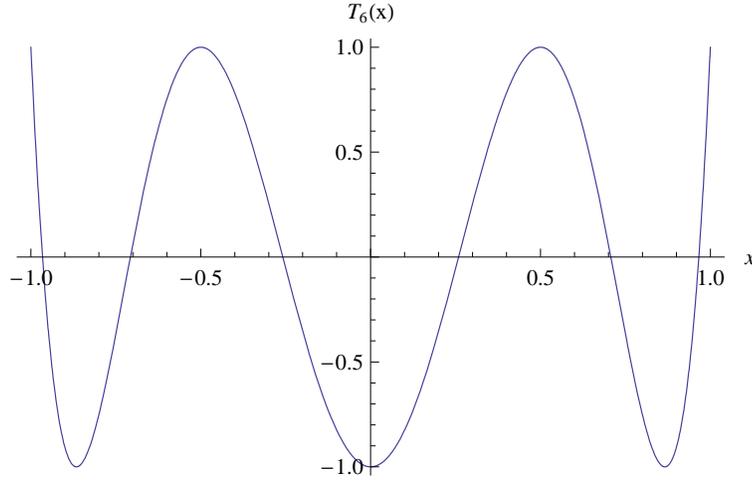


FIG. 13 –

(Figure(13), page(32)).

Exemple. Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0$$

La relation de récurrence pour les coefficients de la solution $y = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ est

$$a_2 = -\frac{\alpha(\alpha + 1)}{2!} a_0, \quad a_3 = -\frac{(\alpha - 1)(\alpha + 2)}{3!} a_1, \quad a_{k+2} = -\frac{\alpha(\alpha + 1) - k(k + 1)}{(k + 2)(k + 1)} a_k$$

pour $k \geq 2$. D'où

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{\alpha(\alpha - 2) \cdots (\alpha - 2k + 2)(\alpha + 1)(\alpha + 3) \cdots (\alpha + 2k - 1)}{(2k)!} a_0,$$

$$a_{2k+1} = (-1)^k \frac{(\alpha - 1)(\alpha - 3) \cdots (\alpha - 2k + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 4) \cdots (\alpha + 2k)}{(2k + 1)!} a_1$$

et

$$y = a_0 \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha - 2) \cdots (\alpha - 2k + 2)(\alpha + 1)(\alpha + 3) \cdots (\alpha + 2k - 1)}{(2k)!} x^{2k} \right) + a_1 \left(x + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\alpha - 1)(\alpha - 3) \cdots (\alpha - 2k + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 4) \cdots (\alpha + 2k)}{(2k + 1)!} x^{2k+1} \right).$$

Lorsque $\alpha = n$ est un entier, $a_{n+2} = 0$ et la solution paire est un polynôme si n est pair, la solution impaire est un polynôme si n est impair. Le $n^{\text{ième}}$ polynôme de Legendre $P_n(x)$ est normalisé par la condition que $P_n(1) = 1$; son expression est

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}.$$

Ces polynômes satisfont les relations d'orthogonalité

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0 \quad \text{si } n \neq m$$

comme on le voit en réécrivant l'équation différentielle sous la forme

$$\frac{d}{dx} ((1-x^2)P_n'(x)) = -n(n+1)P_n(x)$$

et en intégrant par parties. (Figure(14), page(33)).

`Plot[LegendreP[7, x], {x, -1, 1}, AxesLabel -> {x, "P7(x)"}]`

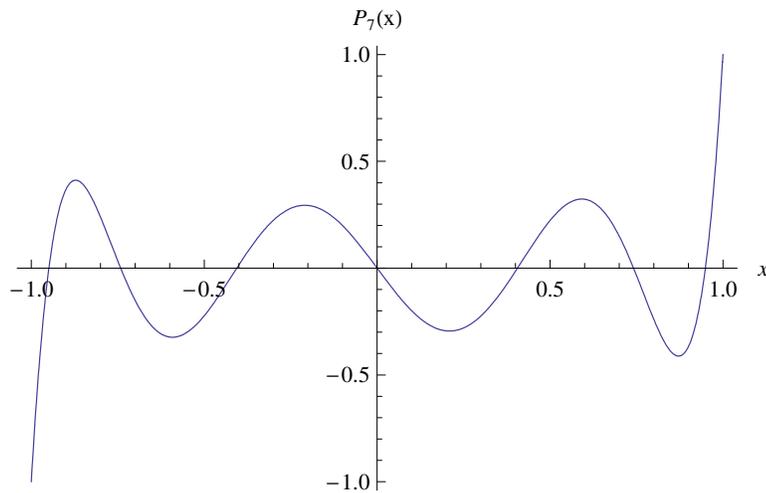


FIG. 14 –

2.6 Coefficients analytiques, points singuliers

Pour l'équation à coefficients analytiques

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0,$$

le point x_0 est singulier si $P(x_0) = 0$. Nous supposons que x_0 est un **point singulier régulier**, c'est-à-dire que les limites

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)Q(x)}{P(x)} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)^2 R(x)}{P(x)}$$

existent. Pour simplifier, posons $x_0 = 0$. On peut alors réécrire l'équation précédente sous la forme

$$x^2 y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0$$

où

$$p(x) = x \frac{Q(x)}{P(x)} = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k x^k$$

et

$$q(x) = x^2 \frac{R(x)}{P(x)} = \sum_{k=0}^{+\infty} q_k x^k$$

sont analytiques dans un intervalle $|x| < \rho$.

Exemple. Euler

$$x^2 y'' + xp_0 y' + q_0 y = 0$$

On cherche une solution de la forme $y = x^r$. Alors r doit satisfaire **l'équation indicelle**

$$r(r - 1) + p_0 r + q_0 = 0.$$

On aura alors suivant la nature de ses racines :

$$y = c_1 |x|^{r_1} + c_2 |x|^{r_2}$$

dans le cas de deux racines réelles distinctes

$$r_{1,2} = \frac{-1 + p_0 \pm \sqrt{(p_0 - 1)^2 - 4q_0}}{2};$$

$$y = |x|^\lambda (c_1 \cos \mu \ln |x| + c_2 \sin \mu \ln |x|)$$

dans le cas de deux racines complexes conjuguées

$$\lambda \pm i\mu = \frac{-1 + p_0}{2} \pm i \frac{\sqrt{4q_0 - (p_0 - 1)^2}}{2}$$

et

$$y = (c_1 + c_2 \ln |x|)e^{-r_0}$$

dans le cas d'une racine réelle double

$$r_0 = \frac{-1 + p_0}{2}.$$

Le cas général peut être considéré comme une équation d'Euler généralisée. Pour le résoudre (pour $x \geq 0$), on cherche, suivant Frobenius, une solution de la forme

$$y = \sum_{k=0}^{+\infty} a(r, k)x^{k+r}, \quad a_0 = 1.$$

En posant

$$F(r) = r(r-1) + p_0r + q_0,$$

l'équation indiciale

$$F(r) = 0$$

et la relation de récurrence

$$a_n F(r+n) = - \sum_{k=0}^{n-1} ((r+k)p_{n-k} + q_{n-k})a_k \quad \text{pour } n \geq 1$$

doivent être satisfaites. Soient r_1 et r_2 les racines de l'équation indiciale, $r_1 \geq r_2$. Puisque $F(r_1+n) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la récurrence précédente détermine une solution y_1 analytique dans $0 < x < \rho$:

$$y_1 = x^{r_1} \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} a(r_1, k)x^k \right)$$

Pour r_2 , plusieurs cas se présentent.

- Cas $r_1 > r_2$ et $r_1 - r_2 \notin \mathbb{N}$. Alors $F(r_2+n) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la récurrence précédente détermine une deuxième solution linéairement indépendante analytique dans $0 < x < \rho$:

$$y_2 = x^{r_2} \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} a(r_2, k)x^k \right).$$

- Cas $r_1 = r_2$. Alors y_1 et $\frac{\partial y_1}{\partial r} \Big|_{r=r_1}$ sont des solutions linéairement indépendantes analytiques dans $0 < x < \rho$:

$$y_2 = \frac{\partial y_1}{\partial r} \Big|_{r=r_2} = y_1 \ln x + x^{r_2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\partial a(r, k)}{\partial r} \Big|_{r=r_2} x^k.$$

En effet, on obtient cette deuxième solution si, dans le cas où $r_1 \neq r_2$, on prend comme solutions indépendantes y_1 et $(y_2 - y_1)/(r_2 - r_1)$ plutôt que y_1 et y_2 et qu'ensuite, on laisse $r_2 \rightarrow r_1$.

• Cas $r_1 - r_2 = N \in \mathbb{N}$. Alors y_2 est une deuxième solution linéairement indépendante analytique dans $0 < x < \rho$ si :

$$y_2 = a y_1 \ln x + x^{r_2} \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} b(r_2, k) x^k \right)$$

avec

$$a = \lim_{r \rightarrow r_2} (r - r_2) a(r, N)$$

et

$$b(r_2, k) = \left. \frac{\partial}{\partial r} (r - r_2) a(r, k) \right|_{r=r_2}$$

(démonstrations omises).

Exemple. Laguerre

$$xy'' + (1 - x)y' + \lambda y = 0$$

On a ici $P(x) = x$, $Q(x) = 1 - x$ et $R(x) = \lambda$ donc $x = 0$ est un point singulier régulier et, dans la forme standard de l'équation, $p(x) = 1 - x$, $q(x) = \lambda x$. L'équation indiciale est $r^2 = 0$, la récurrence est

$$a_n = -\frac{\lambda + 1 - n - r}{(n + r)^2} a_{n-1}.$$

On a donc $r_1 = r_2 = 0$. La récurrence entraîne

$$a(r, k) = (-1)^k \frac{(\lambda - r)(\lambda - r - 1) \cdots (\lambda - r - (k - 1))}{(r + 1)^2 (r + 2)^2 \cdots (r + k)^2}.$$

D'où

$$y_1 = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} a(0, k) x^k = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\lambda(\lambda - 1) \cdots (\lambda - (k - 1))}{k!^2} x^k$$

et

$$y_2 = \left. \frac{\partial y_1}{\partial r} \right|_{r=0} = y_1 \ln x + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \left. \frac{\partial}{\partial r} \frac{(\lambda - r)(\lambda - r - 1) \cdots (\lambda - r - (k - 1))}{(r + 1)^2 (r + 2)^2 \cdots (r + k)^2} \right|_{r=0} x^k.$$

Lorsque $\lambda = n$ est un entier, on a $a(0, n + 1) = 0$ et y_1 est un polynôme. Le $n^{\text{ième}}$ polynôme de Laguerre $L_n(x)$ est normalisé par $L_n(0) = 1$. Son expression est

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{x^k}{k!}.$$

Les polynômes de Laguerre sont orthogonaux sur l'intervalle $[0, +\infty[$ relativement au poids e^{-x} ,

$$\int_0^{+\infty} L_n(x)L_m(x)e^{-x} dx = 0 \text{ si } n \neq m,$$

comme on le voit en écrivant l'équation différentielle sous la forme équivalente

$$\frac{d}{dx} (xL'_n(x)e^{-x}) = -nL_n(x)e^{-x}$$

puis en intégrant par parties. (Figure(15), page(37)).

`Plot[LaguerreL[8, x], {x, 0, 12}, AxesLabel -> {x, "L8(x)"}]`

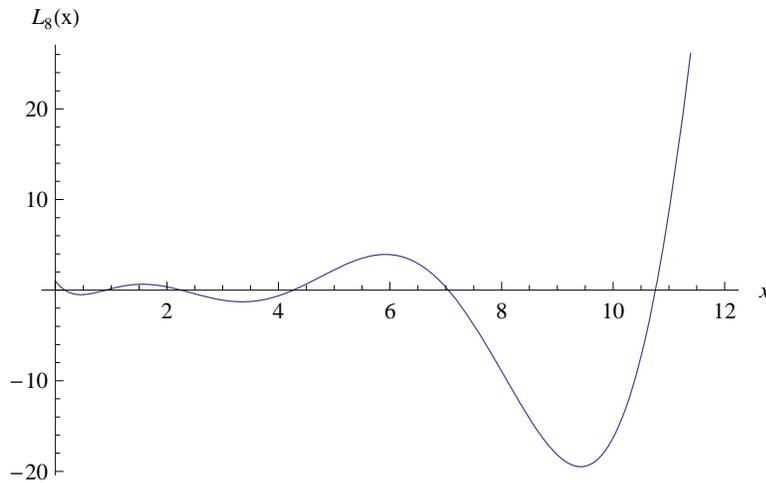


FIG. 15 –

Exemple. L'équation hypergéométrique

$$x(1-x)y'' + (\gamma - (1+\alpha+\beta)x)y' - \alpha\beta y = 0$$

Ici $P(x) = x(1-x)$, $Q(x) = \gamma - (1 + \alpha + \beta)x$ et $R(x) = -\alpha\beta$. $x = 0$ est un point singulier régulier :

$$p(x) = \gamma + (\gamma - (1 + \alpha + \beta))x + \dots \quad \text{et} \quad q(x) = -\alpha\beta x + \dots$$

L'équation indicelle en $x = 0$ est

$$r(r-1) + \gamma r = 0.$$

Le point $x = 1$ est aussi un point singulier régulier. On a

$$p_1(x) = 1 + \alpha + \beta - \gamma + \gamma(x-1) + \dots \quad \text{et} \quad q_1(x) = \alpha\beta(x-1) + \dots$$

L'équation indicelle en $x = 1$ est

$$r(r-1) + (1 + \alpha + \beta - \gamma)r = 0.$$

On considère le point $x = 0$ en supposant que $1 - \gamma \notin \mathbb{N}_0$. Sur l'intervalle $]0, 1[$, on aura une solution

$$y_1 = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^k$$

avec la récurrence

$$a_{k+1} = \frac{(k + \alpha)(k + \beta)}{(k + 1)(k + \gamma)} a_k$$

ce qui conduit à

$$y_1 = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha + 1) \cdots (\alpha + k - 1) \beta(\beta + 1) \cdots (\beta + k - 1)}{k! \gamma(\gamma + 1) \cdots (\gamma + k - 1)} x^k.$$

On aura une seconde solution linéairement indépendante

$$y_2 = x^{1-\gamma} \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^k \right)$$

avec cette fois la récurrence

$$a_{k+1} = \frac{(k + 1 - \gamma + \alpha)(k + 1 - \gamma + \beta)}{(k + 1)(k + 1 + 1 - \gamma)} a_k$$

d'où

$$y_2 = x^{1-\gamma} \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\alpha + 1 - \gamma) \cdots (\alpha + k - \gamma) (\beta + 1 - \gamma) \cdots (\beta + k - \gamma)}{k! (2 - \gamma) \cdots (k + 1 - \gamma)} x^k \right).$$

Quant au point $x = 1$, le changement de variables $t = 1 - x$, $z(t) = y(1 - t)$ en ramène l'étude à celle de l'équation

$$t(1 - t)z'' + (1 + \alpha + \beta - \gamma - (1 + \alpha + \beta)t)z' - \alpha\beta z = 0$$

au point $t = 0$. (Figure(16), page(39)).

```
Plot[Hypergeometric2F1[0.1, 0.2, 0.3, x], {x, 0, 1}, AxesLabel -> {t, "_2F_1(x)"}]
```

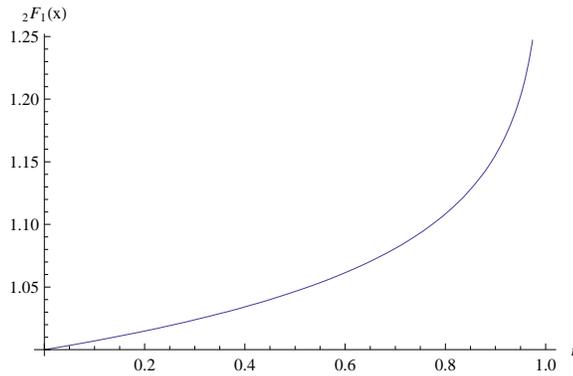


FIG. 16 –

Exemple. Bessel

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

Considérons les cas où $\nu = 0, 1/2, 1$.

- Cas $\nu = 0$. $x = 0$ est un point singulier régulier avec

$$p(x) = 1 \text{ et } q(x) = x^2.$$

L'équation indicielle $r^2 = 0$ admet $r_1 = r_2 = 0$ pour racines et la récurrence est

$$a_k = -\frac{1}{(n+r)^2} a_{n-2}, \quad n \geq 2, \quad a_1 = 0$$

ce qui conduit à

$$a(r, 2k) = \frac{(-1)^k}{(r+2)^2(r+4)^2 \dots (r+2k)^2}, \quad a(r, 2k+1) = 0.$$

On a donc

$$y_1 = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k!^2} x^{2k}.$$

Cette fonction est la fonction de Bessel de premier type d'ordre 0 :

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Puisque

$$\left. \frac{\partial}{\partial r} a(r, 2k) \right|_{r=0} = (-1)^{k+1} \frac{H_k}{2^{2k} k!^2}$$

où

$$H_k = \sum_{j=1}^k \frac{1}{j},$$

on obtient

$$y_2 = y_1 \ln x + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{H_k}{2^{2k} k!^2} x^{2k}.$$

Pour exprimer la solution générale de l'équation de Bessel d'indice 0, on utilise habituellement plutôt la fonction de Bessel de deuxième type d'ordre 0,

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \left\{ \left(\gamma + \ln \frac{x}{2} \right) J_0(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{H_k}{2^{2k} k!^2} x^{2k} \right\}$$

dans l'expression de laquelle γ est la constante d'Euler-Mascheroni,

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} (H_n - \ln n) \approx 0,5772.$$

(Figure(17), page(41)).

- Cas $\nu = 1/2$. Ici, on a

$$p(x) = 1 \quad \text{et} \quad q(x) = -\frac{1}{4} + x^2.$$

L'équation indiciale est

$$r^2 - \frac{1}{4} = 0$$

et la récurrence est

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(r+n)^2 - 1/4}, \quad n \geq 2, \quad a_1 = 0.$$

Pour $r = r_1 = 1/2$, on en tire

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}, \quad a_{2k+1} = 0$$

```
Plot[{BesselJ[0, x], BesselY[0, x]}, {x, 0, 15}, AxesLabel -> {x}, PlotStyle -> {Red, Blue},
Epilog -> {{Red, Text["J0(x)", {2, 0.6}]}, {Blue, Text["Y0(x)", {4.1, 0.2}]}}]
```

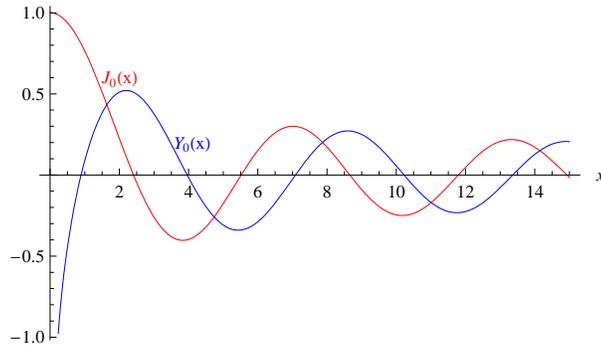


FIG. 17 –

et

$$y_1 = x^{-1/2} \sin x.$$

On utilise généralement plutôt la fonction de Bessel de premier type d'ordre $1/2$:

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x.$$

Pour obtenir une seconde solution y_2 , on peut résoudre l'équation linéaire d'ordre un

$$y_2' - \frac{y_1'}{y_1} y_2 = \frac{1}{xy_1}$$

(le wronskien associé à l'équation de Bessel normalisée est $W(x) = 1/x$) qui admet pour solution particulière

$$y_2 = -\frac{\cos x}{\sqrt{x}}.$$

On utilise habituellement la fonction de Bessel de premier type d'ordre $-1/2$:

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

(Figure(18), page(42)).

- Cas $\nu = 1$. Ici, on a

$$p(x) = 1 \text{ et } q(x) = -1 + x^2.$$

```
Plot[{BesselJ[1/2, x], BesselJ[-1/2, x]}, {x, 0, 15}, AxesLabel -> {x}, PlotStyle -> {Red, Blue},
Epilog -> {{Red, Text["J1/2(x)", {3, 0.6}]}, {Blue, Text["J-1/2(x)", {4.1, 0.2}]}}]
```

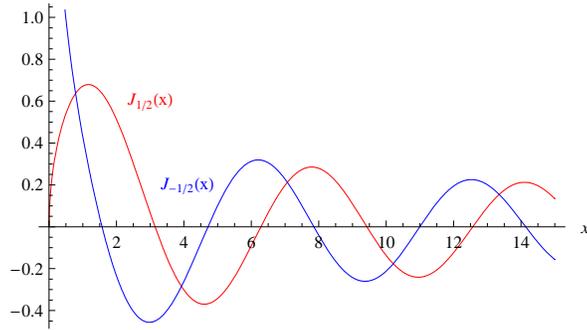


FIG. 18 –

L'équation indicelle est

$$r^2 - 1 = 0$$

et la récurrence est

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(r+n)^2 - 1}, \quad n \geq 2, \quad a_1 = 0$$

d'où

$$a(r, 2k) = \frac{(-1)^k}{(r+1)(r+3)^2 \cdots (r+2k-1)^2(r+2k+1)}, \quad a(r, 2k+1) = 0.$$

Pour $r = r_1 = 1$, on en tire

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k} k! (k+1)!}, \quad a_{2k+1} = 0$$

et

$$y_1 = x \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k! (k+1)!} x^{2k} \right).$$

On utilise habituellement la fonction de Bessel de premier type d'ordre 1 :

$$J_1(x) = \frac{x}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! (k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

En général, la solution de l'équation différentielle de Bessel est

$$y = aJ_\nu(x) + bY_\nu(x)$$

où

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

et

$$Y_\nu(x) = \lim_{\mu \rightarrow \nu} \frac{J_\mu(x) \cos \mu\pi - J_{-\mu}(x)}{\sin \mu\pi}.$$

3 SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

En posant $x_1(t) = y(t)$ et $x_2(t) = y'(t)$, l'équation différentielle

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$$

est équivalente au système linéaire

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -p(t)x_2 - q(t)x_1 + g(t)\end{aligned}$$

et l'équation avec conditions initiales est un cas particulier du problème général

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0.$$

3.1 Le théorème fondamental généralisé

Théorème 7 (Picard) *Si les fonctions $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ et $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(t, \mathbf{x})$ ($1 \leq j \leq n$) sont continues dans un pavé fermé P de \mathbb{R}^{n+1} contenant le point (t_0, \mathbf{x}_0) dans son intérieur, il existe un intervalle $|t - t_0| \leq a$ dans lequel le problème*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{10}$$

admet une solution unique et cette solution dépend continûment des conditions initiales.

Démonstration.

La démonstration reprend essentiellement celle du théorème (2), page(4). On peut supposer que $t_0 = 0$ et que $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. La fonction $\mathbf{x} = \phi(t)$ est une solution du problème (10) si et seulement si on a

$$\phi(t) = \int_0^t \mathbf{f}(s, \phi(s)) ds.$$

Pour la partie EXISTENCE, le théorème des accroissements finis n'étant plus valide pour les fonctions vectorielles, il faut écrire, pour $1 \leq i \leq n$, que

$$|f_i(\mathbf{x}) - f_i(\mathbf{y})| = \left| \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\theta_i \mathbf{x} + (1 - \theta_i) \mathbf{y})(x_j - y_j) \right| \leq K_i \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \tag{11}$$

de telle sorte que l'on a encore

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})\| \leq K\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

pour un nombre $K > 0$ approprié, ce qui permet à la même démonstration de s'appliquer. La relation (11) s'obtient en appliquant le théorème des accroissements finis et la règle de dérivation en chaîne à la fonction

$$g_i(s) = f_i(s\mathbf{x} + (1-s)\mathbf{y}).$$

Pour la partie UNICITÉ, supposant deux solutions \mathbf{x} et \mathbf{y} , on peut considérer la fonction

$$\sigma(t) = \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\|^2$$

pour laquelle

$$\sigma'(t) = 2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})),$$

utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour montrer que

$$-2\sigma(t)K \leq \sigma'(t) \leq 2K\sigma(t)$$

et en déduire que

$$\sigma(t) = 0, \quad |t| \leq a.$$

Pour la partie CONTINUITÉ, supposant deux conditions initiales $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ et $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0$, des calculs similaires appliqués à la même fonction conduisent à

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\| \leq \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0\|e^{K|t|}, \quad |t| \leq a.$$

C.Q.F.D.

Dans le cas où

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$$

est linéaire, la solution sera définie dans le plus grand intervalle contenant t_0 dans lequel les entrées $p_{ij}(t)$ de la matrice \mathbf{P} et les composantes $g_i(t)$ du vecteur $\mathbf{g}(t)$ sont continues.

Remarque.

Dans ce contexte, l'espace \mathbb{R}^n s'appelle **espace de phase** et la solution du problème est une trajectoire dans cet espace.

3.2 Systèmes linéaires, théorèmes généraux

On considère le système linéaire

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t).$$

Soient $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ des solutions de ce système. Leur wronskien est le déterminant de la matrice dont les colonnes sont les composantes des vecteurs $\mathbf{x}_j(t)$:

$$W(t) = |x_{ij}(t)|_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Dans le cas d'une équation d'ordre deux transformée en un système linéaire équivalent, on retrouve la définition précédente puisque pour $j = 1, 2$:

$$\mathbf{x}_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_j \\ y'_j \end{pmatrix}.$$

Théorème 8 (Abel) *Si les fonctions p_{ij} sont continues dans l'intervalle $|t - t_0| \leq a$ et si $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ sont des solutions du système*

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$$

sur l'intervalle $|t - t_0| \leq a$, on a

$$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^t \text{tr}(\mathbf{P})(s) ds}.$$

Démonstration.

On a

$$W(t) = \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} x_{1\sigma(1)} x_{2\sigma(2)} \cdots x_{n\sigma(n)}.$$

Donc

$$\begin{aligned} W'(t) &= \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \sum_{k=1}^n x_{1\sigma(1)} \cdots x'_{k\sigma(k)} \cdots x_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} x_{1\sigma(1)} \cdots x'_{k\sigma(k)} \cdots x_{n\sigma(n)} = \sum_{k=1}^n W_k(t) \end{aligned}$$

où $W_k(t)$ est obtenu de $W(t)$ en y remplaçant les entrées $x_{kj}(t)$ de la $k^{\text{ème}}$ ligne par leur dérivée $x'_{kj}(t)$. En utilisant la $k^{\text{ème}}$ équation différentielle et les propriétés des déterminants, on obtient

$$W_k(t) = p_{kk}(t) W(t)$$

d'où

$$W'(t) = \sum_{k=1}^n p_{kk}(t) W(t) = \text{tr}(\mathbf{P})(t) W(t)$$

et

$$W(t) = W(t_0) e^{\int_{t_0}^t \text{tr}(\mathbf{P})(s) ds}.$$

C.Q.F.D.

Théorème 9 Si les fonctions p_{ij} sont continues dans l'intervalle $|t - t_0| \leq a$ et si $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ sont des solutions du système

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$$

sur l'intervalle $|t - t_0| \leq a$, elles sont linéairement indépendantes sur l'intervalle $|t - t_0| \leq a$ si et seulement si leur wronskien ne s'y annule jamais.

Démonstration.

En vertu du théorème d'Abel, le wronskien est identiquement nul ou n'est jamais nul.

Si $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ sont linéairement dépendantes sur l'intervalle $|t - t_0| \leq a$, leur wronskien y est identiquement nul.

Réciproquement, si leur wronskien est identiquement nul, on pourra trouver des constantes c_1, c_2, \dots, c_n non toutes nulles telles que

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{x}_k(t)$$

satisfasse le système

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$$

et les conditions initiales $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}$. En vertu de la partie unicité du théorème (7), $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ seront linéairement dépendantes. C.Q.F.D.

Théorème 10 Si les fonctions p_{ij} sont continues dans l'intervalle $|t - t_0| \leq a$, la solution générale du problème linéaire

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{x}_k + \mathbf{X}$$

où \mathbf{X} est une solution particulière du problème et $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ sont des solutions linéairement indépendantes de

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}.$$

Démonstration.

Toute telle fonction est solution de l'équation différentielle et les constantes peuvent être déterminées pour satisfaire aussi les conditions initiales. C.Q.F.D.

3.3 Systèmes homogènes autonomes, $n = 2$

Pour résoudre l'équation

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{P}\mathbf{x}$$

on cherche une solution de la forme

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\xi}e^{rt}.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que \mathbf{x} soit une solution est que $\boldsymbol{\xi}$ soit un vecteur propre de \mathbf{P} associé à la valeur propre r , c'est-à-dire que

$$|\mathbf{P} - r\mathbf{I}| = 0$$

(l'équation séculaire) et que

$$\mathbf{P}\boldsymbol{\xi} = r\boldsymbol{\xi}, \quad \boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0}.$$

Lemme 1 *Des vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes sont linéairement indépendants.*

Lorsque $n = 2$, on considère le système

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

L'équation séculaire est alors

$$r^2 - (p_{1,1} + p_{2,2})r + (p_{1,1}p_{2,2} - p_{1,2}p_{2,1}) = 0.$$

Suivant la nature des valeurs propres r_1, r_2 de la matrice, on distingue plusieurs cas.

- Cas de valeurs réelles distinctes.

Si $r_1 r_2 = 0$, la solution

$$\mathbf{x} = c_1 \boldsymbol{\xi}_1 + c_2 \boldsymbol{\xi}_2 e^{r_2 t}$$

demeure sur une droite

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = a.$$

Si $r_1 r_2 > 0$, lorsque $t \rightarrow +\infty$, la solution

$$\mathbf{x} = c_1 \boldsymbol{\xi}_1 e^{r_1 t} + c_2 \boldsymbol{\xi}_2 e^{r_2 t}$$

se rapproche de l'origine lorsque les valeurs propres sont toutes deux négatives – l'origine est alors un **noeud attractif** ou s'en éloigne sans limite si elles sont toutes deux positives – l'origine est alors un **noeud répulsif**.

Si $r_1 r_2 < 0$, disons $r_1 < 0 < r_2$, lorsque $t \rightarrow +\infty$, la solution

$$\mathbf{x} = c_1 \boldsymbol{\xi}_1 e^{r_1 t} + c_2 \boldsymbol{\xi}_2 e^{r_2 t},$$

suitant la condition initiale, se rapproche de l'origine le long de la droite portée par le vecteur $\boldsymbol{\xi}_1$ ou s'en éloigne sans limite le long de ou en se rapprochant de la droite portée par le vecteur $\boldsymbol{\xi}_2$. L'origine est un **point de selle**.

• Cas de valeurs complexes conjuguées.

Alors, la matrice étant réelle, les vecteurs propres sont aussi conjugués et, en posant

$$r_{1,2} = \lambda \pm i\mu \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\xi}_{1,2} = \boldsymbol{\zeta} \pm i\boldsymbol{\eta},$$

la solution peut se mettre sous forme réelle

$$\mathbf{x} = e^{\lambda t} (\mathbf{a} \cos \mu t + \mathbf{b} \sin \mu t).$$

où maintenant les vecteurs

$$\mathbf{a} = (c_1 + c_2)\boldsymbol{\zeta} + i(c_1 - c_2)\boldsymbol{\eta} \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = -(c_1 + c_2)\boldsymbol{\eta} + i(c_1 - c_2)\boldsymbol{\zeta}$$

sont réels.

Si $\lambda = 0$, la trajectoire est une ellipse contenant l'origine dans son intérieur et la solution est périodique de période $2\pi/\mu$.

Si $\lambda < 0$, l'origine est un **point spirale attractif** dont la solution se rapproche en tournoyant lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Si $\lambda > 0$, l'origine est un **point spirale répulsif** dont la solution s'éloigne sans limite tout en tournoyant lorsque $t \rightarrow +\infty$.

- Cas d'une valeur propre double.

Si \mathbf{P} est diagonale, la solution générale est ($r = p_{1,1} = p_{2,2}$)

$$\mathbf{x} = \left(c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) e^{rt}.$$

Si $p_{2,1} \neq 0$, soit $\mathbf{P}\boldsymbol{\xi} = r\boldsymbol{\xi}$ un vecteur propre ($r = (p_{1,1} + p_{2,2})/2$ et $\xi_1 = \xi_2(p_{1,1} - p_{2,2})/(2p_{2,1})$). Alors

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \xi_2/p_{2,1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

est une solution de l'équation

$$\mathbf{P}\boldsymbol{\eta} = r\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}$$

et la solution générale de l'équation différentielle est

$$\mathbf{x} = c_1\boldsymbol{\xi}e^{rt} + c_2(t\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta})e^{rt}.$$

Si $p_{1,2} \neq 0$, il faut utiliser $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = \xi_1/p_{1,2}$.

Exemple. L'oscillateur harmonique (fin)

Pour le problème

$$y'' + 2\alpha y' + \omega^2 y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

on a

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\alpha \end{pmatrix}$$

et les valeurs propres sont $r_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$.

Dans le cas non amorti ($\alpha = 0$), la trajectoire de \mathbf{x} dans le plan de phase est une ellipse (figure(19), page(51)).

Dans le cas sous amorti ($0 < \alpha < \omega$), l'origine est un point spirale attractif (figure(20), page(51)).

Dans le cas critique amorti ($\alpha = \omega$), l'origine est un noeud attractif (figure(21), page(51)).

Dans le cas sur amorti ($\alpha > \omega$), l'origine est un noeud attractif (figure(22), page(52)).

`ParametricPlot[{Cos[0.5 t], 0.5 Sin[0.5 t]}, {t, 0, 4 π}, AxesLabel → {"x1", "x2"}]`

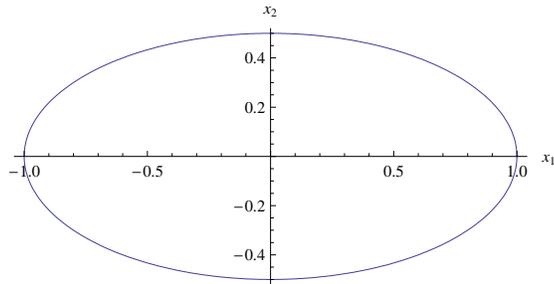


FIG. 19 –

`ParametricPlot[{e-0.2 t (Cos[√0.21 t] + $\frac{0.2}{\sqrt{0.21}}$ Sin[√0.21 t])},
 $0.2 e^{-0.2 t} (\text{Cos}[\sqrt{0.21} t] + \frac{0.2}{\sqrt{0.21}} \text{Sin}[\sqrt{0.21} t]) +$
 $e^{-0.2 t} (-\sqrt{0.21} \text{Sin}[\sqrt{0.21} t] + 0.2 \text{Cos}[\sqrt{0.21} t])$ }, {t, 0, 8 π}, AxesLabel → {"x1", "x2"}]`

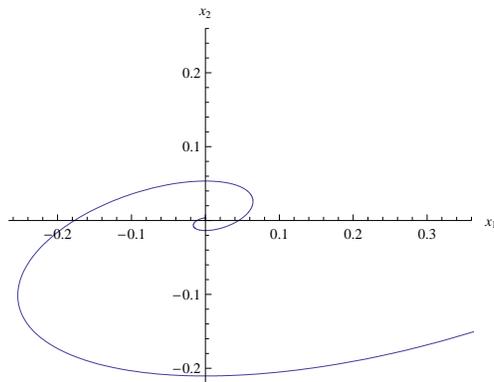


FIG. 20 –

`ParametricPlot[{(1 + 0.5 t) e-0.5 t, -0.25 t e-0.5 t}, {t, 0, 6 π}, AxesLabel → {"x1", "x2"}]`

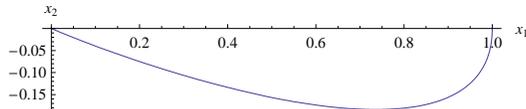


FIG. 21 –

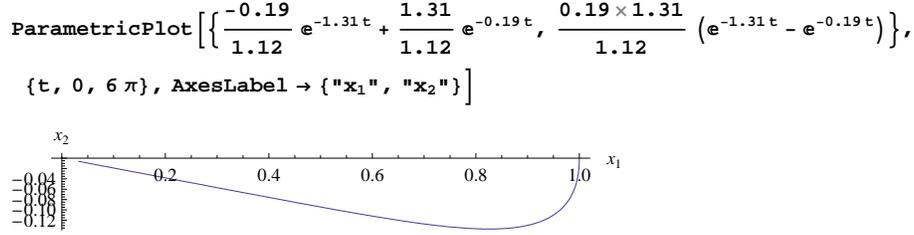


FIG. 22 –

3.4 Systèmes homogènes autonomes, $n \geq 2$

La **matrice exponentielle** d'une matrice carrée M est définie par la relation

$$\exp M = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} M^k.$$

La série est convergente quelle que soit M car elle est normalement convergente, la norme étant la norme euclidienne :

$$\|M\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j}^2}.$$

On a en effet

$$\|M^p\| \leq \|M\|^p;$$

d'abord

$$\begin{aligned} \|M^2\|^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n m_{i,k} m_{k,j} \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n m_{i,k}^2 \sum_{k=1}^n m_{k,j}^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n m_{i,k}^2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n m_{k,j}^2 = \|M\|^4 \end{aligned}$$

puis, par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ ($M^p = (m_{i,j}(p))$),

$$\begin{aligned} \|M^{p+1}\|^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n m_{i,k}(p) m_{k,j} \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n m_{i,k}(p)^2 \sum_{k=1}^n m_{k,j}^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n m_{i,k}^2(p) \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n m_{k,j}^2 = \|M^p\|^2 \|M\|^2 \leq \|M\|^{2p} \|M\|^2 = \|M\|^{2(p+1)}. \end{aligned}$$

Lorsque M est diagonale, $\exp M$ est aussi diagonale, l'entrée $m_{i,i}$ étant remplacée par l'entrée $\exp m_{i,i}$.

Lorsque M est diagonalisable,

$$M = UDU^{-1}$$

où D est diagonale, on a

$$\exp M = U \exp D U^{-1}.$$

La matrice exponentielle possède les propriétés suivantes :

$$\exp(-M) \exp M = I$$

et

$$\frac{d}{dt} \exp(tM) = M \exp(tM) = \exp(tM) M.$$

On en déduit que l'équation

$$\mathbf{x}'(t) = P \mathbf{x}$$

est équivalente à

$$\frac{d}{dt} \exp(-tP) \mathbf{x} = 0$$

dont la solution générale peut s'écrire

$$\mathbf{x} = \exp(tP) \mathbf{c},$$

la solution du problème

$$\mathbf{x}'(t) = P \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

étant

$$\mathbf{x} = \exp((t - t_0)P) \mathbf{x}_0.$$

La commande *Mathematica* pour calculer l'exponentielle d'une matrice est `MatrixExp` (figure(23), page(54)).

Si P admet n vecteurs propres linéairement indépendants $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, cette solution générale sera

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n c_k \xi_k e^{r_k t}$$

les nombres r_1, r_2, \dots, r_n étant les valeurs propres (non nécessairement distinctes) de P .

`MatrixExp[{{1, -2, 3}, {4, -5, 6}, {7, 8, -9.}}] // MatrixForm`

$$\begin{pmatrix} 11.3131 & 0.0288627 & 2.88312 \\ 21.8903 & 0.425605 & 5.76623 \\ 21.3593 & 0.372284 & 5.60455 \end{pmatrix}$$

FIG. 23 –

Lemme 2 *Lorsque P est symétrique, les valeurs propres $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_n$ sont toutes réelles (mais pas nécessairement distinctes) et on peut leur associer n vecteurs propres orthonormaux $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$.*

Exemple.

La matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

admet pour valeurs propres les nombres $r_1 = -1, r_2 = 2 - \sqrt{3}, r_3 = 2 + \sqrt{3}$, des vecteurs propres correspondant étant

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 - \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 + \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

de telle sorte que la solution générale du système

$$\mathbf{x}'(t) = P \mathbf{x}$$

est

$$\mathbf{x} = c_1 \xi_1 e^{r_1 t} + c_2 \xi_2 e^{r_2 t} + c_3 \xi_3 e^{r_3 t}.$$

La solution du problème

$$\mathbf{x}'(t) = P \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

est

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3-\sqrt{3}}{12}e^{(2-\sqrt{3})t} + \frac{3+\sqrt{3}}{12}e^{(2+\sqrt{3})t} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}}e^{(2-\sqrt{3})t} + \frac{1}{2\sqrt{3}}e^{(2+\sqrt{3})t} \\ -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3-\sqrt{3}}{12}e^{(2-\sqrt{3})t} + -\frac{3+\sqrt{3}}{12}e^{(2+\sqrt{3})t} \end{pmatrix}.$$

```

Eigensystem[{{1, 1, 2}, {1, 1, 1}, {2, 1, 1}}]
{{2 + Sqrt[3], -1, 2 - Sqrt[3]}, {{1, -1 + Sqrt[3], 1}, {-1, 0, 1}, {1, -1 - Sqrt[3], 1}}}
DSolve[
{x1'[t] == x1[t] + x2[t] + 2 x3[t], x2'[t] == x1[t] + x2[t] + x3[t], x3'[t] == 2 x1[t] + x2[t] + x3[t],
x1[0] == 1, x2[0] == 0, x3[0] == 0}, {x1[t], x2[t], x3[t]}, t] // Simplify
{{x1[t] -> 1/12 e^-t (6 - (-3 + Sqrt[3]) e^(-3 + Sqrt[3]) t + (3 + Sqrt[3]) e^(3 + Sqrt[3]) t),
x2[t] -> e^(-2 + Sqrt[3]) t (-1 + e^(2 Sqrt[3] t)) / (2 Sqrt[3]), x3[t] -> 1/12 e^-t (-6 - (-3 + Sqrt[3]) e^(-3 + Sqrt[3]) t + (3 + Sqrt[3]) e^(3 + Sqrt[3]) t)}}

```

FIG. 24 –

La commande *Mathematica* `Eigensystem` renvoie la liste des valeurs propres suivie de la liste des vecteurs propres associés (figure(24), page(55)).

La matrice P est une **matrice normale** si

$$P^T P = P P^T.$$

Ainsi, les matrices symétriques et les matrices orthogonales ($P^T = P^{-1}$) sont-elles normales.

Lemme 3 *Lorsque P est normale, elle admet n vecteurs propres orthonormaux $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$.*

Puisque P est réelle, ses valeurs propres complexes, s'il s'en trouve, se présenteront par paires conjuguées, les vecteurs propres associés étant aussi conjugués.

Lemme 4 *Lorsque P est normale, il existe une matrice unitaire U (telle que $U^{-1} = \bar{U}^T$) et une matrice diagonale D telles que*

$$P = U D U^{-1}.$$

Les colonnes de U sont les vecteurs propres orthonormalisés de P et les entrées de D sont les valeurs propres correspondantes.

Si P admet $k < n$ vecteurs propres $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ linéairement indépendants, on peut encore obtenir n solutions linéairement indépendantes en utilisant la forme canonique de Jordan pour P .

Lemme 5 (Jordan) Soient $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ des vecteurs propres linéairement indépendants de \mathbf{P} , r_1, r_2, \dots, r_k les valeurs propres correspondantes. Alors il existe une base

$$\begin{aligned} \{\mathbf{v}_0(1) = \xi_1, \mathbf{v}_1(1), \mathbf{v}_2(1), \dots, \mathbf{v}_{m_1-1}(1), \\ \mathbf{v}_0(2) = \xi_2, \mathbf{v}_1(2), \mathbf{v}_2(2), \dots, \mathbf{v}_{m_2-1}(2), \\ \dots, \\ \mathbf{v}_0(k) = \xi_k, \mathbf{v}_1(k), \mathbf{v}_2(k), \dots, \mathbf{v}_{m_k-1}(k)\} \end{aligned}$$

de \mathbf{R}^n telle que pour $1 \leq q \leq k$ et $1 \leq j \leq m_q - 1$,

$$(\mathbf{P} - r_q \mathbf{I})\mathbf{v}_j(q) = \mathbf{v}_{j-1}(q).$$

Relativement à cette base, la matrice de la transformation linéaire associée à \mathbf{P} est de la forme

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{J}_2 & \cdots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{J}_k \end{pmatrix}.$$

avec

$$\mathbf{J}_q = \begin{pmatrix} r_q & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_q & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & r_q \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, il existe une matrice \mathbf{U} telle que

$$\mathbf{P} = \mathbf{U}\mathbf{J}\mathbf{U}^{-1}.$$

Remarque.

Dans le résultat précédent, $k \leq n$, $1 \leq m_q$ et $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$.

En posant

$$\mathbf{y} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{x},$$

l'équation

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P} \mathbf{x}$$

est équivalente à l'équation

$$\mathbf{y}' = \mathbf{J} \mathbf{y}.$$

Cette dernière est facilement résolue puisqu'elle s'écrit :

$$\begin{aligned} y'_n &= r_k y_n \\ y'_{n-1} &= r_k y_{n-1} + y_n \\ &\vdots \\ y'_1 &= r_1 y_1 + y_2. \end{aligned}$$

La commande *Mathematica* `JordanDecomposition` retourne la matrice U et la matrice J (figure (25), page (57)).

`Map[MatrixForm, JordanDecomposition[{{1, 2, 3}, {0, 1, 6}, {0, 0, -9.}}]] // Chop`

$$\left\{ \begin{pmatrix} -0.152542 & -1. & 0 \\ -0.508475 & 0 & -0.5 \\ 0.847458 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9. & 0 & 0 \\ 0 & 1. & 1 \\ 0 & 0 & 1. \end{pmatrix} \right\}$$

FIG. 25 –

3.5 Systèmes linéaires quelconques

Si $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ sont n solutions linéairement indépendantes du système

$$\mathbf{x}' = P(t) \mathbf{x},$$

la matrice $\Psi(t)$ admettant ces vecteurs pour colonnes s'appelle matrice fondamentale et la solution générale du système peut s'écrire

$$\mathbf{x} = \Psi(t) \mathbf{c},$$

la solution du problème

$$\mathbf{x}' = P(t) \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,$$

quant à elle, s'écrivant

$$\mathbf{x} = \Psi(t) \Psi^{-1}(t_0) \mathbf{x}_0.$$

Si les solutions sont telles que

$$\mathbf{x}_j(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

(la $j^{\text{ième}}$ entrée égale à 1), on aura $\Psi(t_0) = \mathbf{I}$ et la solution sera

$$\mathbf{x} = \Psi(t) \mathbf{x}_0.$$

Pour résoudre l'équation inhomogène,

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t) \mathbf{x} + \mathbf{g}(t),$$

deux méthodes (au moins) sont disponibles.

- Si \mathbf{P} est constante, la solution est formellement la même que pour une équation unique

$$\mathbf{x} = e^{t\mathbf{P}} \left(\int e^{-t\mathbf{P}} \mathbf{g}(t) dt + \mathbf{c} \right).$$

Lorsque \mathbf{P} est constante et diagonalisable, $\mathbf{P} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^{-1}$, la transformation

$$\mathbf{y} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{x}, \quad \mathbf{h} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{g}$$

convertit en fait le problème en celui-ci

$$\mathbf{y}' = \mathbf{D} \mathbf{y} + \mathbf{h}(t)$$

qui est facilement résoluble : n équations linéaires découplées.

- Dans le cas général, on peut employer la méthode de la variation des paramètres et chercher une solution particulière \mathbf{X} sous la forme

$$\mathbf{X} = \Psi(t) \mathbf{c}(t)$$

avec

$$\mathbf{c}'(t) = \Psi^{-1}(t) \mathbf{g}(t)$$

(comparer avec les relations (8) et (9)). Puisque $\Psi'(t) = \mathbf{P}(t)\Psi(t)$, on a bien

$$\mathbf{X}' = \Psi'(t) \mathbf{c}(t) + \Psi(t) \mathbf{c}'(t) = \mathbf{P}(t)\Psi(t) \mathbf{c}(t) + \mathbf{g}(t) = \mathbf{P}(t) \mathbf{X} + \mathbf{g}(t).$$

Finalement, la solution générale de l'équation inhomogène est

$$\mathbf{x} = \Psi(t) \mathbf{c} + \mathbf{X}.$$