MAT 2115 - ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Examen final

Le 20 avril 2009, de 12h30 à 15h30.

Aucune documentation ni calculatrice. Chaque question vaut 15 points.

1. On considère l'équation différentielle

$$y'' + y(y')^3 = 0.$$

a) Écrire cette équation sous la forme d'un système

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$$

et déterminer les points $(t_0, \mathbf{x}_0)$ où le théorème de Picard s'applique.

b) Résoudre sous la condition

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Résoudre sous la condition

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. On considère l'équation différentielle

$$y'' + xy' + 2y = 0$$

au voisinage du point $x_0 = 0$.

a) Obtenir la relation de récurrence pour les coefficients d'une solution de la forme

$$y = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k.$$

b) Déterminer une borne inférieure pour le rayon de convergence de cette solution.

c) Obtenir sa solution générale.

3. On considère l'équation différentielle

$$x^2y'' + xy' + (x-2)y = 0$$

au voisinage du point $x_0 = 0$.

a) Montrer que ce point est un point singulier régulier pour l'équation.

b) Obtenir l'équation indicielle et la relation de récurrence pour les coefficients d'une solution de la forme

$$y = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{k+r}.$$

c) Obtenir sa solution générale.

4. On considère le système linéaire

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathsf{P}\mathbf{x}$$

où

$$\mathsf{P} = \begin{pmatrix} -1 & \alpha \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Décrire le comportement de ses solutions en fonction des valeurs du paramètre α.

b) Résoudre le système lorsque $\alpha = -1$ sous la condition initiale

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

c) Ce système correspond-il à une équation linéaire autonome d'ordre deux ? Si oui, quelle est-elle ? Expliquer.

André Giroux