1. Théorie de la représentation pour les groupes avec une moyenne

1.1. **Algèbres de fonctions avec une moyenne.** Si on étudie un espace topologique on s'intéresse surtout pour les fonctions continues. Si on étudie une variété algébrique on s'intéresse surtout pour les fonctions régulières. De même si on étudie un groupe topologique et ses actions sur des espaces topologiques, les représentations qui apparaissent naturellement sont des représentations continues. Si on étudie un groupe algébrique et ses actions sur des variétés algébriques, les représentations qui apparaissent naturellement sont des représentations algébriques.

Un groupe topologique est un groupe qui a aussi la structure d'espace topologique telle que la multiplication $\mu: G \times G \longrightarrow G: (x, y) \mapsto xy$ et l'inverse $\iota: G \longrightarrow G: x \mapsto x^{-1}$ sont des applications continues. Un groupe algébrique G est un groupe qui est aussi une variété algébrique telle que μ et ι sont des morphismes de variétés. Si $\rho: G \longrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ est une représentation, chaque coefficient matricielle $\rho_{ij}: G \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction: on exige que cette fonction soit continue (ou régulière).

Si le groupe topologique est même compact, on peut intégrer chaque fonction continue sur le groupe. La conséquence est qu'on a un théorème de Maschke pour les représentations continues de dimension finie. Si le groupe algébrique est réductif, on peut intégrer algébriquement chaque fonction régulière sur le groupe. Comme conséquence on aura aussi un théorème de Maschke pour les représentations algébriques de dimension finies. Si le groupe n'est pas compact (ou réductif), la théorie des représentations continues (algébriques) n'est pas aussi bien comprise.

On peut formaliser les deux cas, et le cas des représentations complexes des groupes finis et donner une preuve uniforme des théorèmes de Maschke qui est très proche de la preuve pour les groupes finis où $|G| \in k^{\times}$: on utilise le processus de la moyenne. On trouve aussi des analogues des théorèmes de Schur et de Wedderburn et il existe une théorie de caractères. On n'aura pas besoin de beaucoup de hypthèses pour montrer des résultats intéressants. Seulement l'existence d'une moyenne.

Comme souvent dans l'algèbre on extrait des exemples précédents les outils fondamentaux et on les remplace par des axiomes! Puis on déduit des conséquences à partir de ces hypothèses.

Les théories des représentation des groupes compactes et des représentations algébriques des groupes réductifs sont trs semblables à la théorie des représentations complexes des groupese finies. Mais chacune théorie a ses aspects spéciaux aussi, bien sûr.

1.2. **Axiomes.** Soit G un groupe et $\mathbb{C}[G]$ une algèbre de fonctions complexes sur G. La somme et le produit de deux fonctions sont définis comme d'habitude par

$$(c_1 f_1 + c_2 f_2)(x) := c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x); \ (f_1 f_2)(x) := f_1(x) f_2(x),$$

pour $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, $f_1, f_2 \in \mathbb{C}[G]$.

Nous supposerons que les trois axiomes suivants sont satisfaits.

(i) Les fonctions constantes complexes sont dans $\mathbb{C}[G]$.

(ii) Pour chaque fonction $f: G \longrightarrow \mathbb{C}$ dans l'algèbre $\mathbb{C}[G]$ et pour chaque $g \in G$ aussi les fonctions

$$g \cdot f : x \mapsto f(g^{-1}x) \text{ et } \ x \mapsto f(x^{-1})$$

sont dans $\mathbb{C}[G]$.

(iii) Il existe une *moyenne* invariante à gauche, i.e., une application $\mathbb{C}$-linéaire

$$I_G : \mathbb{C}[G] \longrightarrow \mathbb{C}$$

telle que $I_G(g \cdot f) = I_G(f)$ et $I_G(c) = c$ pour chaque fonction constante $c : G \longrightarrow \mathbb{C} : g \mapsto c$.

On écrit aussi suggestivement

$$I_G(f) =: \int_G f(x)dx.$$

Mais en général I_G n'est pas une "vraie" intégration. Alors on réécrit les propriétés :

$$\int_G (a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x))dx = a_1 \int_G f_1(x)dx + a_2 \int_G f_2(x)dx;$$

$$\int_G f(gx)dx = \int_G f(x)dx;$$

$$\int_G dx = 1,$$

où $a_1, a_2 \in k,\ f, f_1, f_2 \in \mathbb{C}[G],\ g \in G$.

Exemples 1.1. Nous donnons quelques exemples où les axiomes sont satisfaits. Si G est fini on peut prendre pour $\mathbb{C}[G]$ l'algèbre de toutes les fonctions $f :\ G \longrightarrow \mathbb{C}$ avec la moyenne

$$I_G(f) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot f.$$

Un exemple d'un groupe compacte. Soit $G = S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ le groupe du cercle. Pour $\mathbb{C}[G]$ on prend les fonctions complexes continues sur S^1. On peut identifier ces fonctions avec les fonctions complexes continues 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$, par exemple $t \mapsto \cos nt\pi + i \sin mt\pi$. Pour la moyenne on prend la vraie intégrale

$$I_G(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)dx.$$

Soit K un groupe continu compact comme $\mathrm{S}\mathbf{U}(n)$ ou $\mathrm{SO}(n)$. On montre qu'il existe une mesure de Haar sur K, alors une mesure invariante par translations à gauche. Cela implique l'existence d'une intégrale $\int_G f(x)dx$ pour les fonctions continues sur K.

Un exemple d'un groupe algébrique réductif. Soit $G = \mathbb{C}^\times$ et $\mathbb{C}[G] = \mathbb{C}[z, z^{-1}]$, l'algèbre des polynômes de Laurent. Ici z est la fonction régulière

$$z :\ G \longrightarrow \mathbb{C} :\ z(g) = g.$$

Chaque élément de $\mathbb{C}[G]$ s'écrit uniquement comme $f = \sum_{i=-N}^{M} a_i z^i$. On définit alors

$$I_G(f) := a_0$$

pour la moyenne de f. Si $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ on prend pour $\mathbb{C}[G]$ l'algèbre des fonctions $g \mapsto F(g)/\det(g)^i$, où F est une fonction polynomiale. Alors il existe aussi une moyenne I_G, mais ce n'est pas facile a donner une formule. Plus généralement si G est un groupe algébrique linéaire complexe réductif, et $\mathbb{C}[G]$ est l'algèbre des fonctions algébriques sur G, alors il existe une moyenne invariante à gauche.

1.3. **Modules admissibles et fonctions représentatives.** On va principalement étudier les représentations de dimension finie, où chaque fonction coefficient matriciel est une fonction dans G. Pour être capable d'inclure la représentation régulière it faut aussi admettre les représentations de dimension infinies qui sont localement admissible.

Plus précisement, on dit qu'une représentation de dimension *finie* $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ est *admissible* pour $\mathbb{C}[G]$ (ou est une $\mathbb{C}[G]$-représentation) si toutes les coefficients matricielles sont dans $\mathbb{C}[G]$, c'est à dire que pour chaque $v \in V$ et $\omega \in V^*$ la fonction

$$g \mapsto \omega(g \cdot v) = \omega(\rho(g)(v))$$

est une fonction dans $\mathbb{C}[G]$. Une représentation de dimension infinie est admissible si pour chaque $v \in V$ il existe un sous-module $W \subset V$ de dimension finie admissible qui contient v.

On va dire que $f \in \mathbb{C}[G]$ est une *fonction représentative* s'il existe un module admissible de dimension finie V, un vecteur $v \in V$ et une fonctionnelle $\omega \in V^*$ telle que

$$f(g) = \omega(g \cdot v),$$

pour chaque $g \in G$. Dans l'exercice suivant on montre que l'ensemble des fonctions représentatives $\mathbb{C}[G]^{\mathrm{rep}}$ est une sous-algèbre de $\mathbb{C}[G]$ qui aussi satisfait les trois axiomes.

Exercice 1.1. (i) Chaque sous-module ordinaire d'un module admissible est admissible, et chaque module quotient d'un module admissible est admissible.

(ii) Supposons V_1 et V_2 sont admissible, alors $V_1 \oplus V_2$ et $V_1 \otimes V_2$ sont aussi admissible. Si V est admissible de dimension finie, alors V^* et $\mathrm{Hom}(V, V_1)$ sont admissibles.

(iii) L'ensemble des fonctions représentatives $\mathbb{C}[G]^{\mathrm{rep}}$ est une sous-algèbre de $\mathbb{C}[G]$ qui aussi satisfait aux trois axiomes.

Dans l'étude des G-modules admissibles on rencontre seulement des fonctions représentatives.

Proposition 1.1. *Une représentation* (ρ, V) *est* $\mathbb{C}[G]$*-admissible si et seulement si elle est* $\mathbb{C}[G]^{\mathrm{rep}}$*-admissible.*

Exemple 1.2. On considère le groupe du cercle $G = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et l'algèbre des fonctions continues. Les représentations simples continues sont toutes de degré un, parce que S^1 est abélien :

$$z^n : \ G \longrightarrow \mathbb{C}^\times : \ t + 2\pi\mathbb{Z} \mapsto e^{int},$$

où $n \in \mathbb{Z}$. Chaque fonction représentative est une combinaison linéaire des z^i, donc un polynôme en z et z^{-1}. Alors

$$\mathbb{C}[G]^{\mathrm{rep}} = \mathbb{C}[z, z^{-1}].$$

L'anneau de polynômes de Laurent est plus facile à comprendre algébriquement que l'anneau des fonctions continues. Le processus de remplacer $\mathbb{C}[G]$ par $\mathbb{C}[G]^{\mathrm{rep}}$ est une processus de algebraisation, mais l'algèbre $\mathbb{C}[G]^{\mathrm{rep}}$ est dense dans $\mathbb{C}[G]$. Pour chaque groupe de Lie compact, l'algèbre $\mathbb{C}[G]^{\mathrm{rep}}$ est isomorphe à l'algèbre de fonctions régulière sur un groupe algébrique réductif $G_{\mathbb{C}}$ (la complexification de G) et est dense dans $\mathbb{C}[G]$ (le théorème de Peter-Weyl, un théorème de l'analyse). Par exemple, $S^1_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^\times$.

Pour un groupe algébrique réductif, rien ne change $\mathbb{C}[G]$ est égale à $\mathbb{C}[G]^{\mathrm{rep}}$.

1.4. **Maschke.** Un bon nombre de théorèmes pour les représentations complexes des groupes finis restent vrais pour les représentations admissibles, avec des preuves semblables. Par exemple, les théorèmes de Maschke et de Schur.

Théorème 1.1. *Soit W un sous-module d'un module admissible V. Alors il existe un sous-module complémentaire W' tel que $V = W \oplus W'$.*

Preuve. (i) On commence par le cas où les dimensions sont finies. Dans ce cas $\mathrm{Hom}(V,V)$ est admissible par exercice 1.1. Pour $v \in V$ et $\omega \in V^*$, l'application $p \mapsto \omega(p(v))$ est une fonctionnelle sur $\mathrm{Hom}(V,V)$. Donc

$$x \mapsto \omega(x \cdot p(x^{-1} \cdot v))$$

est une fonction représentative (ou admissible) sur G. Choisissons une projection $p : V \longrightarrow V$ sur W, on va modifier p et obtenir une G-projection. Pour faire ça on fixe une base $e_1, \ldots, e_n$ de V avec la base duale $e_1^*, \ldots, e_n^*$. Fixons $v \in V$. On définit p_G par

$$p_G(v) := \sum_{i=1}^{n} \left(\int_G e_i^*(x \cdot p(x^{-1} \cdot v))\ dx \right)\ e_i.$$

Pour montrer que p_G est un G-morphisme, on va utiliser que si $g \cdot e_j = \sum_i [g]_{ij} e_i$, alors $g^{-1} \cdot e_j^* = \sum [g]_{ji} e_i^*$.

$$\begin{aligned}
p_G(g \cdot v) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\int_G e_i^*(xp(x^{-1}gv))\ dx \right)\ e_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\int_G e_i^*(gxp((gx)^{-1}gv))\ dx \right)\ e_i \quad \text{(par une propriété de } \textstyle\int_G dx) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left(\int_G e_i^*(gxp(x^{-1}v))\ dx \right)\ e_i \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left(\int_G (g^{-1} \cdot e_i^*)(xp(x^{-1}v))\ dx \right)\ e_i \quad \text{(par la définition de l'action sur } V^*) \\
&= \sum_{i,s=1}^{m} \left(\int_G ([g]_{is} e_s^*)(xp(x^{-1}v))\ dx \right)\ e_i \\
&= \sum_{i,s=1}^{m} \left(\int_G e_s^*(xp(x^{-1}v))\ dx \right)\ [g]_{is} e_i \\
&= \sum_{s=1}^{m} \left(\int_G e_s^*(xp(x^{-1}v))\ dx \right)\ g \cdot e_s \\
&= g \cdot p_G(v).
\end{aligned}$$

Et p_G reste une projection, parce que si $w \in W$ on aura

$$p_G(w) = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_G e_i^*(x \cdot p(x^{-1} \cdot w)) dx \right) e_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_G e_i^*(w) dx \right) e_i = w.$$

Et dans l'exercice suivant on montre que $p_G(v) \in W$ pour chaque $v \in V$.

Exercice 1.2. (a) Montrer que la définition de p_G ne dépend pas du choix de base.
(b) Montrer que $p_G(v) \in W$ pour chaque $v \in V$.

(ii) On considère maintenant le cas général. Par le lemme de Zorn il existe une projection $p : V \longrightarrow V$ sur W. On va modifier p et obtenir une G-projection p_G.

Fixons $v \in V$, alors il existe un sous-module admissible de dimension finie V_1 qui contient v. La restriction p_1 de p à V_1 est une projection sur $V_1 \cap W$. Dans (i) on a modifié p_1 à une G-projection $p_{1,G}$ de V_1 sur $V_1 \cap W$. On définit maintenant $p_G(v) := p_{1,G}(v)$. Il faut montrer encore que la définition ne dépend pas du choix de V_1.

Supposons que V_2 est un autre module admissible de dimension finie qui contient v. Alors $V_3 = V_1 \cap V_2$ est un troisième module admissible qui contient v. Prenons une base $e_1, \ldots, e_n$ de V_1, telle que $e_1, \ldots, e_m$ est une base de V_3. Alors pour chaque $x \in G$ on a $x \cdot p(x^{-1} \cdot v) \in V_3 \cap W$, donc pour chaque $m < i \leq n$ on a que $e_i^*(x \cdot p(x^{-1} \cdot v)) = 0$. Alors

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\int_G e_i^*(x \cdot p_1(x^{-1} \cdot v)) \; dx \right) \; e_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\int_G e_i^*(x \cdot p_1(x^{-1} \cdot v)) \; dx \right) \; e_i.$$

Donc la définition de p_G est la même si on utilise V_3 à la place de V_1. Donc p_G est bien-définie et est une G-projection. □

On obtient par une induction sur la dimension un théorème de Maschke.

Corollaire 1.1. *Chaque G-module admissible de dimension finie est la somme directe de G-modules admissibles simples. Plus généralement, si la dimension d'un module admissible est au plus dénombrable, alors le module est la somme directe de G-modules simples.*

Preuve. Supposons $v_1, v_2, \ldots$ est une base, alors il existe des sous-modules de dimension finie $V_1 \subset V_2 \subset \ldots$, tels que $v_i \in V_i$, et donc $V = \sum_{i=1}^{\infty} V_i$. Par le résultat avant il existe des sous-modules W_i tels que $V_i = \oplus_{j \leq i} W_i$. Il suit que $V = \oplus_{i=1}^{\infty} W_i$. □

Exemple 1.3. Dans certains cas il y a une preuve alternative pour le théorème de Maschke. Soit $\overline{z}$ le conjugué complexe de z. Définissons pour $f \in \mathbb{C}[G]$ la fonction $\overline{f} : G \longrightarrow \mathbb{C} : g \mapsto \overline{f(g)}$. En général $\overline{f}$ ne reste pas dans $\mathbb{C}[G]$. Supposons c'est le cas pour $\mathbb{C}[G]$. Puis, supposons pour $f \in \mathbb{C}[G]$ que si $f(g) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ pour chaque $g \in G$, alors aussi $\int_G f(g)dg \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, et dans ce cas $\int_G f(g)dg = 0$ si et seulement si $f(g) = 0$ pour chaque $g \in G$.

Ces hypothèses sont satisfaites si G est un groupe compact et $\mathbb{C}[G]$ est l'algèbre des fonctions continues sur G.

Soit V un G-module continu de dimension finie. Fixons un produit scalaire complexe $(,)$ sur V, et $e_1, \ldots, e_n$ une base orthonormale. Soit $v = \sum_i v_i e_i$ et $w = \sum_i w_i e_i$, alors on peut écrire la fonction $g \mapsto (g \cdot v, g \cdot w)$ comme

$$g \mapsto \sum_{i,j,r} v_i \overline{w_j} \rho_{ri}(g) \overline{\rho_{rj}(g)},$$

c'est donc dans $\mathbb{C}[G]$. On définit maintenant

$$(v,w)_G := \int_G (g\cdot v, g\cdot w)\ dg.$$

On vérifie directement en utilisant les propriétés de $\int_G dg$, que $(,)_G$ est un produit scalaire (hermitien) sur V ayant la propriété $(g\cdot v, g\cdot w)_G = (v,w)_G$.

Si $W \subset V$ est un sous-module, alors $W^\perp = \{v \in V; \forall w \in W:\ (v,w)_G = 0\}$ est un G-complément de W.

1.5. **Schur.** L'analogue du théorème de Schur est facile.

Théorème 1.2. *Soient V et W deux G-modules admissibles simples, donc automatiquement de dimension finies.*

(i) Si V et W ne sont pas isomorphes, alors $\mathrm{Hom}_G(V,W) = 0$.

(ii) $\mathrm{Hom}_G(V,V) = \mathbb{C}\cdot \mathbf{1}_V$*, l'ensemble des morphismes scalaires.*

Preuve. La preuve pour les groupes finis reste valable ici. □

Soit Λ l'ensemble des classes d'isomorphisme de G-modules simples admissibles. Pour chaque $\lambda \in \Lambda$ fixons un G-module simple admissible V_λ avec une base de V_λ.

Corollaire 1.2. *Soient $\lambda, \mu \in \Lambda$, $\lambda \neq \mu$.*

(i) Pour chaque r,s,i,j on a

$$\int_G \rho_{\mu,rs}(x)\rho_{\lambda,ij}(x^{-1}y)\ dx\ = 0.$$

(ii) Pour chaque i,j,k,l on a

$$\int_G \rho_{\lambda,ij}(x)\rho_{\lambda,kl}(x^{-1}y)\ dx\ = \frac{\delta_{jk}}{\dim V_\lambda}\ \rho_{\lambda,il}.$$

Preuve. Soit $e_1,\dots,e_n$ la base fixée de V_λ et $f_1,\dots,f_m$ la base de V_μ.

(i) Considérons l'application linéaire $\phi : V_\mu \longrightarrow V_\lambda : v \mapsto e_i^*(v) f_s$. Alors

$$p(\phi) : v \mapsto \sum_r \int_G e_i^*(x^{-1}v) f_r^*(x\cdot f_s) dx\ f_r$$

est un G-morphisme, donc par Schur's lemma 0, parce que V_λ et V_μ ne sont pas isomorphes. En particulier, en prenant $v = ge_j$ on obtient

$$\int_G \rho_{\mu,rs}(x)\rho_{\lambda,ij}(x^{-1}g) dx = 0.$$

(ii) Considérons l'application linéaire $\phi : V_\lambda \longrightarrow V_\lambda : v \mapsto e_r^*(v)e_j$ de trace $\mathrm{tr}\phi = \delta_{jr}$. Le G-morphisme $p(\phi)$ défini comme en (i) est un morphisme scalaire, par le lemme de Schur. Plus précisement $p(\phi) = \frac{\delta_{jr}}{n}\mathbf{1}_{V_\lambda}$, où n est la dimension de V_λ, parce que $\mathrm{tr}\phi = \mathrm{tr} p(\phi)$ par le lemme suivant. En particulier

$$e_i^*(p(\phi)(g\cdot e_s)) = \frac{\delta_{jr}}{n} e_i^*(g\cdot e_s) = \frac{\delta_{jr}}{n}\rho_{\lambda,is}(g).$$

On a

$$p(\phi) : v \longrightarrow \sum_i \int_G e_r^*(x^{-1}\cdot v) e_i^*(x\cdot e_j)\ dx\ e_i,$$

donc on obtient une autre expression

$$e_i^*(p(\phi)(g \cdot e_s)) = \int_G \rho_{\lambda,ij}(x)\rho_{\lambda,rs}(x^{-1}g)\ dx.$$

En comparant on obtient

$$\int_G \rho_{\lambda,ij}(x)\rho_{\lambda,rs}(x^{-1}g)\ dx = \frac{\delta_{jr}}{n}\rho_{\lambda,is}(g).$$

$\square$

Corollaire 1.3. *Les fonctions représentatives $\rho_{\lambda,ij}$, $\lambda \in \Lambda$ forme une base pour $\mathbb{C}[G]^{\mathrm{rep}}$.*

Alors chaque fonction représentative s'écrit uniquement comme une combinaison linéaire finie des $\rho_{\lambda,ij}$.

Preuve. (i) Soit $f:\ g \mapsto \omega(g \cdot v)$ une fonction représentative, où V est un G-module admissible de dimension finie, $v \in V$, $\omega \in V^*$. Par le théorème de Maschke, il y a une décomposition $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$, où chaque composante est admissible simple. De même $V^* = V_1^* \oplus \cdots \oplus V_s^*$ pour la représentation duale. Pour chaque i il y a un $\lambda_i \in \Lambda$ et un isomorphisme $\phi_i : V_{\lambda_i} \longrightarrow V_i$, et dualement $\phi_i^* : V_\lambda^* \longrightarrow V_i^*$. Si e_s est un des vecteurs de bases fixés dans V_{λ_i} et e_r^* un des vecteurs de base duale, alors

$$\rho_{\lambda_i,rs} = e_r^*(g \cdot e_s) = \phi_i^*(e_r^*)(g \cdot \phi_i(e_s)).$$

Les bases choisies dans les V_λ, et les isomorphismes ϕ_i induisent une base naturelle de V. Écrivant v sur cette base, et ω sur la base duale on voit que f est une combinaison linéaire des $\rho_{\lambda_i,rs}$.

(ii) Supposons $\sum_{\lambda,i,j} a_{\lambda,ij}\rho_{\lambda,ij} = 0$ est une relation linéaire. Fixons (μ, r, s). Alors aussi

$$0 = \int_G \sum_{\lambda,i,j} a_{\lambda,ij}\rho_{\lambda,ij}(x)\rho_{\mu,ss}(x^{-1}y)\ dx = \sum_i a_{\mu,is}\rho_{\mu,is}(y)$$

pour chaque $y \in G$, par le corollaire avant. Donc aussi

$$0 = \int_G \rho_{\mu,rr}(x)\sum_i a_{\mu,is}\rho_{\mu,is}(x^{-1}y)\ dx = a_{\mu,rs}\rho_{\mu,rs}(y)$$

pour chaque $y \in G$. Alors le coefficient $a_{\mu,rs} = 0$. Ainsi nous avons montré l'indépendence linéaire.

$\square$

Lemme 1.1. *Soit $\phi : V \longrightarrow V$ une application linéaire. Alors*

$$\mathrm{tr}\phi = \mathrm{tr}p(\phi),$$

où

$$p(\phi)(v) := \sum_i \left(\int_G e_i^*(x \cdot \phi(x^{-1} \cdot v))dx\right) e_i.$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}p(\phi) &= \sum_{i=1}^{n} \int_G e_i^*(x \cdot \phi(x^{-1} \cdot e_i))dx \\
&= \int_G \sum_i e_i^*(x \cdot \phi(x^{-1} e_i)dx \\
&= \int_G \mathrm{tr}(x\pi x^{-1})dx \\
&= \int_G \mathrm{tr}\phi dx \\
&= \mathrm{tr}\phi.
\end{aligned}$$

□

1.6. **Wedderburn.** Le théorème de Wedderburn pour les groupes finis est un théorème sur l'algèbre $\mathbb{C}G$ du groupe finie. Nous allons définir l'analogue en général. Pour nous ça sera une autre structure d'algèbre sur $\mathbb{C}[G]^{\mathrm{rep}}$.

La nouvelle multiplication est un produit de *convolution* $*$. Pour deux fonctions $f_1, f_2 \in \mathbb{C}[G]$ on définit une troisième fonction $f_1 * f_2 : G \longrightarrow \mathbb{C}$ par

$$(f_1 * f_2)(g) := \int_G f_1(x) f_2(x^{-1}g)dx.$$

Remarquez que $x \mapsto f_2(g^{-1}x) \mapsto f_2(x^{-1}g)$ et donc $x \mapsto f_1(x)f_2(x^{-1}g)$ sont des fonctions dans $\mathbb{C}[G]$. Ce n'est pas clair si $f_1 * f_2 \in \mathbb{C}[G]$ en général, mais c'est le cas où G est un groupe de Lie compact et $\mathbb{C}[G]$ l'algèbre de fonctions continues.

Le cor. 1.2 dit en termes de $*$:

Lemme 1.2. *Soient $\lambda, \mu \in \Lambda$, $\lambda \neq \mu$.*

(i)

$$\rho_{\mu,rs} * \rho_{\lambda,ij} = 0,$$

pour chaque i, j, r, s si $\lambda \neq \mu$.

(ii)

$$\rho_{\lambda,ij} * \rho_{\lambda,kl} = \frac{\delta_{jk}}{\dim V_\lambda} \rho_{\lambda,il}.$$

Comme un corollaire on obtient un analogue du théorème de Wedderburn.

Théorème 1.3. *(i) Soient $f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{C}[G]^{\mathrm{rep}}$. Alors*

$$f_1 * f_2 \in \mathbb{C}[G]^{\mathrm{rep}},$$

et l'associativité est vrai

$$(f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3).$$

Alors $\mathbb{C}[G]^{\mathrm{rep}}$ avec le produit $*$ est une algèbre, notée $\mathbb{C}G^{\mathrm{rep}*}$. L'algèbre $\mathbb{C}G^{\mathrm{rep}*}$ n'a pas nécessairement un élément neutre pour $*$.

(ii) Le sous-espace de $\mathbb{C}G^{\mathrm{rep}*}$ *engendré par les* $\rho_{\lambda,ij}$ *pour* $\lambda \in \Lambda$ *fixé est une sous-algèbre isomorphe à* $\mathrm{End}\, V_\lambda$.

(iii) L'algèbre $\mathbb{C}G^{\mathrm{rep}*}$ *est isomorphe à* $\oplus_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{End}\, V_\lambda$.

(iv) Une base pour le centre est donnée par les idempotents

$$e_\lambda := \dim V_\lambda \sum_i \rho_{\lambda,ii},$$

pour $\lambda \in \Lambda$.

Preuve. (i) Il suffit de montrer (i) pour les fonctions représentatives de base $\rho_{\lambda,ij}$. Par le lemme avant le $*$-produit de deux fonctions représentatives est à un scalaire près une fonction représentative, donc dans $\mathbb{C}[G]^{\mathrm{rep}}$. Les produits $\rho_{\lambda,ij} * (\rho_{\mu,kl} * \rho_{\nu,rs})$ et $(\rho_{\lambda,ij} * \rho_{\mu,kl}) * \rho_{\nu,rs})$ sont 0 par le lemme sauf si $\lambda = \mu = \nu$, $j = k$ et $l = r$ et dans ce cas le résultat est deux fois $(\dim V_\lambda)^2 \rho_{\lambda,is}$. Donc l'associativité est satisfait.

(ii) Une base pour $\mathrm{End}\, V_\lambda$ sont les applications linéaires $X_{ij} : v \mapsto e_j^*(v) e_i$, et on a les multiplications $X_{ij} \circ X_{rs} = \delta_{jr} X_{is}$. Par le lemme l'application linéaire $\mathrm{End}\, V_\lambda \longrightarrow \mathbb{C}G^{\mathrm{adm},*}$ définie par $X_{ij} \mapsto \dim V_\lambda \rho_{\lambda,ij}$ est un homomorphisme d'algèbres. Le noyau est un idéal, mais l'algèbre des matrices n'a pas d'idéaux non-triviaux. Donc l'application est injectif.

(iii) Suit de (ii), parce que $\rho_{\lambda,ij} * \rho_{\mu,rs} = 0$, si $\lambda \neq \mu$.

(iv) Suit de (ii) et (iii) parce que $\mathbf{1}_{V_\lambda}$ est envoyé sur e_λ par l'isomorphisme de (ii). □

1.7. **Évaluer 'intégral.** On peut donner maintenant "calculer" l'intégral dans les fonctions représentatives.

Proposition 1.2. *Soit* $f \in \mathbb{C}[G]^{\mathrm{rep}}$*, alors* $f = \sum_{\lambda,ij} a_{\lambda,ij} \rho_{\lambda,ij}$ *(une somme finie). Soit* $V_{\lambda_0} = \mathbb{C}$ *le* G*-module trivial avec un seul vecteur de base.*

(i) Alors

$$\int_G f(x)\ dx\ = a_{\lambda_0,11}.$$

En particulier, $\int_G \rho_{\lambda,ij}(x)\ dx\ = 0$ *si* $\lambda \neq \lambda_0$.

(ii) Alors

$$\int_G f(xg)\ dx = \int_G f(x)\ dx$$

(l'invariance à droite).

(iii) Alors

$$\int_G f(x^{-1})\ dx\ = \int_G f(x)\ dx\ .$$

Preuve. (i) $\rho_{\lambda_0,11}$ est la fonction 1, donc $\int_G \rho_{\lambda_0,11}(x) dx = 1$. Si $\lambda \neq \lambda_0$ alors

$$\int_G \rho_{\lambda,ij}(x) \rho_{\lambda_0,11}(x^{-1}y)\ dx = \int_G \rho_{\lambda,ij}(x)\ dx = 0,$$

par le lemme.

(ii) Il suffit de montrer pour les fonctions de base $\rho_{\lambda,ij}$. Pour λ_0 les deux côtés donnent 1. Si $\lambda \neq \lambda_0$ on a $\rho_{\lambda,ij}(xg) = \sum_r \rho_{\lambda,ir}(x) \rho_{\lambda,rj}(g)$, donc

$$\int_G \rho_{\lambda,ij}(xg)\ dx\ = \int_G \sum_r \rho_{\lambda,ir}(x) \rho_{\lambda,rj}(g)\ dx\ = \sum_r \rho_{\lambda,rj}(g) \int_G \sum_r \rho_{\lambda,ir}(x) dx = 0$$

$$= \int_G \rho_{\lambda,ij}(x)\ dx\ .$$

(iii) Fixons f et supposons $f(g) = \omega(g \cdot v)$, où $v \in V, \omega \in V^*$. Nous pouvons supposer que V est simple. Définissons $\mu \in V^{**}$ par $\mu(\phi) := \phi(v)$, pour $\phi \in V^*$, et $h : g \mapsto \mu(g \cdot \omega)$ la fonction représentative associée. Alors $f(g^{-1}) = \omega(g^{-1} \cdot v) = (g \cdot \omega)(v) = \mu(g \cdot \omega) = h(g)$. Donc $f(g^{-1})$ est une fonction représentative associé à V^*. Si V est simple non-trivial, alors V^* est aussi simple et non-trivial. Alors par (i) $\int_G f(g^{-1})\ dg\ = \int_G h(g)\ dg = 0$.

□

1.8. $\mathbb{C}[G]^{\text{rep}}$ **comme module admissible.** Fixons $\lambda \in \Lambda$, et soit $e_1, \dots, e_n$ une base de V_λ.

Lemme 1.3. *(i) Si $\phi : V_\lambda \longrightarrow \mathbb{C}[G]$ est un G-morphisme, alors*

$$\phi(e_i) : g \mapsto \sum_{j=1}^{n} \phi(e_j)(\mathbf{1}_G)\rho_{\lambda,ij}(g^{-1}).$$

(ii) Si $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{C}^n$, alors l'application linéaire $\phi : V_\lambda \longrightarrow \mathbb{C}[G]$ définie par

$$\phi(e_i) : g \mapsto \sum_{j=1}^{n} c_j \rho_{\lambda,ij}(g^{-1})$$

définit un G-morphisme.

Proposition 1.3. *La multiplicité de V_λ dans $\mathbb{C}[G]$ (ou dans $\mathbb{C}[G]^{\text{rep}}$) est la dimension de V_λ.*

Preuve. Soit $e_1, \dots, e_n$ une base de V_λ. Si $\phi :\ V_\lambda \longrightarrow \mathbb{C}[G]$ est un G-morphisme, alors

$$\phi(e_j)(g) = (g^{-1} \cdot \phi(e_j))(\mathbf{1}_G) = \phi(g^{-1} \cdot e_j)(\mathbf{1}_G) = \sum_i \rho_{\lambda,ij}(g^{-1})\phi(e_i)(\mathbf{1}_G).$$

Inversement, si $c_1, \dots, c_n$ sont des scalaires,

$$\phi(e_j)(g) := \sum_i \rho_{\lambda,ij}(g^{-1})c_i$$

défini une représentation $\phi :\ V_\lambda \longrightarrow \mathbb{C}[G]$. Donc la somme de sous-modules isomorphe à V_λ est égale à l'espace de base $\rho_{\lambda,ij}$ de dimension n^2. □

1.9. **Modules admissible sont $\mathbb{C}G^{\text{rep}*}$-modules.** Pour un groupe fini l'algèbre $\mathbb{C}G^{\text{rep}*}$ est isomorphe à l'algèbre de groupe, et un $\mathbb{C}[G]$-module est la même chose comme un module pour l'anneau $\mathbb{C}G$. Ça reste vrai en général. Si V est un G-module admissible de dimension finie, alors V devient un module pour l'algèbre $\mathbb{C}G^{\text{rep}*}$ par la formule

$$f * v := \int_G f(x)(x \cdot v)dx = \sum_i \left(\int_G f(x)e_i^*(x \cdot v)\ dx \right) e_i,$$

où $e_1, \dots, e_n$ est une base de V. Cela ne dépend pas du choix de base.

Lemme 1.4. *On a pour chaque $v \in V$ et $f_1, f_2 \in \mathbb{C}G^{\text{rep}*}$ l'identité :*

$$(f_1 * f_2) * v = f_1 * (f_2 * v).$$

Donc chaque module de dimension finie admissible est aussi un module pour l'anneau $\mathbb{C}G^{\text{rep}*}$.

Preuve. On a

$$\begin{aligned} f_1 * (f_2 * v) &= \int_G \int_G f_1(y) f_2(x)\ y \cdot (x \cdot v)\ dx\ dy \\ &= \int_G \int_G f_1(y) f_2(y^{-1}x)\ x \cdot v\ dx\ dy \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (f_1 * f_2) * v &= \int_G f_1(y) f_2(y^{-1}x)\ dy\ * v \\ &= \int_G \int_G f_1(y) f_2(y^{-1}x)\ x \cdot v\ dy\ dx \end{aligned}$$

Donc il faut vérifier s'il est permis de changer l'ordre de l'intégration. Pour i soit $f_{3,i} \in \mathbb{C}[G]^{\mathrm{rep}}$ la fonction définie par $f_{3,i}(x) = e_i^*(x^{-1} \cdot v)$. Alors

$$\begin{aligned} f_1 * (f_2 * v) &= \sum_i \int_G \int_G f_1(y) f_2(y^{-1}x) f_{3,i}(x^{-1}) dy\ dx\ e_i \\ &= \sum_i \int_G (f_1 * f_2)(x) f_{3,i}(x^{-1}) dx\ e_i \\ &= \sum_i ((f_1 * f_2) * f_{3,i}))(\mathbf{1}_G)\ e_i \\ &= \sum_i ((f_1 * (f_2 * f_{3,i}))(\mathbf{1}_G)\ e_i \quad \text{(par l'associativité de $*$)} \\ &= \sum_i \int_G f_1(y)(f_2 * f_{3,i})(y^{-1}) dy\ e_i \\ &= \sum_i \int_G \int_G f_1(y) f_2(x) f_{3,i}(x^{-1}y^{-1}) dy\ dx\ e_i \\ &= \sum_i \int_G \int_G f_1(y) f_2(y^{-1}x) f_{3,i}(x^{-1}) dy\ dx\ e_i \\ &= (f_1 * f_2) * v. \end{aligned}$$

Et voilà. □

1.10. **Projections.** Soit V un module admissible et V_λ un module simple admissible. Soit $V(\lambda)$ la somme de tous les sous-modules isomorphes à V_λ. Nous avons une projection $p_\lambda : V \longrightarrow V$ sur $V(\lambda)$ par la formule

$$p_\lambda(v) := e_\lambda * v,$$

où $e_\lambda(x) = \dim V_\lambda \sum_i \rho_{\lambda,ii}(x^{-1})$ est un idempotent central. En particulier, la projection sur V^G est donnée par la formule

$$v \mapsto \int_G g \cdot v\ dg\ .$$

Preuve. Il suffit de montrer que $e_\lambda * e_j = e_j$ si e_j est un vecteur de base dans V_λ et $e_\lambda * e_j = 0$ si e_j un vecteur de base de V_μ, si $\mu \neq \lambda$. On calcule

$$e_\lambda * e_j = \dim V_\lambda \sum_i \int_G \rho_{\lambda,ii}(x^{-1}) x \cdot e_j dx = \dim V_\lambda \sum_{i,r} \int_G \rho_{\lambda,ii}(x^{-1}) \rho_{\mu,rj}(x)\ dx\ e_r$$

$$= \dim V_\lambda \sum_{i,r} (\rho_{\mu,rj} * \rho_{\lambda,ii})(\mathbf{1}_G)\ e_r = \delta_{\mu,\lambda} \sum_r \rho_{\lambda,rj}(\mathbf{1}_G) e_r = \delta_{\mu,\lambda} e_j.$$

□

Inversement, chaque $\mathbb{C}G^{\text{rep}*}$-module de dimension finie vient d'un $\mathbb{C}[G]$-module admissible. Chaque $v \in V$ s'écrit comme une somme finie $\sum_\lambda v_\lambda$, où $v_\lambda = e_\lambda * v$. Il existe seulement un nombre fini de $\lambda \in \Lambda$, tel que $v_\lambda \neq 0$. Puis définit $v_{\lambda,i} := \dim V_\lambda \rho_{\lambda,ii} * v_\lambda$, alors $v_\lambda = \sum_i v_{\lambda,i}$. On définit maintenant

$$g \cdot v := \sum_{\lambda \in \Lambda} g \cdot v_\lambda := \sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_j g \cdot v_{\lambda,j}$$

et

$$g \cdot v_{\lambda,j} := \sum_i \rho_{\lambda,ij}(g) v_{\lambda,i}.$$

Preuve.

$$g_1 \cdot (g_2 \cdot v_{\lambda,j}) = g_1 \cdot \sum_i \rho_{\lambda,ij}(g_2) v_{\lambda,i} = \sum_{i,r} \rho_{\lambda,ij}(g_2) \rho_{\lambda,ri}(g_1) v_{\lambda,r} = \sum_r \rho_{\lambda,rj}(g_1 g_2) v_{\lambda,r} = (g_1 g_2) \cdot v_{\lambda,j}.$$

Soit V un module admissible, alors $e_\lambda * V$ est la somme de tous les sous-modules isomorphes à V_λ. □

1.11. **Caractères.** Pour un G-module admissible (U, ρ) de dimension finie on définit son caractère comme $\chi_U(g) := \mathrm{tr}\rho(g) \in \mathbb{C}[G]$. Comme avant on aura $\chi_{V \oplus U} = \chi_V + \chi_W$, etcetera. Nous définissons pour deux G-modules admissibles V, W

$$(\chi_V, \chi_W) = \int_G \chi_V(x) \chi_W(x^{-1}) dx = (\chi_V * \chi_W)(\mathbf{1}_G).$$

Si V est irréductible, alors (χ_V, χ_W) est la multiplicité de V dans W.

Preuve. Supposons $W = W_1 \oplus \ldots \oplus W_s$, où chaque W_i simple. Il suffit de montrer que $(\chi_V, \chi_{W_i}) = 1$ si $V \simeq W_i$, et 0 sinon. On calcule

$$(\chi_V, \chi_{W_i}) = \sum_{i,r} (\rho_{V,ii} * \rho_{W,rr})(\mathbf{1}_G).$$

C'est égal à 0 si $V \neq W$ par le lemme et égale à $\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \rho_{V,ii}(\mathbf{1}) = 1$ si $V \simeq W$. □

On obtient le critère de simplicité, comme dans

Corollaire 1.4. *Le module V admissible est simple si et seulement si $(\chi_V, \chi_V) = 1$.*

1.12. $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$**.** La prochaine exercice décrit "l'intégral algébrique" sur le groupe algébrique $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$.

Exercice 1.3. Soit G le groupe $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$. Chaque $g \in G$ est une matrice complexe inversible $(g_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. On définit la fonction x_{ij} par

$$x_{ij}:\ G \longrightarrow \mathbb{C}:\ g \mapsto x_{ij}(g) = g_{ij}.$$

L'algèbre $\mathbb{C}[X]$ est l'algèbre de toutes les fonctions polynomiales dans les x_{ij}. Par exemple, le déterminant $\det \in \mathbb{C}[X]$, mais $\frac{1}{\det}$ n'est pas un polynôme. On définit $\mathbb{C}[G] = \mathbb{C}[X, \det^{-1}]$ comme l'algèbre des fonctions rationnelles sur G dont le dénominateur est de la forme $\det^i$, pour un $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Remarquer que ces fonctions sont définies partout sur G. Le but de l'exercice est de montrer que les trois axiomes sont satisfaits.

(i) Montrer que $\mathbb{C}[G]$ satisfait axiomes (i) et (ii). [Indice: utiliser la formule de Cramer pour décrire $g \mapsto x_{ij}(g^{-1})$.]

(ii) Montrer que si $f \in \mathbb{C}[G]$ a la propriété que

$$g \cdot f = \det(g)^i f,$$

pour chaque $g \in G$, alors $f = f(\mathbf{1}_G)\det^{-i}$.

(iii) Montrer que pour chaque $f \in \mathbb{C}[G]$, $g \in G$ et $1 \leq i,j \leq n$ on a

$$g \cdot \left(\frac{\partial(g^{-1}\cdot f)}{\partial x_{ij}}\right) = \sum_{r=1}^{n} g_{ri}\frac{\partial f}{\partial x_{rj}}.$$

(iv) S'inspirant sur la définition du déterminant définissons l'opérateur différentiel Ω par

$$\Omega := \sum_{\pi\in S_n} \mathrm{sg}(\pi)\frac{\partial^n}{\partial x_{1\pi(1)}\dots\partial x_{n\pi(n)}}$$

Montrer que pour chaque $f \in \mathbb{C}[G]$ et $g \in G$ on a

$$g\cdot\big(\Omega(g^{-1}\cdot f)\big) = \det(g)\Omega(f).$$

[Indice: utiliser l'analog de $\det MN = \det M \det N$, où Ω est vu comme un "déterminant".]

(v) Montrer qu'il existe un constant c_N tel que

$$\omega(\det^N) = c_N \det^{N-1},$$

et ensuite montrer que $C_N = \frac{N+n-1!}{N-1!}$.

[Indice pour la deuxième partie. c_N est le coefficient de $(x_{11}\dots x_{nn})^{N-1}$ dans $\omega(\det^N)$; c_N est la somme sur $\pi \in S_n$ des coefficients de $\mathrm{sg}(\pi)(x_{11}\dots x_{nn})^{N-1}x_{1\pi(1)}\dots x_{n\pi(n)}$ dans le produit

$$\prod_{i=1}^{N}\left(\sum_{\phi_i\in S_n}\mathrm{sg}(\phi_i)x_{1\phi_i(1)}\dots x_{n\phi_i(n)}\right);$$

c_N est la somme sur $\pi \in S_n$ des cardinalités des ensembles

$$\{(\phi_1,\dots,\phi_N)\in(S_n)^N;\ \phi_1,\dots,\phi_N \text{ disjoints et } \phi_1\cdots\phi_N = \pi\};$$

c_N est la cardinalité de l'ensemble

$$\{(\phi_1,\dots,\phi_N)\in(S_n)^N;\ \phi_1,\dots,\phi_N \text{ disjoints}\};$$

c_N est

$$\sum_{0\le\lambda_1,\ldots,\lambda_N\le n;\sum_i\lambda_i=n}\binom{n}{\lambda_1,\ldots,\lambda_N}\lambda_1!\lambda_2!\ldots,\lambda_N! = \frac{N+n-1!}{N-1!}.$$

Fin de l'indice.]

(vi) Soit B le sous-module de $\mathbb{C}[G]$ engendré par l'ensemble

$$\{g\cdot f - f;\ g\in G, f\in\mathbb{C}[G]\}.$$

Si $\mathbb{C}[G]/B\neq 0$, choisissons une application linéaire non-zéro $\phi:\ \mathbb{C}[G]/B\longrightarrow\mathbb{C}$. Montrer que

$$I_G(f) := \phi(f+B)$$

défini une moyenne invariant à gauche sur $\mathbb{C}[G]$.

(vii) Pour montrer que les trois axiomes sont satisfaits, il suffit donc de montrer que $1\neq B$. Supposons que $1\in B$. Alors il existe $f_i\in\mathbb{C}[G]$, $g_i\in G$ tels que :

$$1=\sum_i g_i\cdot f_i - f_i;$$

alors ils existent des polynômes $F_i\in\mathbb{C}[X]$ et un $N\geq 0$ tel que

$$\det{}^N = \sum_i (g_i\cdot F_i - (\det g_i)^{-N}F_i).$$

On peut supposer que les F_i sont homogènes de degré Nn. Si $N=0$ ça est impossible, parce que si $\deg F_i = 0$, alors F_i est constant, et donc $g_i\cdot F_i = F_i$ et on obtient une équation $1=0$. Donc on suppose $N>0$ est minimal. Mais applicant Ω on obtient une équation semblable, de degré $N-1$. Une contradiction avec la minimalité. Donner les détails de l'argument.

(viii) Montrer qu'il existe un nombre dénombrable de G-modules simples admissibles. Chaque module admissible de dimension au maximum dénombrable est la somme directe de G-modules simples.

1.13. **Restriction et Induction.** Fixons une classe de paires $(G, \mathbb{C}[G])$ où G est un groupe et où $\mathbb{C}[G]$ est une algèbre de fonctions sur G. Un *morphisme* $\phi : (G, \mathbb{C}[G]) \longrightarrow (K, \mathbb{C}[K])$ de paires sera un homomorphisme de groupes $\phi : G \longrightarrow K$ tel que pour chaque $f \in \mathbb{C}[K]$ la restriction $\phi^\sharp(f) := f \circ \phi \in \mathbb{C}[G]$.

Par exemple si on prend la classe des groupes continus avec l'algèbre des fonctions continues, les morphismes sont les homomorphismes continus. Si on prend la classe des groupes algébriques affines complexes avec l'algèbre des fonctions régulières, les morphismes sont exactement les homomorphismes des groupes algébriques.

Les algèbres $\mathbb{C}[G]$ ne satisfont pas nécessairement aux trois axiomes. Mais on peut définir la notion de module admissible. Seulement les théorèmes de Maschke, etcetera ne resteront plus vrai en général.

Lemme 1.5. *Soient $(H, \mathbb{C}[H])$ et $(G, \mathbb{C}[G])$ et $H < G$. Supposons que pour chaque $f \in \mathbb{C}[G]$ la restriction de f à H est une fonction dans $\mathbb{C}[H]$. Alors en effet $\mathrm{Res}_H^G V$ est un H-module admissible, si V est un G-module admissible.*

Preuve. Soit $v \in V$ et $\omega \in V^*$, alors $g \mapsto \omega(g \cdot v)$ est dans $\mathbb{C}[G]$. Donc par l'hypothèse la restriction $h \mapsto \omega(h \cdot v)$ est dans $\mathbb{C}[H]$. Donc V est $\mathbb{C}[H]$-admissible. □

Si $H < G$ est comme dans le lemme et U un H-module admissible, on voudrait induire U à un G-module admissible.

Soit $\dim U < \infty$. Une application $F : G \longrightarrow U$ sera appelé admissible, si pour chaque $\omega \in U^*$ la fonction $g \mapsto \omega(F(g))$ est dans $\mathbb{C}[G]$. On définit alors le module induit

$$\mathrm{Ind}_H^G U := \{F : G \longrightarrow U;\ F \text{ est admissible, et } \forall g \in G, h \in H :\ F(gh^{-1}) = h \cdot (F(g))\}.$$

Lemme 1.6. *Si U est $\mathbb{C}H$-admissible, alors $\mathrm{Ind}_H^G U$ est admissible pour $\mathbb{C}[G]$.*

Preuve. Soit $u_1, \ldots, u_d$ une base de U, avec la base duale $u_1^*, \ldots, u_d^*$. Alors $F(g) = \sum_i u_i^*(F(g))u_i$, alors $\mathrm{Ind}_H^G U$ est un sous-module du module admissible $(\mathbb{C}[G]^{\mathrm{rep}})^d$, donc est admissible. □

Le théorème de Frobenius reste valide.

Exemple 1.4. Soit $B < \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ le sous-groupe des matrices triangulaire supérieures, avec l'algèbre $\mathbb{C}[B] := \{f|_B; f \in \mathbb{C}[\mathrm{GL}(n, C)]\}$. Soit

$$\Lambda := \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n;\ \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \lambda_n\}$$

Pour chaque $\lambda \in \Lambda$ on définit un B-module admissible $\mathbb{C}_\lambda$ de dimension un ou l'action de $b = (b_{ij}) \in B$ est multiplication par le constant

$$b^\lambda := b_{11}^{\lambda_1} b_{22}^{\lambda_2} \ldots b_{nn}^{\lambda_n}.$$

Définissons $V_\lambda := \mathrm{Ind}_B^G \mathbb{C}_\lambda^*$.

Let théorème de Borel-Weil dit que chaque V_λ est simple, $V_\lambda \simeq V_\mu$ si et seulement si $\lambda = \mu$, et si V est simple alors il existe un $\lambda \in \Lambda$ et un isomorphisme $V \simeq V_\lambda$.

C'est une conséquence du théorème de point fixe de A. Borel: Soit V un $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$-module simple admissible. Alors il existe un unique vecteur propre $v \in V$ (à un scalaire près) pour tous les opérateurs de B. (Ou, pour l'action de B sur l'espace projective $\mathbb{P}(V)$ il existe un unique point fixe si et seulement si V est simple pour $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$).

Donc

$$V_\lambda = \{f \in \mathbb{C}[\mathrm{GL}(n, C)]; \forall g \in \mathrm{GL}(n, C), b \in B : f(gb) = b^\lambda f(g)\}.$$

Si $V = (\mathbb{C}^n)^*$ on écrit souvent $S^\lambda V = V_\lambda$.

Le duale de V_λ est isomorphe à V_μ, où $\mu = (-\lambda_n, -\lambda_{n-1}, \dots, -\lambda_1)$. Par exemple si $\lambda = (1, 1, \dots, 1)$ alors $V_\lambda = \{c \det;\ c \in\ C\}$, avec l'action $g \cdot \det = \det(g^{-1}) \det$. Si $\lambda = (1, 0, \dots, 0)$ alors $V_\lambda =< x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1} >$ avec l'action $g \cdot x_{j1} = \sum_i (g^{-1})_{ji} x_{i1}$, donc isomorphe à $(\mathbb{C}^n)^*$. De même $V_{(m,0,\dots,0)} \simeq S^m(\mathbb{C}^n)^*$, le module des fonctions polynomiales sur $\mathbb{C}^n$, homogène de degré m.

Le $G \times G$-module $\mathbb{C}[X]_d$ des fonctions polyomiales de degré d sur G s'écrit comme

$$\mathbb{C}[X]_d = \sum_{\lambda \vdash d} S^\lambda V \otimes S^\lambda V^*,$$

où la somme est sur les $\lambda \in \Lambda$ où $\lambda_n \geq 0$ et $\sum_i \lambda_i = d$ (les partitions de n). (Cauchy)

Les classes de permutations de S_m sont aussi paramétrisées par les partitions de m. Le $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \times S_m$ module sur $M := V^{\otimes m}$ est décomposable comme

$$V^{\otimes m} = \sum_{\lambda \vdash m} S^\lambda V \otimes U_\lambda,$$

où $\{U_\lambda;\ \lambda \vdash m\}$ sont les $\mathbb{C}S_n$-modules simples. Soit A l'image de $\mathbb{C}\,\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})^*$ dans $\mathrm{End}\, M$, et B l'image de $\mathbb{C}S_m$ dans $\mathrm{End}\, M$. Alors $B = \mathrm{End}_A = \mathrm{End}_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})} M$ et $A = \mathrm{End}_B M = \mathrm{End}_{S_m} M$. (Schur)

Soit T le groupe des matrices diagonales dans $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Le groupe S_n est isomorphe à $N_G T/T$. Donc pour V un $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$-module admissible, alors V^T est un $\mathbb{C}S_n$-module. La collection $\{V_\lambda^T;\ \lambda \vdash n\}$ est une collection de représentants de $\mathbb{C}S_n$-modules simples. (Kostant)

Considérons les coefficients des polynômess caractérsistique comme des fonctions centrales sur $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Plus précisement, définissons $\phi_1, \dots, \phi_n$ par

$$\det(t\mathbf{1} - g) = t^n - \phi_1(g) t^{n-1} + \phi_2(g) t^{n-2} - \ldots + (-1)^n \phi_n(g).$$

En particulier, $\phi_1(g) = \mathrm{tr}(g)$ et $\phi_n(g) = \det(g)$. Alors l'anneau des fonctions centrales de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ est

$$\mathbb{C}[\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \phi_n^{-1}].$$

La restriction de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ à $U(n)$ induit un module continu V_λ pour $U(n)$. Un théorème de Weyl dit que les modules restent simples, non-isomorphes, et chaque module continu pour $U(n)$ et simple est isomorphe à un des V_λ. C'est une conséquence du fait que $\mathbb{C}[U(n)]^{\mathrm{rep}} \simeq \mathbb{C}[\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})]$ (où $\mathbb{C}[U(n)]$ sont les fonctions continues sur $U(n)$ et $\mathbb{C}[\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}]$ les fonctions régulières sur $\mathrm{GL}(n, C)$ ("l'astuce unitaire de Weyl").

L'isomorphisme $\mathbb{C}[U(n)]^{\mathrm{rep}} \simeq \mathbb{C}[\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})]$ (avec les mêmes intégrales) donne qu'un $U(n)$-module est admissible si et seulement si c'est un $\mathbb{C}U(n)^{\mathrm{rep},*}$-module si et seulement si c'est un $\mathbb{C}\,\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})^{\mathrm{rep},*}$-module si et seulement si c'est un $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$-module admissible.

1.14. **Frobenius et Schur.**

Théorème 1.4 (Frobenius—Schur)**.** *Soit* $\lambda \in \Lambda$. *Alors*

$$\int_G \chi_\lambda(g^2)dg \ \in \{-1, 0, 1\}.$$

En fait, on obtient 0 *ssi* $V_\lambda \not\simeq V_\lambda^*$; 1 *ssi* V_λ *admet une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée* G*-invariante;* -1 *ssi* V_λ *admet une forme bilinéaire anti-symétrique non-dégénérée* G*-invariante.*

Preuve. Soit $\lambda^* \in \Lambda$ tel que $V_\lambda^* \simeq V_{\lambda^*}$. Fixons une base $e_1, \dots, e_n$ de V_λ et la base duale $e_1^*, \dots, e_n^*$ de V_{λ^*}. On obtient

$$\rho_{\lambda,ji}(g) = \rho_{\lambda^*,ij}(g^{-1}).$$

On obtient

$$\int_G \chi_\lambda(g^2)dg = \sum_{i=1}^n \int_G \rho_{\lambda,ii}(g^2)dg = \sum_{i,j=1}^n \int_G \rho_{\lambda,ij}(g)\rho_{\lambda,ji}(g)dg = \sum_{i,j=1}^n \int_G \rho_{\lambda,ij}(g)\rho_{\lambda^*,ij}(g^{-1})dg =$$

$$= \sum_{i,j=1}^n (\rho_{\lambda,ij} * \rho_{\lambda^*,ij})(\mathbf{1}_G).$$

Donc si $\lambda \neq \lambda^*$ on obtient 0.

Supposons $\lambda = \lambda^*$, alors il existe un G-isomorphisme $\phi : V_\lambda \simeq V_\lambda^*$. Posons

$$(,) : V_\lambda \times V_\lambda \longrightarrow \mathbb{C} : \ (v_1, v_2) := \phi(v_1)(v_2).$$

Alors $(,)$ est bilinéaire et non-dégénérée et G-invariante. Inversement, chaque forme bilinéaire, non-dégénérée et G-invariante définit un G-isomorphisme $V_\lambda \simeq V_\lambda^*$.

La décomposition $V_\lambda \otimes V_\lambda = S^2V_\lambda \oplus \wedge^2 V_\lambda$ et que la dimension de $(V_\lambda \otimes V_\lambda)^G \simeq (V_\lambda^* \otimes V_\lambda)^G \simeq \mathrm{End}_G(V_\lambda)$ est un par le lemme de Schur, il suit que soit $\dim S^2V_\lambda = 1, \wedge^2 V_\lambda = 0$ ou $\dim S^2 V_\lambda = 0, \dim \wedge^2 V_\lambda = 1$. Donc la forme $(,)$ est soit symétrique soit anti-symétrique.

Supposons la forme est symétrique, alors par l'algèbre linéaire il existe une base orthonormale $e_1, \dots, e_n$ tel que $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$. Sur cette base chaque $g \in G$ est représenté par une matrice orthogonale, donc $\rho_{\lambda,ji}(g) = \rho_{\lambda,ij}(g^{-1})$ et obtient comme valeur

$$\sum_{i,j=1}^n \int_G \rho_{\lambda,ij}(g)\rho_{\lambda,ij}(g^{-1})dg = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n}\rho_{\lambda,ii}(\mathbf{1}) = 1.$$

Supposons la forme est anti-symétrique alors par l'algèbre linéaire il suit que $n = 2m$ est pair et qu'il existe une base $e_1, \dots, e_n$ telle que $(e_i, e_j) = 0$ si $i + j \neq n$, $(e_i, e_{n-i}) = -1$ si $1 \leq i \leq m$ et $(e_i, e_{n-i}) = -1$ si $m + 1 \leq i \leq n$.

On obtient

$$\rho_{\lambda,ij}(g) = \pm(g \cdot e_j, e_{n-i}) = \pm(e_j, g^{-1} \cdot e_{n-i}) = \pm(g^{-1} \cdot e_{n-i}, e_j) = \pm\rho_{\lambda,n-j,n-i}(g^{-1}).$$

Le signe est -1 ssi $i \leq m, j > m$ ou $i < m, j \leq m$. On obtient comme valeur

$$\sum_{i,j=1}^n \int_G \rho_{\lambda,ij}(g)(\pm\rho_{\lambda,n-i,n-j}(g^{-1}))dg = \sum_{i=1}^n -\frac{1}{n}\rho_{\lambda,ii}(\mathbf{1}) = -1.$$

□

2. Exemple

Soit $\{G_i; i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ un système de groupes finis, et $\phi_i : G_i \longrightarrow G_{i-1}$ un système d'épimorphsimes, pour $i > 0$. On définit le groupe

$$G := \{(g_i)_{i\geq 0} \in \prod_i G_i;\ \forall i > 0 :\ \phi_i(g_i) = g_{i-1}\}$$

La multiplication est définie comme

$$(g_i)_{i\geq 0} \cdot (g'_i)_{i\geq 0} := (g_i g'_i)_{i\geq 0}.$$

Pour chaque $n \geq 0$ on a un homomorphisme de groupes

$$\psi_n :\ G \longrightarrow G_n : (g_i)_{i\geq 0} \mapsto g_n.$$

On définit maintenant une algèbre de fonctions sur G par

$$\mathbb{C}[G] := \{f : G \longrightarrow \mathbb{C}; \exists n \geq 0 :\ \exists f_n : G_n \longrightarrow \mathbb{C} :\ f = f_n \circ \psi_n\}.$$

On définit l'intégrale par

$$\int_G f(g)dg\ := \int_{G_n} f_n(g)dg,$$

où $n \geq 0$ et $f_n : \mathbb{C}[G_n]$ tels que $f = f_n \circ \psi_n$. Ici, $\int_G$ est la moyenne le groupe fini G_n. La définition ne dépend pas du choix de n.

Les axiomes sont satisfaits.

Soit p un nombre premier. Prenons $G_i := \mathbb{Z}/(p^i)$ et ϕ_i la projection naturelle. Alors G est l'anneau des entiers p-adiques. Soit $n > 0$ et η une p^n-racine d'unité primitive de $\mathbb{C}$. Alors

$$\mathbb{Z}/p^n \longrightarrow \mathbb{C}^\times : a + (p^n) \mapsto \eta^a$$

est une représentation de $\mathbb{Z}/(p^n)$, donc une représentation admissible de $G = \hat{\mathbb{Z}}_p$. Tous les représentations simple admissible de G sont de cette forme. Donc λ est l'ensemble des p^n-th racines d'unité primitives, pour chaque $n \geq 0$.

3. Invariants

Soit V un module admissible de dimension finie. Nous considérons l'algèbre $\mathbb{C}[V]$ des fonctions polynomiales sur V. Si $x_1, \ldots, x_n$ sont les fonctions coordonnées, alors $\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, l'algèbre de polynômes en $x_1, \ldots, x_n$. L'action naturelle

$$(g \cdot f)(v) := f(g^{-1} \cdot v)$$

sur $\mathbb{C}[V]$ est admissible, les fonctions homogènes de degré d est un sous-module admissible de dimension finie isomorphe à $S^i V^*$.

On considère le sous-algèbre $\mathbb{C}[V]^G$ des fonctions polynomiales invariantes

$$\mathbb{C}[V]^G = \{f \in \mathbb{C}[V];\ \forall g \in G :\ f = g \cdot f\}.$$

Il est facile à voir que c'est en fait une algèbre. La question classique est si elle a un nombre fini de générateurs. Sous la condition que V est admissible la réponse est oui.

Théorème 3.1 (Hilbert)**.** *Supposons que V est un G-module admissible de dimension finie. Alors le sous-algèbre des invariants $\mathbb{C}[V]^G$ a un nombre fini de générateurs, disons $F_1, \ldots, F_N$:*

$$\mathbb{C}[V]^G = \mathbb{C}[F_1, \ldots, F_N].$$

Alors pour chaque invariant $f \in \mathbb{C}[V]^G$ il existe un polynôme en N variables $\Phi(T_1, \ldots, T_N) \in \mathbb{C}[T_1, \ldots, T_N]$ tel que $f = \Phi(F_1, F_2, \ldots, F_N)$. En gén'eral, Φ n'est pas unique.

Preuve. Hilbert a montré que chaque idéal de $\mathbb{C}[V]$ est engendré par un nombre fini d'éléments. En particulier l'idéal I engendré par les invariants homogènes non-constants. Alors il existent des invariants homogènes de degrés positifs $F_1, \ldots, F_N$ qui engendrent I comme idéal: chaque $f \in I$ s'écrit comme

$$f = f_1 F_1 + f_2 F_2 + \ldots + f_N F_N,$$

où $f_1, \ldots, f_N \in \mathbb{C}[V]$.

Par induction sur le degré, on va montrer que chaque invariant homogène f est un polynôme en $F_1, \ldots, F_N$. Si le degré est 0, alors f est une fonction constante. On a $f \in I$, donc f s'écrit comme

$$f = f_1 F_1 + f_2 F_2 + \ldots + f_N F_N.$$

On peut supposer que les f_i sont aussi homogène tels que $\deg f_i + \deg F_i = \deg f$, donc $\deg f_i < \deg f$.

$\mathbb{C}[V]$ étant un module admissible, nous avons une G-projection p_G sur les invariants. Donc

$$f = p_G(f) = p_G(f_1 F_1) + p_G(f_2 F_2) + \ldots + p_G(f_N F_N).$$

On a

$$p_G(f_i F_i) = \int_G x \cdot (f_i F_i) dx = \int_G (x \cdot f_i) F_i dx = \int_G (x \cdot f_i) dx \; F_i = p_G(f_i) F_i \quad \text{(Vérifier!)}$$

Donc on obtient

$$f = p_G(f_1) F_1 + p_G(f_2) F_2 + \ldots + p_G(f_N) F_N,$$

où $p_G(f_i)$ est invariant de degré $\deg f_i < \deg f$, donc par induction un polynôme en $F_1, \ldots, F_N$. Alors par induction f est aussi un polynôme en $F_1, \ldots, F_N$. Pour finir, on remarque que si f est invariant aussi chaque composante homogène est invariante. $\square$

On définit la série de Hilbert $\mathcal{H}(\mathbb{C}[V]^G; t)$ de $\mathbb{C}[V]^G$ par

$$\mathcal{H}(\mathbb{C}[V]^G; t) := \sum_{i=0}^{\infty} \dim \mathbb{C}[V]^G_i \; t^i.$$

Dans le cas spécial ou le groupe est trivial on a la formule

$$\mathcal{H}(\mathbb{C}[V]; t) = \frac{1}{(1-t)^n},$$

où $n = \dim V$.

Théorème 3.2 (Molien)**.** *On a une formule*

$$\mathcal{H}(\mathbb{C}[V]^G; t) = \int_G \frac{1}{\det_{V^*}(1 - tg)} dg,$$

où pour $f \in \mathbb{C}[G]$ on définit $\int_G f(x)t^i dx := \int_G f(x)dx\ t^i$, et $\det_{V^*}(1-tg) = \det(\mathbf{1} - t\rho_{V^*}(g))$, avec ρ_{V^*} la représentation sur V^*.

En particulier, si le groupe est fini

$$\mathcal{H}(\mathbb{C}[V]^G;t) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\frac{1}{\det_{V^*}(1-tg)}.$$

Exemple 3.1. S_3 agit sur $\mathbb{C}^3$ par les matrices de permutation. Par exemple, pour la permutation (12) on a

$$\det_{V^*}(1-t(12)) = \det\begin{pmatrix} 1 & -t & 0 \\ -t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix} = (1-t^2)(1-t).$$

On obtient

$$\mathcal{H}(\mathbb{C}[V]^G;t) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{(1-t)^3} + \frac{3}{(1-t^2)(1-t)} + \frac{2}{(1-t^3)}\right) = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)}.$$

4. Algèbre de Hopf et la complexification de G

Soit G un groupe avec une algèbre $\mathbb{C}[G]$ de fonctions satisfaisant aux axiomes. Nous avons vu qu'on peut remplacer l'algèbre $\mathbb{C}[G]$ par $A := \mathbb{C}[G]^{\mathrm{rep}}$ sans changer la théorie des représentations admissibles. Dans cette section nous allons montrer comment on peut enlargir le groupe G vers un groupe $G_{\mathbb{C}}$ (la *complexification de G*) sans changer l'algèbre et sans changer la théorie des représentations. Chaque représentation admissible $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ a une unique extension vers une représentation admissible de $G_{\mathbb{C}}$. La complexification de S^1 est par exemple $\mathbb{C}^\times$. L'idée est la suivante. Chaque $g \in G$ induit un morphisme d'algèbres

$$\mathrm{ev}_g :\ A \longrightarrow \mathbb{C} : f \mapsto f(g).$$

Nous allons montrer que l'ensemble

$$G_{\mathbb{C}} := \{\phi :\ A \longrightarrow \mathbb{C};\ \ \phi \text{ est homomorphisme d'algèbres}\}$$

a une structure de groupe. Pour montrer qu'il y a une multiplication qui est associative, etcetera, on va montrer que A a une co-multiplication, qui est co-associative, etcetera.

4.1. **Hopf.** Sur l'algèbre commutative $A := \mathbb{C}[G]^{\mathrm{rep}}$ on va mettre la structure d'une algèbre de Hopf.

Soit V un G-module admissible de dimension finie, $v \in V$, $\omega \in V^*$. Alors $f_{\omega,v} : g \mapsto \omega(g\cdot v)$ est une fonction représentative, et chaque fonction représentative est de cette forme. On peut interpreter $v \in V$ comme un élément de $(V^*)^*$, donc $f_{v,\omega}$ a aussi un sens. Soit $f_{\nu,w}$ une autre fonction représentative, où $w \in W$, $\nu \in W^*$. On a

$$f_{\omega,v}f_{\nu,w} = f_{\omega\otimes\nu,v\otimes w}.$$

Fixons une base $e_1,\ldots,e_n$ de V.

On définit maintenant la *co-multiplication*

$$\Delta : A \longrightarrow A\otimes A : f_{\omega,v} \mapsto \sum_j f_{\omega,e_j}\otimes f_{e_j^*,v};$$

l'application *co-unité*

$$\epsilon:\ A \longrightarrow \mathbb{C} : f_{\omega,v} \mapsto \omega(v)$$

et l'*antipode*

$$S:\ A \longrightarrow A:\ f_{\omega,v} \mapsto f_{v,\omega}.$$

Théorème 4.1. *(i) Δ, ϵ et S sont des homomorphismes d'algèbres.*

(ii) Δ est co-associatif :

$$(\Delta \otimes \mathbf{1}_A) \circ \Delta = (\mathbf{1}_A \otimes \Delta) \circ \Delta.$$

(iii) ϵ est un co-unité :

$$(\mathbf{1}_A \otimes \epsilon) \circ \Delta = (\epsilon \otimes \mathbf{1}_A) \circ \Delta = \mathbf{1}_A.$$

(iv) Si $\mu : A \otimes A \longrightarrow A :\ f_1 \otimes f_2 \mapsto f_1 f_2$ est la multiplication de fonctions on a pour chaque $f \in A$:

$$\mu\left((\mathbf{1}_A \otimes S) \circ \Delta(f)\right) = \mu\left((S \otimes \mathbf{1}_A) \circ \Delta(f)\right) = \epsilon(f) \in A.$$

Preuve. (i) Soient $f_{\omega,v}$ et $f_{\nu,w}$ deux fonctions représentatives, où $v \in V$ et $w \in W$. Fixons une base $e_1, \dots, e_n$ de V et une base $f_1, \dots, f_m$ de W. On a

$$\Delta(f_{\omega,v})\Delta(f_{\nu,w}) = \sum_{i,r} (f_{\omega,e_i} \otimes f_{e_i^*,v}) \cdot (f_{\nu,f_r} \otimes f_{f_r^*,w}) = \sum_{i,r} f_{\omega,e_i} f_{\nu,f_r} \otimes f_{e_i^*,v} f_{f_r^*,w}.$$

Aussi $e_i \otimes f_j$ est une base de $V \otimes S$, donc

$$\Delta(f_{\omega\otimes\nu,v\otimes w}) = \sum_{i,r} f_{\omega\otimes\nu,e_i\otimes f_r} \otimes f_{e_i^*\otimes f_r^*,v\otimes w} = \sum_{i,r} f_{\omega,e_i} f_{\nu,f_r} \otimes f_{e_i^*,v} f_{f_r^*,w}.$$

Alors Δ est un homomorphisme d'algèbres.

Puis

$$\epsilon(f_{\omega,v})\epsilon(f_{\nu,w}) = \omega(v)\nu(w) = (\omega \otimes \nu)(v \otimes w) = \epsilon(f_{\omega\otimes\nu,v\otimes w}) = \epsilon(f_{\omega,v} f_{\nu,w});$$

ce qui montre que ϵ est aussi un morphisme d'algèbres.

Finalement pour l'antipode :

$$S(f_{\omega,v} f_{\nu,w}) = S(f_{\omega\otimes\nu,v\otimes w}) = f_{v\otimes w,\omega\otimes\nu} = f_{v,\omega} f_{w,\nu} = S(f_{\omega,v})S(f_{\nu,w}).$$

(ii)

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes \mathbf{1}_A) \circ \Delta(f_{\omega,v}) &= \sum_r (\Delta \otimes \mathbf{1}_A)(f_{w,e_r} \otimes f_{e_r^*,v}) \\
&= \sum_{rs} (f_{\omega,e_s} \otimes f_{e_s^*,e_r}) \otimes f_{e_r^*,v} \\
&= \sum_{rs} f_{\omega,e_s} \otimes (f_{e_s^*,e_r} \otimes f_{e_r^*,v}) \\
&= \sum_s (\mathbf{1}_A \otimes \Delta)(f_{\omega,e_s} \otimes f_{e_s^*,v}) \\
&= (\mathbf{1}_A \otimes \Delta) \circ \Delta(f_{\omega,v})
\end{aligned}$$

(iii)

$$(\mathbf{1}_A \otimes \epsilon) \circ \Delta(f_{\omega,v}) = \sum_r (\mathbf{1}_A \otimes \epsilon)(f_{\omega,e_r} \otimes f_{e_r^*,v}) = \sum_r f_{\omega,e_r} e_r^*(v) = f_{\omega,v}.$$

(iv) On a

$$g \cdot e_j = \sum_i [g]_{ij} e_i, \text{ et } g^{-1} \cdot e_j^* = \sum_i [g]_{ji} e_i^*,$$

donc

$$\begin{aligned}
\mu\left((\mathbf{1}_A \otimes S) \circ \Delta(f_{\omega,v})\right)(g) &= \sum_j (f_{\omega,e_j} f_{v,e_j^*})(g) \\
&= \sum_j \omega(g \cdot e_j) v(g \cdot e_j^*) \\
&= \sum_{jr} [g]_{rj} \omega(e_r)(g \cdot e_j^*)(v) = \sum_r \omega(e_r)(g \cdot (\sum_j [g]_{rj} e_j^*))(v) \\
&= \sum_r \omega(e_r)(g \cdot g^{-1} \cdot e_r^*(v)) \\
&= \omega(v) \\
&= \epsilon(f_{\omega,v}).
\end{aligned}$$

□

4.2. **La multiplication de $G_{\mathbb{C}}$.** Soit $m_1, m_2 \in G_{\mathbb{C}}$ alors

$$m_1 \cdot m_2 \in G_{\mathbb{C}}$$

est défini par

$$m_1 \cdot m_2 := (m_1 \otimes m_2) \circ \Delta.$$

Où si $\Delta(f) = \sum_i h_i \otimes k_i$ alors $(m_1 \cdot m_2)(f) = \sum_i m_1(h_i) m_2(k_i)$. Étant une composition de morphismes d'algèbres, $m_1 \cdot m_2$ est aussi un morphisme d'algèbres, donc $m_1 \cdot m_2 \in G_{\mathbb{C}}$.

Théorème 4.2. *(i) La multiplication sur $G_{\mathbb{C}}$ on vient de définir donne une structure de groupe sur $G_{\mathbb{C}}$.*

(ii) L'application

$$\mathrm{ev} : G \longrightarrow G_{\mathbb{C}} : g \mapsto \mathrm{ev}_g$$

est un homomorphisme de groupes, où

$$\mathrm{ev}_g(f) := f(g).$$

Preuve. (i) Δ est co-associative, donc l'associativité de $\cdot$:

$$\begin{aligned}
(m_1 \cdot m_2) \cdot m_3 &= ((m_1 \cdot m_2) \otimes m_3) \circ \Delta = (m_1 \otimes m_2 \otimes m_3)(\Delta \otimes \mathbf{1}) \circ \Delta \\
&= (m_1 \otimes m_2 \otimes m_3)(\mathbf{1} \otimes \Delta) \circ \Delta = (m_1 \otimes (m_2 \cdot m_3)) \circ \Delta \\
&= m_1 \cdot (m_2 \cdot m_3).
\end{aligned}$$

Le neutre de $G_{\mathbb{C}}$ est $\epsilon : A \longrightarrow \mathbb{C}$. On vérifie :

$$m \cdot \epsilon = (m \otimes \epsilon) \circ \Delta = m \circ (\mathbf{1}_A \otimes \epsilon) \circ \Delta = m.$$

L'inverse de m est $m \circ S$:

$$\begin{aligned}
(m \cdot (m \circ S))(f_{\omega,v}) &= (m \otimes m) \circ (\mathbf{1} \otimes S) \circ \Delta(f_{\omega,v}) \\
&= \sum_j m(f_{\omega,e_j}) m(f_{e_j^*,v}) \\
&= m\left(\sum_j f_{\omega,e_j} f_{e_j^*,v}\right) \\
&= m\left(\omega(v)\mathbf{1}_A\right) \\
&= \omega(v) \quad \text{(parce que } m(\mathbf{1}) = 1) \\
&= \epsilon(f_{\omega,v}).
\end{aligned}$$

Donc en effet, $G_{\mathbb{C}}$ est un groupe.
(ii) Soient $g_1, g_2 \in G$.

$$\begin{aligned}
(\mathrm{ev}_{g_1} \cdot \mathrm{ev}_{g_2})(f_{\omega,v}) &= \sum_j \mathrm{ev}_{g_1}(f_{\omega,e_j})\, \mathrm{ev}_{g_2}(f_{e_j^*,v}) \\
&= \sum_j \omega(g_1 \cdot e_j) e_j^*(g_2 \cdot v) \\
&= \sum_{j,r} [g_1]_{rj} \omega(e_r) e_j^*(g_2 \cdot v) = \sum_r \omega(e_r)(\sum_j [g_1]_{rj} e_j^*)(g_2 \cdot v) \\
&= \sum_r \omega(e_r)(g_1^{-1} \cdot e_r^*)(g_2 \cdot v) = \sum_r \omega(e_r) e_r^*(g_1 g_2 \cdot v) \\
&= \omega(g_1 g_2 \cdot v) \\
&= \mathrm{ev}_{g_1 g_2}(f_{\omega,v}).
\end{aligned}$$

Alors ev est un homomorphisme de groupes. □

4.3. **Fonctions sur $G_{\mathbb{C}}$.** On peut considérer chaque $f \in A$ comme une fonction sur $G_{\mathbb{C}}$ par la formule

$$f(m) := m(f),$$

où $m \in G_{\mathbb{C}}$. Les fonctions séparent les points de $G_{\mathbb{C}}$, dans le sens suivant. Si $m_1 \neq m_2$ alors il existe un $f \in A$ telle que $m_1(f) \neq m_2(f)$, donc

$$f(m_1) \neq f(m_2).$$

Aussi pour $g \in G$ on a

$$f(\mathrm{ev}_g) = \mathrm{ev}_g(f) = f(g).$$

Proposition 4.1. *(i) Si $\rho_{\mathbb{C}} : G_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ est une représentation admissible, alors la restriction $\rho_C \circ \mathrm{ev} : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ est aussi admissible.*

(ii) Soit $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ une représentation admissible. Alors il existe une unique extension $\rho_{\mathbb{C}} : G_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ vers une représentation admissible, telle que $\rho = \rho_C \circ \mathrm{ev}$.

Preuve. (i) est clair. (ii) Soit $v \in V$. Il existe un sous-module $W \subset V$ qui est de dimension finie et $v \in W$. Soit $e_1, \dots, e_n$ une base de W. Alors on définit pour $m \in G_{\mathbb{C}}$

$$m \cdot v := \sum_i m(f_{e_i^*, v}) e_i.$$

Si $m = \mathrm{ev}_g$ alors

$$\mathrm{ev}_g \cdot v = \sum_i \mathrm{ev}_g(f_{e_i^*, v}) e_i = \sum_i e_i^*(g \cdot v) e_i = g \cdot v.$$

Si $m_1, m_2 \in G_{\mathbb{C}}$, alors

$$m_1 \cdot (m_2 \cdot v) = m_1 \cdot \sum_i m_2(f_{e_i^*, v}) e_i = \sum_{ij} m_1(f_{e_j^*, e_i}) m_2(f_{e_i^*, v}) e_j.$$

De l'autre côté

$$(m_1 \cdot m_2) \cdot v = \sum_j (m_1 \cdot m_2)(f_{e_j^*, v}) e_j = \sum_{ij} m_1(f_{e_j^*, e_i}) m_2(f_{e_i^*, v}) e_j.$$

Ainsi on obtient une action linéaire de $G_{\mathbb{C}}$ sur V, d'où une représentation $\rho_{\mathbb{C}}$. □

Alors les théories de la représentation pour G et $G_{\mathbb{C}}$ sont égales. On prend la même intégrale

$$\int_{G_{\mathbb{C}}} f(m) dm \ := \int_G f(x) dx.$$

Et les axiomes sont satisfaites.

4.4. **Co-modules.** Les modules admissible correspondent aux co-modules pour l'algèbre de Hopf $\mathbb{C}[G_{\mathbb{C}}] = \mathbb{C}[G]^{\mathrm{rep}}$.

Un $\mathbb{C}[G_{\mathbb{C}}]$-*comodule* est un espace vectoriel V avec une application linéaire $\alpha : \ V \longrightarrow \mathbb{C}[G_{\mathbb{C}}] \otimes V$ satisfaisant deux axiomes

$$(\epsilon \otimes \mathbf{1}) \circ \alpha = \mathbf{1} \tag{1}$$

$$(\alpha \otimes \mathbf{1}) \circ \alpha = \Delta \circ \alpha \tag{2}$$

Il est un peu surprenant que les comodules sont toujours localement de dimension finie.

Proposition 4.2. *Soit (V, α) un $\mathbb{C}[G_{\mathbb{C}}]$-comodule et $V_1 \subset V_2$ un sous-espace linéaire de dimension finie. Alors il existe un espace linéaire $V_1 \subset V_2 \subset V$ tel que $\alpha(V_2) \subset \mathbb{C}[G_{\mathbb{C}}] \otimes V_2$, i.e., un sous comodule de V.*

Preuve. Posons $H := \mathbb{C}[G_{\mathbb{C}}]$, $H^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(H, \mathbb{C})$ son espace dual et

$$<,>: H^* \otimes H \longrightarrow \mathbb{C} : \mu \otimes f \mapsto \mu(f).$$

Et définissons aussi

$$<,>: H^* \otimes H^* \otimes H \otimes H \longrightarrow \mathbb{C} : \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes f_1 \otimes f_2 \mapsto \mu_1(f_1)\mu_2(f_2).$$

Si $\gamma \in H^* \otimes H^*$ alors l'application

$$\Delta^* \gamma : f \mapsto <,> (\gamma \otimes \Delta(f))$$

est linéaire, donc $\Delta^* \gamma \in H^*$.

On définit maintenant l'application composée :

$$\omega = (<,> \otimes \mathbf{1}) \circ (\mathbf{1} \otimes \alpha) : \; H^* \otimes V_1 \longrightarrow H^* \otimes H \otimes V \longrightarrow V.$$

L'image de ω est V_2.

(a) $\dim V_2 < \infty$.

Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base de V_1. Écrivons

$$\alpha(e_i) := \sum_j f_{ij} \otimes v_{ij},$$

où $f_{ij} \in H$ et $v_{ij} \in V$, et la somme est finie. Si $\mu \in H^*$, alors

$$\omega(\mu \otimes e_i) = \sum_j \mu(f_{ij}) v_{ij}.$$

Donc V_2 est dans le sous-espace de dimension finie engendré par les v_{ij}.

(b) $V_1 \subset V_2$.

On a que $\epsilon \in H^*$, donc pour chaque $v \in V_1$ on a

$$\omega(\epsilon \otimes v) = (<,> \otimes \mathbf{1})(\epsilon \otimes \alpha(v) = (\epsilon \otimes \mathbf{1}) \circ \alpha(v) = \mathbf{1}(v) = v,$$

par l'axiome (1) de α. Donc $v \in V_2$.

(c) $\alpha(V_2) \subset H \otimes V_2$.

Soit $v_2 \in V_2$, alors est de la forme

$$v_2 = \omega(\sum_i \mu_i \otimes v_{1i}$$

où $\mu_i \in H^*$ et $v_{1i} \in V_1$. Pour montrer que $\alpha(v_2) \in H \otimes V_2$ il suffit donc de montrer que $\alpha(\omega(\mu_i \otimes v_{1i}) \in H \otimes V_2$. Donc supposons que $v_2 = \omega(\mu \otimes v)$, où $\mu \in H^*$, $v \in V_1$.

On a $\alpha(v_2) \in H \otimes V_2$ si et seulement si pour chaque $\mu' \in H^*$ on a $(<,> \otimes \mathbf{1})(\mu' \otimes \alpha(v_2)) \in V_2$. (Pour montrer ça il faut utiliser que si $f_1, \ldots, f_m \in H$ sont linéairement indépendents, alors il existe un $\mu' \in H^*$ tel que $\mu'(f_1) = 1$ et $\mu'(f_i) = 0$, $i > 0$.)

Soit $\alpha(v) = \sum_i f_i \otimes w_i$, $\alpha(w_i) = \sum_j h_{ij} \otimes u_{ij}$. On vérifie maintenant :

$$\begin{aligned}
(\mu' \otimes \mathbf{1})(\alpha(v_2)) &= (\mu' \otimes \mathbf{1})(\alpha((<,> \otimes \mathbf{1})(\mu \otimes \alpha(v))) \\
&= (\mu' \otimes \mathbf{1})(\alpha((<,> \otimes \mathbf{1})(\mu \otimes \sum_i f_i \otimes w_i)) \\
&= \sum_i \mu(f_i)(\mu' \otimes \mathbf{1})(\alpha(w_i)) \\
&= \sum_{ij} \mu(f_i)(\mu' \otimes \mathbf{1})(\sum_j h_{ij} \otimes u_{ij}) \\
&= \sum_{ij} \mu(f_i)\mu'(h_{ij}) u_{ij} \\
&= (<,> \otimes \mathbf{1})(\mu \otimes \mu' \otimes (\mathbf{1} \otimes \alpha)\alpha(v)) \\
&= (<,> \otimes \mathbf{1})(\mu \otimes \mu' \otimes (\Delta \otimes \mathbf{1})\alpha(v)) \text{ par axiome (2)} \\
&= (\Delta^*(\mu \otimes \mu') \otimes \mathbf{1})\alpha(v) \\
&= \omega(\Delta^*(\mu \otimes \mu') \otimes v) \in V_2.
\end{aligned}$$

Alors ça finit la preuve. $\square$

Département de mathématiques et de statistique, Université de Montréal, C.P. 6128, succursale Centre-ville, Montréal (Québec), Canada H3C 3J7

E-mail address: broera@DMS.UMontreal.CA