9. Constructions de caractères

Pour calculer un tableau de caractères pour kG il faut connaître au début au moins un certain nombre de caractères. Puis en manipulant ces caractères on en produit plus, et en utilisant le produit scalaire $(,)$ on essaie de les couper en morceaux plus petits et même simples.

Considérons un exercice comme le suivant.

Exercice 9.1. Calculer les tableaux des caractères pour $\mathbb{C}\,\mathrm{Alt}_5$ et $\mathbb{C}\,\mathrm{GL}(3,\mathbb{F}_2)$, et utiliser les tableaux pour montrer que Alt_5 et $\mathrm{GL}(3,\mathbb{F}_2)$ sont des groupes simples.

L'atlas donne comme réponse les deux tableaux suivants :

	60 $1A$	4 $2A$	3 $3A$	5 $5A$	5 $B*$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	3	-1	0	$-b5$	$*$
χ_3	3	-1	0	$*$	$-b5$
χ_4	4	0	1	-1	-1
χ_5	5	1	-1	0	0

	168 $1A$	8 $2A$	3 $3A$	4 $4A$	7 $7A$	7 $B**$
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	3	-1	0	1	$b7$	$**$
χ_3	3	-1	0	1	$**$	$b7$
χ_4	6	2	0	0	-1	-1
χ_5	7	-1	1	-1	0	0
χ_6	8	0	-1	0	1	1

Acceptons les deux tableaux et montrons que les deux groupes sont simples. Si $N \lhd G$ est un sous-groupe normal propre et V un module simple non-trivial pour le groupe quotient G/N, alors c'est aussi un module simple non-trivial pour G. Donc il existe un caractère simple non-trivial χ pour G tel que $\chi(n) = \chi(\mathbf{1})$ pour chaque $n \in N$. Mais par inspection des deux tableaux on voit que pour les deux groupes de l'exercice ce n'est pas le cas, et donc les deux groupes sont simples.

Mais il faut vérifier encore que ce sont vraiment les tableaux demandés.

Où commencer?

Il faut d'abord connaître les classes de conjugaison, ce qui est un problème de la théorie des groupes. On pourrait aussi utiliser l'ordinateur et un logiciel comme GAP (un programme publique, pour plus d'information utiliser Google) ou MAGMA. Pour $\mathrm{GL}(n,k)$, où k est un corps on devrait utiliser la forme rationnelle canonique d'une matrice (voir Algèbre 2). Pour un groupe de permutations S_n les classes sont déterminer des types de cycles dans une décomposition en cycles deux a deux disjoints. Par le théorème de Cauchy on sait qu'il existe au moins une classe de conjugaison d'éléments d'ordre p où p est un diviseur premier de l'ordre du groupe.

Dès qu'on a accompli ça on connaît aussi la taille du tableau, le nombre de classes de conjugaison étant égale au nombre de caractères simples (le corps des nombre complexes est G-déployé).

Le premier colonne contient les degrés simples (des entiers positifs), liés par la formule $|G| = \sum_{i=1}^{c} \chi_i(\mathbf{1})^2$. En regardant les deux exemples on pourrait espérer que chaque degré simple divise l'ordre du groupe ! Et en effet on peut montrer ça.

Théorème 9.1. *Soit V un $\mathbb{C}G$-module simple, alors* $\dim V$ *divise* $|G|$.

Preuve. On donne une preuve plus tard, ou voir déjà [8, Ch. 22]. □

Maintenant la première ligne. Chaque groupe a une représentation triviale de la dimension 1, son caractère χ_1 est nécessairement simple et $\chi_1(g) = 1$ pour chaque $g \in G$. Donc la première ligne contient que des 1.

Mais quoi faire après? Ça dépend de l'information qu'on a sur le groupe. Si on connaît des sous-groupes (normaux) bien-connus ou si le groupe est contenu dans un groupe bien-connu on devrait exploiter ces informations.

9.1. **Information donnée par un sous-groupe normal.** Supposons $N \lhd G$ est un sous-groupe normal, alors on a un groupe quotient $H := G/N$ et un homomorphisme naturel

$$\nu_N : G \longrightarrow G/N = H,\ \nu_N(x) = \overline{x} = xN.$$

Si on connaît bien G/N et ses représentations, ça donne très vite de l'information sur quelques représentations de G soi-même.

Si $C(x) \subset G$ est la classe de conjugaison de $x \in G$, alors son image $\nu_N(C(x))$ est la classe de conjugaison $C(\overline{x})$ de $\overline{x} \in H$. Par exemple, chaque $C(x) \subset N$ est envoyée sur $C(\mathbf{1}_H) = \{\mathbf{1}_H\}$.

Si $\rho :\ H \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ est une représentation (simple) pour le groupe quotient $H = G/N$ alors la composition $\rho \circ \nu_N : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ est une représentation (simple) pour G soi-même.

Les deux remarques impliquent que la connaissance du tableau de H (avec disons c' lignes) donne facilement c' lignes de G. Ces lignes sont faciles à reconnaître, parce que pour chaque classe de conjugaison $C(x)$ inclue dans N on a $\chi(x) = \chi(\mathbf{1}_G)$.

Si en plus le groupe est le produit cartésien de deux sous-groupes normaux, alors la connaissance des deux tableaux des sous-groupes est suffisante pour la construction du tableau du groupe au complet.

Exercice 9.2. Soit $G = H_1 \times H_2$ un produit cartésien de deux sous-groupes finis normaux H_1 et H_2. On utilise le corps $\mathbb{C}$.

(i) Décrire les classes de conjugaison de G en termes des classes de conjugaison de H_1 et H_2. En particulier, si H_i a c_i classes $(i = 1, 2)$ alors G a c_1c_2 classes.

(ii) Soit $\rho : H_i \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ une représentation simple (complexe) de H_i (où $i = 1$ ou 2) de caractère χ. Montrer que si on compose avec la projection $G \longrightarrow H_i$ on obtient une représentation simple $\widetilde{\rho} : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ de V. On pose $\widetilde{\chi}$ pour son caractère simple de G.

(iii) Soient $\chi_1^{(1)}, \chi_2^{(1)}, \ldots, \chi_{c_1}^{(1)}$ (resp. $\chi_1^{(2)}, \chi_2^{(2)}, \ldots, \chi_{c_2}^{(2)}$) les caractères simples de H_1 (resp. de H_2). Montrer que les $\widetilde{\chi_i^{(1)}}\widetilde{\chi_j^{(2)}}$, où $1 \leq i \leq c_1$, $1 \leq j \leq c_2$ sont les caractères simples de G (utiliser le produit scalaire).

(iv) Donner le tableau de caractères de $S_3 \times S_3$.

On peut appliquer cela pour chaque groupe fini abélien, parce qu'un tel groupe est le produit cartésien de certains sous-groupes cycliques. Pour un groupe cyclique le tableau de caractères est connu.

Exemple 9.1. Soit $V_4 = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ le 4-groupe de Klein, ce groupe est isomorphe à $C_2 \times C_2$, où $C_2 =< \sigma >$ un groupe cyclique d'ordre 2.

C_2	2 1	2 σ
χ_1	1	1
χ_2	1	-1

V_4	4 1	4 (12)(34)	4 (13)(24))	4 (14)(23)
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	-1	1
χ_3	1	-1	1	-1
χ_3	1	1	-1	-1

Le sous-groupe dérivé $G' \lhd G$ est un sous-groupe normal et son groupe quotient, noté G_{ab}, est un groupe abélien. Donc la connaissance de la structure de G_{ab} donne $|G_{ab}|$ caractères simples de G, ce sont exactement les caractères simples de degré 1.

Exemple 9.2. Par le théorème de Galois le sous-groupe dérivé de Alt_4 est le 4-groupe de Klein $V_4 = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ et le quotient est le groupe cyclique $C_3 =< \sigma >$ d'ordre 3. Soit $\eta = e^{2\pi i/3}$, et utilise $\mathbb{C}$, alors les trois lignes du tableaux de C_3 induisent trois lignes du tableau de Alt_4. La dernière ligne s'obtient des relations d'othogonalité.

C_3	3 1	3 σ	3 σ^2
χ_1	1	1	1
χ_2	1	η	η^{-1}
χ_3	1	η^{-1}	η

Alt_4	12 1	4 (12)(34)	3 (123)	3 (132)
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	η	η^{-1}
χ_3	1	1	η^{-1}	η
χ_4	3	-1	0	0

Exemple 9.3. Soit G le groupe d'ordre 8 des matrices 3×3 triangulaires supérieures avec coefficients dans $\mathbb{F}_2$ et H le sous-groupe normal de G où les coefficient 12 et 23 sont 0. Alors H est le sous-groupe dérivé de G et aussi le centre de G. Le quotient est isomorphe à $C_2 \times C_2$, où $C_2 =< \sigma >$ est cyclique d'ordre 2. G est isomorphe au groupe diédrale D_4 d'ordre 8.

C_2^2	4 1	4 $(\sigma, 1)$	4 $(1, \sigma)$	4 (σ, σ)
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	-1	1
χ_3	1	-1	1	-1
χ_4	1	1	-1	-1

G	8 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	8 $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	4 $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	4 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$	4 $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	-1	-1	1
χ_3	1	1	-1	1	-1
χ_4	1	1	1	-1	-1
χ_5	2	-2	0	0	0

9.2. **Information venant d'un groupe plus grand et permutations.** On peut prendre une autre direction. Si notre groupe est un sous-groupe $G < K$ d'un groupe plus grand et $\rho : K \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ est une représentation avec caractère χ, alors la composition avec l'inclusion donne une représentation

$$\mathrm{Res}_G^K \rho : G \subset K \longrightarrow \mathrm{GL}(V),$$

la *restriction de* ρ *de* K *à* G. On pose $\mathrm{Res}_G^K \chi$ pour son caractère. Si la représentation pour K est simple, cela n'implique pas que la restriction à G est simple aussi.

Si en plus $G \lhd K$ et $x \in G$ alors la K-classe de conjugaison de x est la réunion d'un certain nombre de G-classes de conjugaison, mais la valeur de $\mathrm{Res}_G^K \chi$ en chacun de ces G-classes de conjugaison sera la même.

Exemple 9.4. Par exemple $\mathrm{Alt}_4 \subset S_4$. Nous connaissons déjà le tableau de $\mathbb{C}S_4$:

S_4	24 1	8 (12)(34)	3 (123)	4 (12)	4 (1234)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	3	-1	0	-1	1
χ_4	3	-1	0	1	-1
χ_5	2	2	-1	0	0

Si on prend les restrictions à Alt_4 des caractères simples on obtient 5 caractères.

Alt_4	12 1	4 (12)(34)	3 (123)	3 (132)
$\mathrm{Res}\,\chi_1$	1	1	1	1
$\mathrm{Res}\,\chi_2$	1	1	1	1
$\mathrm{Res}\,\chi_3$	3	-1	0	0
$\mathrm{Res}\,\chi_4$	3	-1	0	0
$\mathrm{Res}\,\chi_5$	2	2	-1	-1

En comparant avec le tableau de caractères simples de $\mathbb{C}\,\mathrm{Alt}_4$

Alt_4	12 1	4 (12)(34)	3 (123)	3 (132)
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	η	η^{-1}
χ_3	1	1	η^{-1}	η
χ_4	3	-1	0	0

on obtient

$$\operatorname{Res}\chi_1 = \operatorname{Res}\chi_2 = \chi_1^{\mathrm{Alt}_4}; \operatorname{Res}\chi_3 = \operatorname{Res}\chi_4 = \chi_4^{\mathrm{Alt}_4}; \operatorname{Res}\chi_5 = \chi_2^{\mathrm{Alt}_4} + \chi_3^{\mathrm{Alt}_4};$$

Souvent il est naturel de voir un groupe comme un groupe de permutations, c.-à-d.$G < S_n$. Par exemple, le groupe agit sur soi-mème par multiplication à gauche et alors G est isomorphe à un sous-groupe de S_n, où $n = |G|$. Alors G a une représentation par des matrices de permutation de taille $n \times n$. C'est en fait la représentation régulière sur l'espace vectoriel kG. Son caractère est très facile à donner:

$$\chi\mathrm{reg}(g) = \begin{cases} |G| & \text{si } g = \mathbf{1}_G, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve. Une base pour kG est $\{[x];\ x \in G\}$. Donc la matrice de g dans la représentation régulière est une matrice de permutation. On a $g \cdot [x] \neq [gx]$ si $g \neq \mathbf{1}_G$, donc la trace de g est zéro. $\square$

En fait chaque action d'un groupe sur un ensemble fini donne une représentation par des matrices de permutation. Supposons que G agit sur un ensemble fini X. Construisons un kG-module kX de la dimension $|X|$ comme suivant. Une k-base de kX est l'ensemble $\{[x]; x \in X\}$; donc chaque élément de kX s'écrit uniquement comme $\sum_{x\in X} a_x[x]$, où les $a_x \in k$. L'action linéaire de G sur kX est naturellement

$$g \cdot \sum_x a_x[x] := \sum_x a_x[gx] = \sum_x a_{g^{-1}x}[x].$$

Son caractère χ_X est

$$\chi_X(g) = |X^g| \in k,$$

où $X^g = \{x \in X; gx = x\}$ est l'ensemble des points fixès par $g \in G$.

Preuve. Une base pour kX est $\{[x];\ x \in X\}$. Donc la matrice de g dans la représentation est une matrice de permutation. On a $g \cdot [x] = [x]$ si $x \in X^g$, donc la trace de g est $|X^g|$. $\square$

Cette représentation contient exactement une copie de la représentation triviale pour chaque G-orbit sur X. Si $Gx = \{x_1, \ldots, x_m\}$ est une orbit, alors $k\sum_i [x_i] \subset kX$ est un kG-sous module trivial. Donc $(\chi_X, \chi_1) = |X/G|$, où χ_1 est le caractère trivial.

Chaque sous-groupe $H < G$ donne une action transitive de G sur $X := G/H$, l'ensemble de translatés. Pour obtenir une représentation de bas dimension il est souhaitable de connaître quelques grands sous-groupes.

Exemple 9.5. Le groupe Alt_4 agit sur $\mathrm{Alt}_4 / V_4 = \{\overline{1}, \overline{(123)}, \overline{(132)}\}$. Par exemple (12)(34) et (123) sont représentés par les deux matrices 3×3 de permutation :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Même si on a que peu d'information sur un groupe, on sait au moins quelque chose sur les p-Sylow sous-groupes et leurs normalisateurs. Nous rappelons la définition. Soit p un nombre premier. Un p-Sylow sous-groupe de G est un sous-groupe de l'ordre p^s, où p^s est la plus grande puissance de p divisant $|G|$. Le théorème de Sylow est le suivant, prouvé dans la théorie des groupes.

Théorème 9.2. *Soit p un nombre premier, $|G| = p^s m$, où p ne divise pas m. Soit X_p l'ensemble des p-Sylow sous-groupes de G. Le groupe G agit sur X_p par conjugaison.*

(i) X_p n'est pas vide et G agit transitivement (avec une seule orbite). Le stabilisateur d'un p-Sylow sous-groupe $P \in X_p$ est $N_G P$, le normalisateur de P dans G. Donc X_p est en bijection avec $G/N_G(P)$.

(ii) Soit N_p l'ordre de X_p, alors $N_p = \frac{|G|}{|N_G P|}$. Donc N_p divise m. Aussi, N_p est congru à 1 modulo p.

Exemple 9.6. Comme dans l'exemple de Alt_5 d'ordre 60. Si on prend $p = 5$, le nombre N_5 de 5-Sylow sous-groupes est 1 modulo 5 et divise 12. Donc 1 ou 6. Mais 1 est impossible, sinon on aurait seulement 4 éléments d'ordre 5, mais on en a 24. Alors le normalisateur N d'un tel 5-Sylow sous-groupe P est d'ordre 10. Par exemple si $P =< (12345) >$ alors $N =< (12345), (25)(34) >$. Si χ est le caractère de $\mathbb{C}X_5$ on a $\chi(\mathbf{1}) = 6$. Une permutation $\pi \in \mathrm{Alt}_5$ fixe un élément de X_5 si π est dans le normalisateur d'un 5-Sylow sous-groupe, donc l'ordre de π est $1, 2$ ou 5. En particulier $\chi(\pi) = 0$ si l'ordre de π est 3. Un élément d'ordre 5 fixe un unique élément de X_5, donc sa valeur de χ est 1. Un petit argument donne aussi que chaque élément d'ordre 2 fixe deux éléments de X_5, donc sa valeur de χ est 2. Donc on connaît χ maintenant. En utilisant le produit intérieur on vérifie que $\chi - \chi_1$ est un caractère simple.

Pour le groupe $G = \mathrm{GL}(3, \mathbb{F}_2)$ d'ordre 168 le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures est un 2-Sylow-sous-groupe d'ordre 8. Il est son propre normalisateur.

La conclusion est qu'on peut produire à partir d'un sous-groupe $H < G$ une représentation pour G par matrices de permutation de degré $|G/H|$. Mais on peut faire beaucoup plus. Avec chaque représentation pour H de degré d on peut produire une représentation pour G de degré $d|G/H$.

C'est le sujet d'induction de la section suivante.

9.3. **Produit tensoriel, carré symétrique, carré anti-symétrique.** À partir de caractères déjà connus, on peut construire d'autres en utilisant le produit tensoriel.

Soient V et W deux espaces vectoriels sur k, de bases $e_1, \ldots, e_n$ et $f_1, \ldots, f_m$ respectivement. Nous rappelons [8, Ch.19] une construction du produit tensoriel $V \otimes W$. C'est l'espace vectoriel avec une base formelle $e_i \otimes f_j$, $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$. Pour $v = \sum_i a_i e_i$ et $w = \sum_j b_j f_j$ nous définissons $v \otimes w := \sum_{ij} a_i b_j (e_i \otimes f_j)$.

Supposons $\rho_1 : G_1 \longrightarrow \mathrm{GL}(V_1)$ et $\rho_2 : G_2 \longrightarrow \mathrm{GL}(V_2)$ sont deux représentations (sur le même corps k). Alors il existe une représentation

$$\rho_1 \otimes \rho_2 : G_1 \times G_2 \longrightarrow \mathrm{GL}(V_1 \otimes_k V_2).$$

L'action linéaire correspondante est

$$(g_1, g_2) \cdot v_1 \otimes v_2 := g_1 v_1 \otimes g_2 v_2.$$

Soient $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(n, k)$ et $\mu : H \longrightarrow \mathrm{GL}(m, k)$ deux représentations matricielles. Le *produit Kroneckerien* est la représentation matricielle $\rho \otimes \mu : G \times H \longrightarrow \mathrm{GL}(n \times m, k)$ définie par

$$(\rho \otimes \mu)(g, h) := \begin{pmatrix} \rho_{11}(g)\mu(h) & \rho_{12}(g)\mu(h) & \dots & \rho_{1n}(g)\mu(h) \\ \rho_{21}(g)\mu(h) & \rho_{22}(g)\mu(h) & \dots & \rho_{2n}(g)\mu(h) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1}(g)\mu(h) & \rho_{n2}(g)\mu(h) & \dots & \rho_{nn}(g)\mu(h) \end{pmatrix};$$

où chaque bloc $\rho_{ij}(g)\mu(h)$ est de taille $m \times m$: la matrice $\mu(h)$ multipliée par le scalaire $\rho_{ij}(g) = (\rho(g))_{ij}$.

Si $G = G_1 = G_2$, la composition $G \longrightarrow G \times G \longrightarrow \mathrm{GL}(V_1 \otimes_k V_2)$ est aussi une représentation de G, aussi noté comme $\rho_1 \otimes \rho_2$. Pour les caractères on a

$$\chi_{V \otimes W} = \chi_V \chi_W.$$

Soit V un kG-module. Considérons maintenant le kG-module

$$V^{\otimes n} := V \otimes V \otimes \cdots \otimes V,$$

(n fois). Le groupe S_n agit aussi sur $V^{\otimes n}$ en permutant les composants.

$$g \cdot (v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n) = g v_1 \otimes g v_2 \otimes \cdots \otimes g v_n$$

pour $g \in G$ et

$$\pi \cdot (v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n) := v_{\pi^{-1}(1)} \otimes v_{\pi^{-1}(2)} \otimes \cdots \otimes v_{\pi^{-1}(n)},$$

pour $\pi \in S_n$. Par exemple

$$(12) \cdot ((13) \cdot a \otimes b \otimes c)) = 12 \cdot c \otimes b \otimes a = b \otimes c \otimes a = (132) \cdot a \otimes b \otimes c.$$

Nous définissons

$$S^n V := \left(V^{\otimes n}\right)^{S_n} = \{t \in V^{\otimes n};\ \forall \pi \in S_n : \ \pi \cdot t = t\}$$

et

$$\wedge^n V := \{t \in V^{\otimes n};\ \forall \pi \in S_n : \ \pi \cdot t = \mathrm{sg}(\pi) t\}.$$

Ce sont deux kG-sous-modules de $V^{\otimes n}$.

Pour $n = 2$ on a en caractéristique non-deux :

$$V \otimes V = S^2 V \oplus \wedge^2 V.$$

Soit $e_1, \ldots, e_m$ une base de V. Une base de S^2V est alors $e_i \otimes e_i$ et $e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i$ si $i < j$, donc $\dim S^2 V = m + \binom{m}{2} = \binom{m+1}{2}$. Une base de $\wedge^2 V$ est $e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i$ si $i < j$, et donc $\dim \wedge^2 V = \binom{m}{2}$. Pour le caractère:

$$\chi_{\wedge^2 V}(g) = \frac{1}{2}\left(\chi_V(g)^2 - \chi_V(g^2)\right).$$

Preuve. Si $\lambda_1, \dots \lambda_m$ sont les valeurs propres de g agissant sur V, alors $\lambda_1^2, \dots \lambda_m^2$ sont les valeurs propres de g^2 agissant sur V; et $\lambda_i\lambda_j$ $(i<j)$ sont les valeurs propres de g agissant sur $\wedge^2 V$. On a

$$\sum_{i<j} \lambda_i\lambda_j = \frac{(\sum_i \lambda_i)^2 - \sum \lambda_i^2}{2}.$$

□

Il suit que

$$\chi_{S^2V}(g) = \frac{1}{2}\left(\chi_V(g)^2 + \chi_V(g^2)\right).$$

Plus généralement, si on connait le polynôme caractéristique $\det_V(t-g)$ de g agissant sur V dans le variable t, on peut calculer le caractère des puissances symétriques et anti-symétriques dans g, par un développement de Taylor. Alors

$$\det_V(t+g) = \sum_{i=0}^{\dim V} \chi_{\wedge^i V}(g)t^i; \quad \frac{1}{\det_V(t-g)} = \sum_{i=0}^{\infty} \chi_{S^iV}(g)t^i.$$

10. Induction et restriction

10.1. **Version matricielle d'induction.** D'abord une version matricielle de l'induction, nous donnerons une version abstraite plus tard. Soit $\mu :\ H \longrightarrow \mathrm{GL}(m,k)$ une représentation matricielle d'un sous-groupe $H<G$ d'index fini r. On va définir la *représentation matricielle induite* $\mathrm{Ind}_H^G \mu :$ $G \longrightarrow \mathrm{GL}(m \times r, k)$. Fixons un système de représentants $g_1, \dots, g_r$ de G/H, tels que $G = \cup_{i=1}^r g_i H$ est une réunion disjointe. Définissons une extension $\hat\mu : G \longrightarrow \mathrm{GL}(m,k) \cup \{0\}$ par $\hat\mu(g) = \mu(g)$ si $g \in H$ et $\hat\mu(g) = 0$ sinon. L'extension $\hat\mu$ n'est pas un homomorphisme de groupe.

Nous définissons maintenant

$$\mathrm{Ind}_H^G \mu(g) := \begin{pmatrix} \hat\mu(g_1^{-1}gg_1) & \hat\mu(g_1^{-1}gg_2) & \dots & \hat\mu(g_1^{-1}gg_r) \\ \hat\mu(g_2^{-1}gg_1) & \hat\mu(g_2^{-1}gg_2) & \dots & \hat\mu(g_2^{-1}gg_r) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat\mu(g_r^{-1}gg_1) & \hat\mu(g_r^{-1}gg_2) & \dots & \hat\mu(g_r^{-1}gg_r) \end{pmatrix}.$$

Dans chaque "ligne" et chaque "colonne" il y a un unique bloc de taille $m \times m$ qui n'est pas 0, parce que pour chaque j il existe un unique i et un unique $h \in H$ tels que $gg_j = g_i h$ (et $h = g_i^{-1}gg_j$).

Soit $\chi : H \longrightarrow k$ le caractère de μ, et $\hat\chi : G \longrightarrow k$ l'extension, où $\hat\chi(g) = 0$ si $g \notin H$. Nous calculons le caractère $\mathrm{Ind}_H^G \chi$ de $\mathrm{Ind}_H^G \mu$:

$$\mathrm{Ind}_H^G \chi(g) = \sum_{i=1}^r \hat\chi(g_i^{-1}gg_i).$$

Supposons maintenant que $H \lhd G$ est même un sous-groupe normal. Si $g \in H$ alors $g_i^{-1}gg_i \in H$ et si $g \notin H$ alors $g_i^{-1}gg_i \notin H$. On aura donc une formule simplifiée :

$$\mathrm{Ind}_H^G \chi(g) = \begin{cases} \sum_{i=1}^r \chi(g_i^{-1}gg_i) & \text{si } g \in H, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1}$$

Exemple 10.1. Considérons $\mathrm{Alt}_4 < \mathrm{Alt}_5$ et la représentation $\mu : \mathrm{Alt}_4 \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ donnée par

$$\mu(x) : \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}; \\ \eta & \text{si } x \in \{(123), (134), (243), (142)\}; \\ \eta^{-1} & \text{si } x \in \{(132), (234), (124), (143)\}, \end{cases}$$

où $\eta = e^{2\pi i/3}$. Des représentants pour $\mathrm{Alt}_5 / \mathrm{Alt}_4$ sont par exemple

$$g_1 := (51234); g_2 = (52413); g_3 = (53142); g_4 = (54321); g_5 = (1).$$

En particulier, pour chaque $i = 1, \ldots, 5$ on a $g_i(5) = i$,

$$g_i \,\mathrm{Alt}_4 = \{\pi \in \mathrm{Alt}_5;\ \pi(5) = i\}$$

et pour $\pi \in \mathrm{Alt}_5$ on a $g_j^{-1}\pi g_i \in \mathrm{Alt}_4 \iff j = \pi(i)$. Par exemple pour $x = (135), y = (13)(24)$ et $z = xy = (15)(24)$ on obtient par un calcul direct le suivant.

$g_3^{-1}xg_1 = (143)$	$g_3^{-1}yg_1 = (234)$	$g_5^{-1}zg_1 = (14)(23)$
$g_2^{-1}xg_2 = (134)$	$g_4^{-1}yg_2 = (123)$	$g_4^{-1}zg_2 = (14)(23)$
$g_5^{-1}xg_3 = (142)$	$g_1^{-1}yg_3 = (243)$	$g_3^{-1}zg_3 = (14)(23)$
$g_4^{-1}xg_4 = (124)$	$g_2^{-1}yg_4 = (132)$	$g_2^{-1}zg_4 = (14)(23)$
$g_1^{-1}xg_5 = (12)(34)$	$g_5^{-1}yg_5 = (13)(24)$	$g_1^{-1}zg_5 = (14)(23)$

Nous obtenons les matrices $\mathrm{Ind}_{\mathrm{Alt}_4}^{\mathrm{Alt}_5} \mu(x)$, $\mathrm{Ind}_{\mathrm{Alt}_4}^{\mathrm{Alt}_5} \mu(y)$ et $\mathrm{Ind}_{\mathrm{Alt}_4}^{\mathrm{Alt}_5} \mu(z)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \eta & 0 & 0 & 0 \\ \eta^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \eta & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta^{-1} & 0 \\ \eta^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le caractère induit a la valeur 1 dans y et z et -1 dans x. La valeur en chaque 5-cycle σ est 0, parce que $g_i^{-1}\sigma g_i$ est aussi un 5-cycle donc pas dans Alt_4. On a $g_i^{-1}(123)g_i \in \mathrm{Alt}_4$ si et seulement si $i = 4, 5$. $g_4^{-1}(123)g_4 = (234)$ et $g_5^{-1}(123)g_5 = (123)$, donc le caractère est $\eta + \eta^{-1} = -1$. En regardant le tableau de caractères, on pourrait croire d'avoir trouvé un caractère simple !

Alt_5	1	(12)(34)	(123)	(12345)	(54321)
$\mathrm{Ind}\,\mu$	5	1	-1	0	0

Exemple 10.2. Maintenant nous considérons un sous-groupe normal $\mathrm{Alt}_4 \lhd S_4$. Les représentants choisies sont $\{g_1 = 1, g_2 = (12)\}$. On va induire tous les caractères simples de Alt_4 à S_4.

À partir du tableau de $\mathbb{C}\,\mathrm{Alt}_4$

	12	4	3	3
Alt_4	1	(12)(34)	(123)	(132)
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	η	η^{-1}
χ_3	1	1	η^{-1}	η
χ_4	3	-1	0	0

on obtient en utilisant la formule simplifié (1)

S_4	24 1	8 (12)(34)	3 (123)	4 (12)	4 (1234)
Ind χ_1	2	2	2	0	0
Ind χ_2	2	2	-1	0	0
Ind χ_3	2	2	-1	0	0
Ind χ_4	6	-2	0	0	0

Par exemple

$$\operatorname{Ind}\chi_3(123) = \chi_3(123) + \chi_3((12)(123)(12)) = \eta + \eta^{-1} = -1.$$

En utilisant le tableau de $\mathbb{C}S_4$ on peut décomposer les représentations induites.

$$\operatorname{Ind}\chi_1 = \chi_1^{S_4} + \chi_2^{S_4};\ \operatorname{Ind}\chi_2 = \operatorname{Ind}\chi_3 = \chi_5^{S_4};\ \operatorname{Ind}\chi_4 = \chi_3^{S_4} + \chi_4^{S_4}.$$

10.2. **Version abstraite d'induction et Frobenius.** Dans cette section nous allons montrer la réciprocité de Frobenius, disant que l'induction et la restriction sont deux foncteurs adjoints. Commençons avec les définitions. Soit $H < G$, k un corps, V un kH-module et U un kG-module.

La restriction $\operatorname{Res}_H^G U$ est le kH-module obtenu de U par la restriction de l'action de G à H; en particulier l'espace U reste le même.

L'induction $\operatorname{Ind}_H^G V$ est le kG module défini par

$$\operatorname{Ind}_H^G V = \{f : G \longrightarrow V; \forall h \in H, \forall x \in G :\ f(xh^{-1}) = h\cdot(f(x))\}.$$

L'action linéaire de G est donnée par

$$(g\cdot f)(x) := f(g^{-1}x),$$

pour $g \in G$, $f \in \operatorname{Ind}_H^G V$ et $x \in G$.

Pour chaque $v \in V$ nous définissons la fonction $f_v : G \longrightarrow V$ par

$$f_v(x) = \begin{cases} x^{-1}\cdot v & \text{si } x \in H,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Lemme 10.1. *(i)* $\operatorname{Ind}_H^G V$ *est un kG-module.*

(ii) Pour chaque $v \in V$ la fonction f_v est un élément de $\operatorname{Ind}_H^G V$*.*

(iii) L'application

$$\nu : V \longrightarrow \operatorname{Res}_H^G\left(\operatorname{Ind}_H^G V\right) : \nu(v) := f_v$$

est un kH-module homomorphisme injectif.

Preuve. (i) Pour $f_1,\ f_2 \in \operatorname{Ind}_H^G V$ et $c_1,\ c_2 \in k$ on a :

$$(c_1f_1 + c_2f_2)(xh^{-1}) = c_1f_1(xh^{-1}) + c_2f_2(xh^{-1}) = c_1(h\cdot f_1(x)) + c_2(h\cdot f_2(x)) = h\cdot(c_1f_1+c_2f_2)(x).$$

Donc $c_1f_1 + c_2f_2 \in \operatorname{Ind}_H^G V$ et $\operatorname{Ind}_H^G V$ est un espace sur k. Aussi pour $g, x \in G$, $f \in \operatorname{Ind}_H^G V$, $h \in H$

$$(g\cdot f)(xh^{-1}) = f(g^{-1}xh^{-1}) = h\cdot f(g^{-1}x) = h\cdot(g\cdot f)(x),$$

et

$$(g\cdot(c_1f_1 + c_2f_2))(x) = c_1f_1(g^{-1}x) + c_2f_2(g^{-1}x) = (c_1(g\cdot f_1) + c_2(g\cdot f_2))(x).$$

Donc l'action par G est k-linéaire.

(ii) On a pour $x \in G$ et $h \in H$ que

$$f_v(xh^{-1}) = \begin{cases} (xh^{-1})^{-1} \cdot v & \text{si } xh^{-1} \in H, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} = \begin{cases} h \cdot (x^{-1} \cdot v) & \text{si } x \in H, \\ h \cdot 0 & \text{sinon.} \end{cases} = h \cdot f_v(x),$$

donc $f_v \in \operatorname{Ind}_H^G V$.

(iii) Pour $h \in H$ et $x \in G$ on a

$$(h \cdot f_v)(x) = f_v(h^{-1}x) = \begin{cases} (h^{-1}x)^{-1} \cdot v & \text{si } h^{-1}x \in H, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} = \begin{cases} x^{-1} \cdot (h \cdot v) & \text{si } x \in H, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} = f_{h \cdot v}(x),$$

donc $h \cdot f_v = f_{h \cdot v}$. Likewise $f_{c_1 v_1 + c_2 v_2} = c_1 f_{v_1} + c_2 f_{v_2}$. Donc l'application

$$V \longrightarrow \operatorname{Ind}_H^G V : \ v \mapsto f_v$$

est linéaire et même un kH-module homomorphisme si on restreint à H l'action de G sur $\operatorname{Ind}_H^G V$.

Si $f_v = 0$, alors $f_v(\mathbf{1}) = v = 0$. Donc ν est injectif. □

Maintenant nous allons indiquer une base pour $\operatorname{Ind}_H^G V$.

Lemme 10.2. *Soit $g_1, \ldots, g_r$ un système de représentants de G/H, et $v_1, \ldots, v_n$ une base de V. Alors le système $g_i \cdot f_{v_j}$, pour $1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n$, est une base de $\operatorname{Ind}_H^G V$. Donc en particulier*

$$\dim_k \operatorname{Ind}_H^G V = |G/H| \cdot \dim_k V.$$

Preuve. Pour commencer on remarque que $g_i \cdot f_v(g_j) = \delta_{i,j} v$, car

$$(g_i \cdot f_v)(g_s) = f_v(g_i^{-1} g_s) = \begin{cases} g_i^{-1} g_s \cdot v & \text{si } g_i^{-1} g_s \in H, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} = \begin{cases} v & \text{si } i = s, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $f \in \operatorname{Ind}_H^G V$. Pour $1 \leq i \leq r$ définissons des $a_{ij} \in k$ par l'équation $f(g_i) = \sum_j a_{ij} v_j$. Alors on va montrer que

$$f = \sum_{ij} a_{ij} (g_i \cdot f_{v_j}).$$

En effet, soit $g \in G$ quelconque. Alors $g = g_s h$ pour un unique s et un unique $h \in H$ et

$$f(g) = f(g_s h) = h^{-1} \cdot (f(g_s)) = h^{-1} \cdot \sum_j a_{sj} v_j = h^{-1} \cdot (\sum_{ij} a_{ij} (g_i \cdot f_{v_j}))(g_s) = \sum_{ij} a_{ij} (g_i \cdot f_{v_j})(g).$$

Supposons $\sum_{ij} a_{ij} (g_i \cdot f_{v_j}) = 0$ est une relation. Alors pour chaque s

$$\sum_{ij} a_{ij} (g_i \cdot f_{v_j})(g_s) = \sum_j a_{sj} v_j = 0,$$

donc $a_{sj} = 0$, car $v_1, \ldots, v_n$ est une base de V. □

La propriété suivante de Frobenius est importante.

Théorème 10.1 (Réciprocité de Frobenius)**.** *Soient $H < G$ un sous-groupe d'un groupe fini, k un corps, V un kH-module et U un kG-module.*

(i) Si

$$\psi : V \longrightarrow \operatorname{Res}_H^G U$$

est un kH-module homomorphisme, alors il existe un unique kG-module homomorphisme

$$\tilde{\psi} : \operatorname{Ind}_H^G V \longrightarrow U,$$

tel que $\psi = \tilde{\psi} \circ \nu$.

(ii) L'application

$$\operatorname{Hom}_{kH}(V, \operatorname{Res}_H^G U) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{kG}(\operatorname{Ind}_H^G V, U) : \psi \mapsto \tilde{\psi}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels sur k.

Preuve. (i) On commence par montrer l'existence. Soit $\psi : V \longrightarrow \operatorname{Res}_H^G U$ un kH-module homomorphisme. Nous définissons $\tilde{\psi}$: $\operatorname{Ind}_H^G V \longrightarrow U$ par

$$\tilde{\psi}(f) := \sum_{gH \in G/H} g \cdot \psi\left(f(g)\right),$$

où $f \in \operatorname{Ind}_H^G V$. Cette application est bien définie, car pour $h \in H$, $g \in G$ on a

$$gh \cdot \psi\left(f(gh)\right) = gh \cdot \psi\left(h^{-1} \cdot (f(g))\right) = ghh^{-1} \cdot \psi\left(f(g)\right) = g \cdot \psi\left(f(g)\right).$$

Clairement $\tilde{\psi}$ est une application linéaire et pour chaque $\sigma \in G$:

$$\tilde{\psi}(\sigma \cdot f) = \sum_{gH \in G/H} g \cdot \psi\left(f(\sigma^{-1} g)\right) = \sum_{gH \in G/H} \sigma g \cdot \psi\left(f(g)\right) = \sigma \cdot \tilde{\psi}(f),$$

donc $\tilde{\psi}$ est un kG-module homomorphisme. Puis pour chaque $v \in V$ on a

$$(\tilde{\psi} \circ \nu)(v) = \tilde{\psi}(f_v) = \sum_{gH \in G/H} g \cdot \psi\left(f_v(g)\right) = \psi(v).$$

Et on a montré l'existence. Pour un élément de la base $g_j \cdot f_{v_i}$ on obtient

$$\tilde{\psi}(g_j \cdot f_{v_i}) = g_j \tilde{\psi}(f_{v_i}) = g_j \psi(v_i).$$

Maintenant l'unicité. Soit $\hat{\psi}$: $\operatorname{Ind}_H^G V \longrightarrow U$ aussi un kG-module homomorphisme tel que $\psi = \hat{\psi} \circ \nu$. Alors sur $g_j \cdot f_{v_i}$ on a comme image

$$\hat{\psi}(g_j \cdot f_{v_i}) = g_j \hat{\psi}(f_{v_i}) = g_j \hat{\psi}(\nu(v_i)) = g_j \psi(v_i).$$

Donc $\hat{\psi}$ et $\tilde{\psi}$ sont deux applications linéaires qui prennent les mêmes valeurs sur une base, donc $\hat{\psi} = \tilde{\psi}$.

(ii) L'application $\psi \mapsto \tilde{\psi}$ est clairement k-linéaire. Pour $\phi \in \operatorname{Hom}_{kG}(\operatorname{Ind}_H^G V, U)$ on définit la restriction $\overline{\phi} : V \longrightarrow \operatorname{Res}_H^G U$ par $\overline{\phi} := (\phi \circ \nu)$. La restriction est l'inverse de l'extension, et vice versa :

$$\overline{\tilde{\psi}}(v) = \tilde{\psi}(f_v) = \psi(v);$$
$$\tilde{\overline{\phi}}(g_i \cdot f_v) = g_i \cdot \overline{\phi}(v) = g_i \cdot f_v.$$

□

Corollaire 10.1. *Supposons k est un corps G-déployé de caractéristique 0 et $H < G$. Soit U un kG-module simple et V un kH-module simple. Alors la multiplicité de U dans $\operatorname{Ind}_H^G V$ est égale à la multiplicité de V dans $\operatorname{Res}_H^G U$.*

Preuve. On utilise le fait que $\dim_k \operatorname{Hom}_{kG}(\operatorname{Ind}_H^G V, U)$ est (par le lemme de Schur et l'hypothèse que le corps est G-déployé et de caractérstique zéro) exactement la multiplicité de U dans $\operatorname{Ind}_H^G V$. Et $\dim_k \operatorname{Hom}_{kH}(V, \operatorname{Res}_H^G(U))$ est la multiplicité de V dans , $\operatorname{Res}_H^G(U)$. Par le théorème de Frobenius les deux nombres sont identiques. □

En particulier, si $V = k$ est la représentation triviale, alors $\operatorname{Ind}_H^G k \simeq k(G/H)$, la représentation par matrices de permutations. Donc si k est G-déployé nous trouvons que la multiplicité de U dans $k(G/H)$ est égale à la dimension des points fixes U^H. Si U est aussi la représentation triviale on retrouve que $k(G/H)$ contient exactement une fois la représentation triviale.

Corollaire 10.2. *Soit $H < G$ un sous-groupe et soit k un corps G-déployé. Pour un kG-module simple V, la multiplicité de V dans $k(G/H)$ est égale à la dimension de V^H.*

Exemple 10.3. Pour $\mathrm{Alt}_4 \lhd S_4$ et le corps $\mathbb{C}$ nous avons calculé tous les restrictions et tous les inductions. Par exemple, $\operatorname{Res} \chi_5^{S_4} = \chi_2^{\mathrm{Alt}_4} + \chi_3^{\mathrm{Alt}_4}$ et $\operatorname{Ind} \chi_2^{\mathrm{Alt}_4} = \operatorname{Ind} \chi_3^{\mathrm{Alt}_4} = \chi_5^{S_4}$ et on voit que effectivement la multiplicité de $\chi_2^{\mathrm{Alt}_4}$ dans $\operatorname{Res} \chi_5^{S_4}$ est la même que la multiplicité de $\chi_5^{S_4}$ dans $\operatorname{Ind} \chi_2^{\mathrm{Alt}_4}$.

La version matricielle d'induction s'obtient de la version abstraite en utilisant la base $g_i \cdot f_{v_j}$. Soit $g \in G$; pour chaque j il existe un unique i tel que $g_i^{-1} g g_j \in H$ et on aura

$$g \cdot (g_j \cdot f_v) = (g_i \cdot (g_i^{-1} g g_j \cdot f_v)) = g_i \cdot f_{g_i^{-1} g g_j \cdot v}.$$

Maintenant sur la base $g_1 \cdot f_{v_1}, g_1 \cdot f_{v_2}, \ldots, g_r \cdot f_{v_{n-1}}, g_r \cdot f_{v_n}$, la représentation matricielle prend la forme donnée plus haut.

Département de mathématiques et de statistique, Université de Montréal, C.P. 6128, succursale Centre-ville, Montréal (Québec), Canada H3C 3J7

E-mail address: broera@DMS.UMontreal.CA