TP-2

mardi 24 janvier 2017 de 10h30 à 12h30

local Z-260, pavillon Claire-McNicoll

Exercice 1 ([1], exercice 8, p. 41]). *Tout point d'un ensemble fermé $E \subset \mathbb{R}^2$ est-il point d'accumulation de E ? Reprendre le problème en supposant E ouvert.* □

Exercice 2 ([1], exercice 9, p. 21]). *Soit (E, d) un espace métrique et E un sous-ensemble de X. Montrer que*

(a) $\complement \operatorname{int} E = \overline{\complement E}$.

(b) *Est-ce que E et* $\operatorname{int} E$ *ont le même intérieur ?*

(c) *Est-ce que E et* $\operatorname{int} E$ *ont la même adhérence ?* □

Exercice 3 ([1], exercice 10, p. 41]). *Si X est un ensemble infini, on pose pour tout $x, y \in X$*

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \neq y \\ 0, & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Montrer que d est une métrique sur X. Quels en sont les ouverts ? les fermés ? les compacts ? □

Exercice 4 ([1], exercice 14 p. 42). *Donner un exemple d'un recouvrement ouvert de l'intervalle $]0, 1[$ dont on ne peut extraire de sous-recouvrement fini.* □

Exercice 5. (i) *Montrer que la fonction*

$$(x,y) \mapsto d(x,y) \overset{\text{déf}}{=} \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right| : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \overset{\text{déf}}{=} \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$$

est une métrique sur $\mathbb{R}$.

(ii) *Montrer que $(\mathbb{R}, d)$ est borné.*

(iii) *Montrer que la suite $\{-n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(\mathbb{R}, d)$.*

(iv) *Montrer que $(\mathbb{R}, d)$ n'est pas complet.*

(v) *À quoi peut-on identifier le* complété *de $(\mathbb{R}, d)$ (sans nécessairement en donner une démonstration).*

□

Exercice 6 ([1], exercice 20 p. 75). *Soit $\{x_n\}$ une suite de Cauchy d'une espace métrique (X, d) ayant une valeur d'adhérence $x \in X$. Montrer que $x_n \to x$.* □

Exercice 7. *On considère l'ensemble à deux éléments* $\{0,1\}$ *dans* $\mathbb{R}$ *équipé d'une métrique arbitraire* d *(il en existe au moins une :* $d(x,y) = |x-y|$*).*

(i) *Énumérer tous les ouverts de* $(\{0,1\}, d)$*. Justifier.*

(ii) *Énumérer tous les compacts de* $(\{0,1\}, d)$*. Justifier.*

(iii) *Est-ce que* $(\{0,1\}, d)$ *est complet ? Justifier.*

(iv) *Énumérer tous les fermés de* $X = \{0,1,2\}$ *pour une métrique arbitraire* d_X *sur* X*. Justifier.*

□

Exercice 8 ([1], exercice 22 p. 42])**.** *On dit qu'un espace métrique est* séparable *s'il contient un sous-espace dénombrable et dense. Montrer que* $\mathbb{R}^k$ *est séparable.* □

Exercice 9 ([1], exercice 23 p. 42])**.** *On dit qu'une famille d'ouverts* $\{O_\alpha\}$ *est une* base *de* X *si tout ouvert de* X *est la réunion d'ouverts de cette famille. Montrer qu'un espace métrique séparable posssède une base dénombrable.* □

SI LE TEMPS LE PERMET

Exercice 10 ([1], exercice 21 p. 75)**.** *Soient* (X,d) *un espace métrique complet et* $\{E_n\}$ *une suite décroissante de fermés bornés non-vides tel que*

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(E_n) = 0.$$

Montrer que $\cap_{n=1}^{\infty} E_n$ *est un singleton.* □

Exercice 11 ([1], exercice 24 p. 42])**.** *Soit un espace métrique* (X,d) *dans lequel tout sous-ensemble infini possède au moins un point d'accumulation. Démontrer que* X *est séparable.* Indication *: Soit* $r > 0$ *et* $x_1 \in X$*; ayant déterminé* $x_1 \ldots, x_j \in X$*, choisir, s'il existe, un point* x_{j+1} *tel que* $d(x_j, x_{j+1}) \geq r$ *pour tout* $i = 1, \ldots, j$*. Montrer que cette construction s'arrête au bout d'un nombre fini de boules ouvertes de rayon* r*. Prendre* $r = 1/n$ *(*$n = 1, 2, 3, \ldots$*) et considérer les centres des boules correspondantes.* □

Exercice 12 ([1], exercice 25 p. 42])**.** *Démontrer que tout espace métrique compact* K *a une base dénombrable et qu'il est donc séparable.* Indication *: pour tout entier* $n > 0$*, il existe un nombre fini de boules ouvertes de rayon* $1/n$ *recouvrant* K*.* □

Références

[1] W. Rudin, *Principes d'analyse mathématique*, Édiscience, Paris 1995 et Dunod, Paris 2006 [traduction de l'anglais, *Principles of mathematical analysis*, McGraw–Hill, New York, 1958, 1964, 1976.