# MAT 1958 - MATHÉMATIQUES POUR CHIMISTES

Examen final

Le 15 décembre 2008, de 13h00 à 16h00.

Chaque question vaut 12 points. Ni documentation ni calculatrice permise.

1. On considère le champ de température
$$T(x,y,z) = T_0 + x^2 + 3y^2 + 3z^2.$$
**a)** Calculer $T$ au point $(1,1,1)$.
**b)** Calculer son gradient $\nabla T$ au point $(x,y,z)$.
**c)** Déterminer au point $(1,1,1)$ la direction dans laquelle le champ $T$ varie le plus rapidement.

2. On considère l'équation différentielle
$$\frac{dx}{dt} + x = 2$$
avec la condition initiale que $x(0) = 1$.
**a)** Vérifier que la fonction constante $x = 2$ est une solution.
**b)** Trouver la solution générale de l'équation différentielle.
**c)** Trouver la solution qui satisfait la condition initiale.

3. On considère la fonction
$$f(x) = \begin{cases} -a, & \text{si} \quad -\pi < x < 0 \\ a, & \text{si} \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$
**a)** Vérifier que $f$ est une fonction impaire.

**b)** Calculer les nombres

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

**c)** Écrire la fonction $f$ comme la somme d'une série de Fourier.

4. On considère la matrice carrée

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

**a)** Calculer son déterminant $|\mathsf{A}|$.

**b)** Calculer ses valeurs propres $\lambda_1$ et $\lambda_2$.

**c)** Déterminer deux vecteurs propres $\mathbf{x}_1$ et $\mathbf{x}_2$ associés à ces valeurs propres.

5. On considère une urne contenant 10 boules, 6 rouges et 4 noires.

**a)** Si on en tire une boule au hasard, quelle est la probabilité qu'elle soit rouge ?

**b)** On effectue trois tirages de cette urne, remettant à chaque fois la boule tirée dans l'urne après en avoir observée la couleur. Soit $X$ le nombre de boules rouges observées. Quelle est la probabilité que $X = 2$ ?

**c)** Quelle est l'espérance mathématique de $X$ ?

André Giroux