3.4. **Produit Kroneckerien et produit tensoriel.** Soient $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(n,k)$ et $\mu : H \longrightarrow \mathrm{GL}(m,k)$ deux représentations matricielles de deux groupes sur le même corps (commutatif) k. Le *produit Kroneckerien* est la représentation matricielle de dimension nm suivante du groupe cartésien $G \times H$. On a

$$(\rho \otimes \mu)(g,h) := \begin{pmatrix} A_{11}(g,h) & A_{12}(g,h) & \dots & A_{1n}(g,h) \\ A_{21}(g,h) & A_{22}(g,h) & \dots & A_{2n}(g,h) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1}(g,h) & A_{n2}(g,h) & \dots & A_{nn}(g,h) \end{pmatrix}$$

où chaque bloc est une matrice $m \times m$

$$A_{ij}(g,h) = \rho_{ij}(g)\mu(h),$$

c'est à dire, la matrice $\mu(h)$ est multipliée par le scalaire $\rho_{ij}(g)$.

C'est une représentation pour $G \times H$, car $(\rho \otimes \mu)(g,h)(\rho \otimes \mu)(g',h')$ est une matrice en blocs avec coefficient ij :

$$\begin{aligned} \big((\rho \otimes \mu)(g,h)(\rho \otimes \mu)(g',h')\big)_{ij} &= \sum_{r=1}^{n} A_{ir}(g,h)A_{rj}(g',h') \\ &= \sum_{r=1}^{n} \rho_{ir}(g)\mu(h)\rho_{rj}(g')\mu(h') \\ &= \sum_{r=1}^{n} \rho_{ir}(g)\rho_{rj}(g')\mu(h)\mu(h') \\ &= \rho_{ij}(gg')\mu(hh') \\ &= (\rho \otimes \mu)(gg',hh'). \end{aligned}$$

Si $G = H$, on obtient aussi une représentation matricielle de G par

$$(\rho \otimes \mu)(g) := (\rho \otimes \mu)(g,g).$$

Cette construction est basée sur le produit tensoriel de deux R-modules à gauche, où R est un anneau commutatif. Si M est un RG-module et N un RH-module (R commutatif) alors $M \otimes_R N$ est un $R(G \times H)$-module. Nous allons rappeler le produit tensoriel, voir [3, §10.4, p.367-375] pour plus de détails. C'est une construction très utile, mais dans ce cours on essaiera de s'en servir que rarement.

Soit R un anneau commutatif et M, N et P trois R-modules à gauche. Une application

$$f : M \times N \longrightarrow P$$

est appelée *R-bilinéaire* si pour chaque $m \in M$ fixé l'application $n \mapsto f(m,n)$ de $M \longrightarrow P$ est R-linéaire et pour chaque $n \in N$ fixé l'application $m \mapsto f(m,n)$ de $N \longrightarrow P$ est aussi un$R$-module homomorphisme. (On peut dire que c'est une généralisation d'un produit scalaire, de l'algèbre linéaire)

Un *produit tensoriel* de M et N est une paire (T,τ) d'un R-module à gauche T avec une application R-bilinéaire $\tau : M \times N \longrightarrow T$ ayant la propriété (dite *universelle*) suivante :

Pour chaque R-module à gauche P et pour chaque application R-bilinéaire $f:\ M\times N\longrightarrow P$ il *existe un unique* R-module homomorphisme $\tilde{f}:T\longrightarrow P$ tel que $f=\tilde{f}\circ\tau$:

$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\tau"'] & & P \\ & T \arrow[ur, "\exists!\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

On montrera l'existence et l'unicité d'un produit tensoriel. Le produit tensoriel est complètement déterminé par cette propriété universelle; la façon qu'on le construit est sans importance.

(L'unicité.) Supposons (T,τ) et (T',τ') sont deux produits tensoriel de M et N. Par les deux propriétés universelles, il existe un unique R-module homomorphisme $\widetilde{\tau'}:T\longrightarrow T'$ tel que $\tau'=\widetilde{\tau'}\circ\tau$ et un unique R-module homomorphisme $\tilde{\tau}:T'\longrightarrow T$ tel que $\tau=\tilde{\tau}\circ\tau'$. Donc

$$\tau=\tilde{\tau}\circ\tau'=\tilde{\tau}\circ\widetilde{\tau'}\circ\tau.$$

Mais on a aussi $\tau=\mathbf{1}\circ\tau$, alors par l'unicité (de la propriété universelle) on a

$$\tilde{\tau}\circ\widetilde{\tau'}=\mathbf{1}$$

De façon analogue on montre que $\widetilde{\tau'}\circ\tilde{\tau}=\mathbf{1}$ et donc il existe un *unique* R-module *isomomorphism* $\widetilde{\tau'}:T\longrightarrow T'$ tel que $\tau'=\widetilde{\tau}\circ\tau$. Donc un produit tensoriel (T,τ) est unique (s'il existe) à un unique isomorphisme près. On écrit $T=M\otimes_R N$, et $m\otimes n:=\tau(m,n)$. On verra que chaque élément de $M\otimes_R N$ s'écrit comme une somme finie

$$\sum_i m_i\otimes n_i,$$

où $m_i\in M$, $n_i\in N$. On a

$$(m+m')\otimes n=m\otimes n+m'\otimes n, m\otimes(n+n')=m\otimes n+m\otimes n', r(m\otimes n)=rm\otimes n=m\otimes rn,$$

$m,m'\in M$, $n,n'\in N$, $r\in R$.

(L'existence dans un cas spécial.) Par exemple, soient M en N libre avec bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$. Soit $T=R(\mathcal{B}\times\mathcal{B}')$, le R-module libre sur le produit cartésien $\mathcal{B}\times\mathcal{B}'$ des deux bases. L'application R-bilinéaire $\tau:M\times N\longrightarrow T$ est définie par

$$\tau:(\sum_i r_ib_i,\sum_j r'_jb'_j)\mapsto\sum_{i,j}r_ir'_j[b_i,b'_j],$$

où $r_i,r'_i\in R$, $b_i\in\mathcal{B}_i$, $b'_j\in\mathcal{B}'_j$. Si $f:M\times N\longrightarrow P$ est R-bilinéaire, alors on définit

$$\tilde{f}:T\longrightarrow P;\ \sum_{i,j}r_{ij}[b_i,b'_j]\mapsto\sum_{ij}r_{ij}f(b_i,b'_j).$$

L'application $\tilde{f}:T\longrightarrow P$ est l'unique R-module homomorphism tel que $f=\tilde{f}\circ\tau$. Donc $T\simeq M\otimes_R N$ est R-libre avec base $\{b\otimes b';b\in\mathcal{B},b'\in\mathcal{B}'\}$, où $b\otimes b'=[b_i,b'_j]$.

(L'existence.) La construction en générale est la suivante (mais on ne l'utilise quasiment jamais, c'est l'existence qui compte et la propriété universelle). Soit $L=R(M\times N)$ le R-module libre sur l'ensemble $M \times N$, donc un élément s'écrit comme une somme finie $\sum_i r_i(m_i, n_i)$, où $r_i \in R, m_i \in M, n_i \in N$. Soit S le R-sous-module à gauche de L engendré par les éléments

$$(m + m', n) - (m, n) - (m', n),$$

$$(m, n + n') - (m, n) - (m, n'),$$

$$(rm, n) - (m, rn), r(m, n) - (rm, n),$$

où $m, m' \in M, n, n' \in N, r \in R$. On pose $T = L/S$ et

$$\tau : M \times N \longrightarrow L/S : (m, n) \mapsto (m, n) + S.$$

Si $f : M \times N \longrightarrow P$ est R-bilinéaire, on définit

$$\tilde{f} : T/S \longrightarrow P;\ \sum_i r_i(m_i, n_i) + S \mapsto \sum_i r_i f(m_i, n_i).$$

Alors $\tilde{f}$ est bien définie (chaque générateur de S est envoyé sur 0, parce que f est R-blinéaire) et c'est l'unique R-module homomorphisme tel que

$$f = \tilde{f} \circ \tau.$$

Donc (T, τ) est le produit tensoriel. On écrit

$$m \otimes n := (m, n) + S,$$

alors T est engendré comme R-module par les tenseurs purs $m \otimes n$. Cela finit la construction du produit tensoriel.

Soient maintenant M un RH-module et N un RG-module, alors $M \otimes_R N$ est un R-module avec l'action R-linéaire de $H \times G$ par $(h, g) \cdot \sum_i m_i \otimes n_i := \sum_i (hm_i) \otimes (gn_i)$. Le problème est que ce n'est pas tout de suite claire que l'action est bien définie, parce que un tenseur peut s"ecrire de plusieurs façons différents. On utilise la propriété universelle (il faut!).

Fixons $(h, g) \in H \times G$. Nous définissons l'application R-bilinéaire

$$M \times N \longrightarrow M \otimes_R N : (m, n) \mapsto (hm) \otimes (gn).$$

Cette application est bien définie (ne dépend d'aucun choix). Donc par la propriété universelle il existe un unique R-module homomorphisme $M \otimes_R N \longrightarrow M \otimes_R N$ tel que $m \otimes n$ est appliqué au $(hm) \otimes (gn)$. Alors l'application plus haut *est* bien définie. Les propriétés d'une action R-linéaire sont satisfaites.

4. Les théorèmes de Maschke, Schur et Jordan-Hölder

Dans cette section nous allons démontrer quelques théorèmes de base. Le premier est le plus important et utilise l'hypothèse que l'ordre du groupe n'est pas divisible par le caractéristique du corps, ou que $|G|$ est inversible dans le corps. C'est le cas pour $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Sous cette hypothèse le processus de la *moyenne* est disponible.

Théorème 4.1 (Maschke)**.** *Soit G un groupe fini et k un corps gauche où $|G|$ est inversible.*

(i) Si $W \subset V$ est un kG-sous-module, alors il existe un kG-complément W' tel que $V = W \oplus W'$.

(ii) Soit $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(n,k)$ une représentation matricielle, telle que pour chaque $g \in G$ la matrice $\rho(g)$ est de la forme

$$\rho(g) = \begin{pmatrix} A_g & X_g \\ 0 & B_g \end{pmatrix},$$

où A_g, B_g, X_g sont des matrices de taille $m \times m$, $(n-m) \times (n-m)$, $m \times (n-m)$. Alors il existe une matrice inversible P telle que

$$P\rho(g)P^{-1} = \begin{pmatrix} A_g & 0 \\ 0 & B_g \end{pmatrix},$$

pour chaque $g \in G$.

Preuve. (i) Il existe un sous-espace vectoriel W_1 de V complémentaire à W, donc pour chaque $v \in V$ il existe $w \in W$ et $w_1 \in W_1$ tels que $v = w + w_1$; les w et w_1 sont unique. L'application

$$\pi : V \longrightarrow V : v \mapsto w$$

est une projection sur W, ça veut dire une application linéaire telle que $\pi(v) \in W$ pour chaque $v \in V$ et $\pi(w) = w$ si $w \in W$. Mais π n'est pas nécessairement un kG-morphisme.

La moyenne de π sur le groupe est kG-linéaire. Plus précisément on définit $R(\pi) : V \longrightarrow V$ par :

$$R(\pi)(v) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot \pi(g^{-1} \cdot v).$$

Alors $R(\pi)$ est k-linéaire, et même kG-linéaire, parce que :

$$\begin{aligned} R(\pi)(g_1 \cdot v) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot \pi(g^{-1} \cdot (g_1 \cdot v)) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g_1(g_1^{-1}g) \cdot \pi((g_1^{-1}g)^{-1} \cdot v) \\ &= g_1 \cdot \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot \pi(g^{-1} \cdot v) \\ &= g_1 \cdot R(\pi)(v) \end{aligned}$$

Si $v \in V$, alors $\pi(g^{-1} \cdot v) \in W$ et $g \cdot \pi(g^{-1} \cdot v) \in W$, parce que W est un kG-sous-module. Il suit que $R(\pi)(V) \subset W$. Avec $w \in W$ aussi $g^{-1} \cdot w \in W$ et donc $\pi(g^{-1} \cdot w) = g^{-1} \cdot w$, $g \cdot \pi(g^{-1} \cdot w) = w$. Et donc $R(\pi)(w) = w$. Alors $R(\pi)$ est aussi une projection sur W.

Prenons maintenant $W' := \operatorname{Ker} R(\pi)$. Alors W' est un kG-sous-module, étant le noyau d'un kG-morphisme. Soit $v \in W \cap W'$, alors $R(\pi)(v) = v$ (parce que $v \in W$ et $R(\pi)$ est une projection sur W) et $R(\pi)(v) = 0$ (parce que W' est le noyau). Donc $W \cap W' = \{0\}$. Soit $v \in V$, posons $w := R(\pi)(v) \in W$ et $w' = v - w \in W'$. Alors $v = w + w'$ et $V = W \oplus W'$. Ainsi (i) est démontré.

(ii) Posons

$$\begin{aligned} M &:= \frac{1}{|G|} \sum_g \rho(g) \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rho(g)^{-1} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_g \begin{pmatrix} A_g & X_g \\ 0 & B_g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_g & X_g \\ 0 & B_g \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_g \begin{pmatrix} A_g & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{g^{-1}} & X_{g^{-1}} \\ 0 & B_{g^{-1}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I & U \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où I est la matrice identité de taille $m \times m$ et

$$U = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} A_g X_{g^{-1}}.$$

On a

$$\begin{aligned} \rho(g) M \rho(g)^{-1} &= \rho(g) \frac{1}{|G|} \sum_{g' \in G} \rho(g') \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rho(g')^{-1} \rho(g)^{-1} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g'} \rho(gg') \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rho(gg')^{-1} \\ &= M. \end{aligned}$$

Donc

$$A_g U = X_g + U B_g.$$

Posons maintenant

$$P := \begin{pmatrix} I & U \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

alors

$$P \rho(g) P^{-1} = \begin{pmatrix} I & U \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_g & X_g \\ 0 & B_g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -U \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_g & -A_g U + X_g + U B_g \\ 0 & B_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_g & 0 \\ 0 & B_g \end{pmatrix}$$

□

Remarque. La condition que $|G|$ soit inversible dans le corps est nécessaire. Soit $k = \mathbb{F}_2$ le corps de deux éléments et G le groupe de deux éléments engendré par la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors $|G| = 2 = 0 \in \mathbb{F}_2$ et il n'existe pas une matrice P telle que $PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, parce que A n'est pas l'identité.

Remarque. Un kG-module indécomposable V est un kG-module qui n'est pas isomorphe à $V_1 \oplus V_2$ pour deux kG-sous-modules propre. Par exemple un kG-module simple est indécomposable. Si $|G| \in k^\times$ tous les kG-modules indécomposable sont aussi simple. Mais ce n'est pas le cas si $|G| = 0 \in k$, comme le remarque avant montre.

4.1. **Lemme de Schur.** Pour la prochaine résultat on n'utilise pas la moyenne, donc l'hypothès est plus faible que pour le théorème de Maschke.

Théorème 4.2 (Lemme de Schur)**.** *Soit k un corps gauche, G un groupe et U, V deux kG-modules.*

(i) Si V est simple alors $\mathrm{End}_{kG}(V)$ est un corps gauche. Si U est aussi simple et $\phi : V \longrightarrow U$ un kG-module homomorphisme non-zéro, alors ϕ est un isomorphisme. Soit $C = C(k)$ le centre de k, alors $c\mathbf{1} \in \mathrm{End}_{kG}(V)$ est dans le centre de $\mathrm{End}_{kG}(V)$, en particulier $\mathrm{End}_{kG}(V)$ est un espace vectoriel sur C.

(ii) Supposons que chaque sous kG-module de V a un kG-complément. Alors V est simple si et seulement si $\mathrm{End}_{kG}(V)$ est un corps gauche.

(iii) Supposons que V est simple de dimension finie et k un corps (commutatif) algébriquement fermé. Alors $\mathrm{End}_{kG}(V) = k\mathbf{1}$.

Preuve. (i) Nous remarquons que $\mathrm{End}_{kG}(V)$ est un anneau, n'importe le kG-module V. Supposons V est simple et $\phi \in \mathrm{End}_{kG}(V)$. Alors si $\phi \neq 0$ l'image de ϕ est un sous kG-module de V qui n'est pas 0, donc (par la simplicité de V) ϕ est surjective. Le noyau de ϕ est aussi un sous kG-module de V strictement inclus dans V, alors est $\{0\}$, et donc ϕ est bijective. L'inverse ϕ^{-1} est aussi un kG-endomorphisme. Donc $\mathrm{End}_{kG}(V)$ est un corps gauche.

(ii) Supposons que V n'est pas simple, alors il existe un sous kG-module $W \subset V$, où $0 \neq w \neq V$. Par hypothèse il a un kG-complément W' tel que $V = W \oplus W'$; la projection sur W est un kG-endomorphisme qui n'est ni 0 ni bijectif, donc $\mathrm{End}_{kG}(V)$ n'est pas un corps gauche.

(iii) Soient k algébriquement fermé, $\dim_k V < \infty$ et $\phi \in \mathrm{End}_{kG}(V)$. Alors il existe une valeur propre $\lambda \in k$ pour ϕ et l'espace propre est un kG-sous-module, donc V. Alors $\phi = \lambda\mathbf{1}$. $\square$

Exemple 4.1. Nous donnons un exemple d'un $\mathbb{R}G$-module simple, ayant le corps gauche $\mathbb{H}$ des quaternions comme anneau d'endomorphismes. Considérons le groupe de huit éléments $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$, où 1 est le neutre, $\{\pm 1\}$ est le centre et où on a les relations

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Il y a une représentation $Q \longrightarrow \mathrm{GL}(4, \mathbb{R})$ induite par :

$$-1 \mapsto \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}; i \mapsto \begin{pmatrix} & & 1 & \\ & & & 1 \\ -1 & & & \\ & -1 & & \end{pmatrix}; j \mapsto \begin{pmatrix} & 1 & & \\ -1 & & & \\ & & & -1 \\ & & 1 & \end{pmatrix}; k \mapsto \begin{pmatrix} & & & -1 \\ & & 1 & \\ & -1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}.$$

Par un calcul direct on trouve que $\mathrm{End}_{\mathbb{R}Q}(V)$ (les matrices réelles qui commutent avec les images de i, j et $k = ij$) est l'ensemble des matrices

$$M(a,b,c,d) := \begin{pmatrix} a & b & c & -d \\ -b & a & -d & -c \\ -c & d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix},$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. L'application $M(a,b,c,d) \mapsto a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$ est un isomorphe de $\mathrm{End}_{\mathbb{R}Q}(V)$ vers le corps gauche des quaternions $\mathbb{H}$. Donc V est un $\mathbb{R}Q$-module simple, par le lemme de Schur. Mais $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ n'est pas $\mathbb{C}Q$-simple.

4.2. **Jordan-Hölder.** Soit V un kG-module. Une *suite de Jordan-Hölder* de V est une suite finie de kG-modules

$$V = V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset \ldots \supset V_{s-1} \supset V_s = \{0\},$$

telle que V_{i-1}/V_i est un kG-module simple. Si la dimension de V est finie, une suite de Jordan-Hölder existe toujours. On montre que la longueur s est un invariant.

Théorème 4.3 (Jordan-Hölder)**.** *Soit k un corps gauche et soit V un kG-module tel que* $\dim_k V < \infty$, *alors V admet des suites de Jordan-Hölder. Soient deux suites*

$$\{0\} = V_s \subset V_{s-1} \subset \ldots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 = V$$

et

$$\{0\} = U_t \subset U_{t-1} \subset \ldots \subset U_2 \subset U_1 \subset U_0 = V.$$

Alors leurs longueurs sont égales, i.e., $s = t$, et il existe une permutation $\pi \in S_s$ et des isomorphismes

$$V_{i-1}/V_i \simeq U_{\pi(i)-1}/U_{\pi(i)}$$

de kG-modules simples.

Lemme 4.1. *Soient U et W deux kG-sous-modules d'un kG-module V. Supposons que $U \not\subset W$ et que W est maximal. Alors $(U \cap W) \subset U$ est aussi maximal, et*

$$U/(U \cap W) \simeq V/W.$$

Preuve. On peut appliquer le deuxième théorème d'isomorphisme. On obtient un isomorphisme $U + W/W \simeq U/U \cap W$. Puisque W est maximal il suit que $V = U + W$ et $V/W \simeq U/U \cap W$. Le kG-module V/W est simple, donc aussi $U/U \cap W$ est simple et $U \cap W \subset U$ est maximal. □

Preuve du théorème. Soient deux suites de décomposition données comme dans l'énoncé du théorème. On utilise l'induction sur la dimension de V. Donc on suppose vraie le théorème pour tous les sous-modules propres de V.

Par le lemme précédent $(V_1 \cap U_1) \subset V_1$ et $(V_1 \cap U_1) \subset U_1$ sont des kG-modules maximaux. Soit

$$L_u = \{0\} \subset L_{u-1} \subset \ldots L_3 \subset L_2 := (V_1 \cap U_1)$$

une suite de décomposition de $(V_1 \cap U_1)$. Alors

$$L_u = \{0\} \subset L_{u-1} \subset \ldots \subset L_3 \subset L_2 \subset V_1$$

et

$$V_s = \{0\} \subset V_{s-1} \subset V_{s-2} \subset \ldots \subset V_2 \subset V_1$$

sont deux suites de décomposition de V_1. Par induction on obtient $s = u$ et on obtient aussi une permutation des facteurs simples. Donc aussi les facteurs simples des deux suites de V

$$L_s = \{0\} \subset L_{s-1} \subset \ldots \subset L_3 \subset L_2 \subset V_1 \subset V$$

et

$$V_s = \{0\} \subset V_{s-1} \subset \ldots \subset V_3 \subset V_2 \subset V_1 \subset V$$

sont permutés.

Aussi

$$L_u = \{0\} \subset L_{u-1} \subset \ldots \subset L_3 \subset L_2 \subset U_1$$

et

$$U_t = \{0\} \subset U_{t-1} \subset U_{t-2} \subset \ldots \subset U_2 \subset U_1$$

sont deux suites de décomposition de U_1, et par induction on a $t = u$. Donc $s = t$. Et les facteurs simples des deux suites de composition de V :

$$L_s = \{0\} \subset L_{s-1} \subset \ldots \subset L_3 \subset L_2 \subset U_1 \subset V$$

et

$$U_s = \{0\} \subset U_{s-1} \subset U_{s-2} \subset \ldots \subset U_2 \subset U_1 \subset V$$

sont permutés.

Parce que $V/U_1 \simeq V_1/U_2$ et $V/V_1 \simeq U_1/L_2$ par le lemme précédent, on a aussi que les facteurs simples des suites de composition de V :

$$L_s = \{0\} \subset L_{s-1} \subset \ldots \subset L_3 \subset L_2 \subset V_1 \subset V$$

et

$$L_s = \{0\} \subset L_{u-1} \subset \ldots \subset L_3 \subset L_2 \subset U_1 \subset V$$

sont permutés.

Donc les facteurs simples des suites de décomposition énoncé dans le théorème sont permutés. □

Exemple 4.2. Supposons que V est un kG-module semisimple et de la dimension finie. Soit $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_s$ une décomposition comme somme de kG-modules simples. Alors il existe une suite de Jordan-Hölder avec facteurs simples les V_i. Donc s est unique, et les V_i sont unique à isomorphisme et permutation près.

Soit W un kG-module simple et V un kG-module avec une suite de Jordan-Hölder $V = V_1 \supset V_2 \supset \ldots \supset V_s = \{0\}$. La multiplicité de Jordan-Hölder $\mathrm{JH}(V : W)$ est le nombre des i où $W \simeq V_{i-1}/V_i$. La définition ne dépend pas du choix de la suite de Jordan-Hölder.

Nous tirons une conséquence du théorème.

Proposition 4.1. *Soit k un corps gauche. Chaque kG-module simple W est un quotient de kG (considéré comme kG-module à gauche).*

En conséquence, si G est fini il n'existe qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme de kG-modules simple.

Preuve. Soit $w \in W$ un vecteur non-zero. L'ensemble $\{g \cdot w; g \in G\}$ est G-stable, donc l'espace vectoriel engendré par ce sous-ensemble est un sous kG-module non-trivial de W, donc est égal à W parce que W est simple. L'application

$$kG \longrightarrow W : \sum_g c_g[g] \mapsto \sum_g c_g g \cdot w$$

est un kG-module épimorphisme.

Supposons G est fini et fixons une suite de Jordan-Hölder de kG (ayant en particulier seulement un nombre fini de quotients simples). Par le théorème de Jordan-Hölder W est isomorphe à un des quotients simples de la suite. □

Un résultat analogue pour les modules indécomposable n'existe pas. Si G est un p-groupe non-cyclique et k un corps de caractéristique p. Alors il existe un nombre *infini* de classes d'isomorphismes de kG-modules indécomposable. Voir [2].

Si $|G| \in k^{\times}$, et donc le théorème de Maschke est vrai, on peut dire plus. On commence avec deux résultats généraux.

Lemme 4.2. *Soit $V = \oplus_{i=1}^n V_i$ et $W = \oplus_{j=1}^m W_j$ deux sommes directes de kG-modules. Alors*

$$\operatorname{Hom}_{kG}(V, W) \simeq \oplus_{i,j} \operatorname{Hom}_{kG}(V_i, W_j)$$

comme espaces vectoriels sur le centre $C = C(k)$ du corps gauche k.

Preuve. Exercice. □

Lemme 4.3. *Soit V un kG-module semisimple de dimension finie et W un module simple. Soit $C = C(k)$ le centre du corps gauche k. Alors*

$$\mathrm{JH}(V : W) = \frac{\dim_C \operatorname{Hom}_{kG}(W, V)}{\dim_C \operatorname{End}_{kG}(W)} = \frac{\dim_C \operatorname{Hom}_{kG}(V, W)}{\dim_C \operatorname{End}_{kG}(W)} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Preuve. Soit $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_s$ une décomposition comme somme de modules simples. Si V_i n'est pas isomorphe à W alors par le lemme de Schur $\operatorname{Hom}_{kG}(V_i, W) = 0 = \operatorname{Hom}_{kG}(W, V_i)$. Mais si $V_i \simeq W$, alors

$$\operatorname{Hom}_{kG}(V_i, W) \simeq \operatorname{Hom}_{kG}(W, W) = \operatorname{End}_{kG}(W) \simeq \operatorname{Hom}_{kG}(W, V_i).$$

Donc $\dim_C \operatorname{Hom}_{kG}(W, V) = \dim_C \operatorname{Hom}_{kG}(V, W) = \mathrm{JH}(V : W) \dim_C \operatorname{End}_{kG}(W)$. □

Théorème 4.4. *Soit G un groupe fini et k un corps gauche tel que $|G| \in k^{\times}$. Alors il existe un nombre fini de kG-modules simple à isomorphisme près, disons $W_1, \ldots, W_c$.*

(i) Chaque W_i est isomorphe à un sous-module de kG;

(ii) $\dim_C \operatorname{End}_{kG} W_i$ *divise* $\dim_C W_i$ *parce que* $\mathrm{JH}(kG, W_i) = \dim_C W_i / \dim_C \operatorname{End}_{kG} W_i$*;*

(iii)

$$|G| = \sum_{i=1}^c \frac{(\dim_C W_i)^2}{\dim_C(\operatorname{End}_{kG} W_i) \dim_C k} = \sum_{i=1}^c \frac{\dim_C W_i \cdot \dim_k W_i}{\dim_C(\operatorname{End}_{kG} W_i)}.$$

(iv) En particulier, si $k = C$ est un corps algébriquement fermé,

$$|G| = \sum_{i=1}^c (\dim_k W_i)^2.$$

Preuve. Sous l'hypothèse chaque kG-module de dimension finie est semi-simple, en particulier le kG-module à gauche kG où la multiplication est induite par $g \circ [h] := [gh]$. Soit W un kG-module simple. Alors

$$\mathrm{Hom}_{kG}(kG, W) \longrightarrow W : \phi \mapsto \phi([\mathbf{1}_G])$$

est une bijection avec l'inverse $w \mapsto \phi_w$, où $\phi_w(r) := r \cdot w$, parce que $\phi_w([1]) = w$ et $\phi_{\phi([1])} = \phi$. Si C est le centre de k, alors c'est aussi un isomorphisme d'espaces vectoriels sur C.

Donc $\mathrm{JH}(kG : W) = \dim_C W / \dim_C \mathrm{End}_{kG} W > 0$, alors en particulier W est isomorphe à un sous-module de kG, et parce que kG a seulement un nombre fini de composantes simple, le nombre de kG-modules simple est fini à isomorphismes près, d'après Jordan-Hölder. On a en plus $\dim_C kG \dim_C k = \sum_j \mathrm{JH}(kG : W_j) \dim_C W_j$, donc

$$|G| \dim_C k = \sum_j \frac{\dim_C W_j}{\dim_C \mathrm{End}_{kG} W_j} \dim_C W_j.$$

□

Exemple 4.3. On considère le groupe Q des quaternions et le corps des réels. Le module $\mathbb{R}Q$ est la somme directe de cinq $\mathbb{R}Q$-modules simples.

Considère les cinq éléments de $\mathbb{R}Q$ suivants :

$$\begin{aligned}
e_1 &= \frac{1}{8}([1] + [-1] + [i] + [-i] + [j] + [-j] + [k] + [-k]);\\
e_2 &= \frac{1}{8}([1] + [-1] - [i] - [-i] - [j] - [-j] + [k] + [-k]);\\
e_3 &= \frac{1}{8}([1] + [-1] - [i] - [-i] + [j] + [-j] - [k] - [-k]);\\
e_4 &= \frac{1}{8}([1] + [-1] + [i] + [-i] - [j] - [-j] - [k] - [-k]);\\
e_5 &= \frac{1}{2}([1] - [-1]).
\end{aligned}$$

Ils sont tous dans le centre de $\mathbb{R}Q$ et on a $e_i^2 = e_i$ (idempotent) et $e_i e_j = 0$ si $i \neq j$ (orthogonal) et $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 = [1]$ (complet), donc

$$\mathbb{R}Q = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2 \oplus \mathbb{R}e_3 \oplus \mathbb{R}e_4 \oplus \mathbb{R}Q \cdot e_5$$

est une décomposition, où la dernière terme est de dimension quatre :

$$\mathbb{R}Q \cdot e_5 = \mathbb{R}e_5 \oplus \mathbb{R} \cdot [i]e_5 \oplus \mathbb{R} \cdot [j]e_5 \oplus \mathbb{R} \cdot [k]e_5.$$

La partie $\mathbb{R}Q \cdot e_5 \subset \mathbb{R}Q$ est même un sous-algèbre et les multiplications

$$([i]e_5)^2 = ([j]e_5)^2 = ([k]e_5)^2 = [i]e_5[j]e_5[k]e_5 = -e_5$$

montrent que $\mathbb{R}Q \cdot e_5$ est isomorphe au corps gauche des quaternions $\mathbb{H}$. On a que

$$\mathrm{End}_{\mathbb{R}Q}(\mathbb{R}Q \cdot e_5) = \mathbb{R}Q \cdot e_5,$$

donc par le lemme de Schur $\mathbb{R}Qe_5$ est un $\mathbb{R}Q$-module simple. Les autres sont $\mathbb{R}Qe_i$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Sur les nombres complexes $\mathbb{C}Q$ a encore la décomposition

$$\mathbb{C}Q = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3 \oplus \mathbb{C}e_4 \oplus \mathbb{C}Q \cdot e_5$$

mais

$$\mathbb{C}Q \cdot e_5 = \mathbb{C} \cdot e_5 \oplus \mathbb{C} \cdot [i]e_5 \oplus \mathbb{C} \cdot [j]e_5 \oplus \mathbb{C} \cdot [k]e_5$$

(comme $\mathbb{C}$-espace) n'est plus simple comme $\mathbb{C}G$-module. Considérons

$$\begin{aligned} e_6 &:= \frac{1}{4}([1] - [-1] + i[i] - i[-i]); \\ e_7 &:= e_5 - e_6 = \frac{1}{4}([1] - [-1] - i[i] + i[-i]), \end{aligned}$$

alors encore $e_6^2 = e_6$, $e_7^2 = e_7$, $e_6e_7 = e_7e_6 = 0$ et $e_6e_i = e_ie_6 = e_7e_i = e_ie_7 = 0$, pour $1 \leq i \leq 4$. On a la décomposition de $\mathbb{C}Q$-modules :

$$\mathbb{C}Q \cdot e_5 = \mathbb{C}Q \cdot e_6 \oplus \mathbb{C}Q \cdot e_7,$$

où

$$\mathbb{C}Q \cdot e_6 = \mathbb{C}e_6 + \mathbb{C} \cdot [j]e_6 \quad \text{et} \quad \mathbb{C}Q \cdot e_7 = \mathbb{C}e_7 + \mathbb{C} \cdot [j]e_7$$

(comme $\mathbb{C}$-espaces). Les $\mathbb{C}Q$-modules simple sont $\mathbb{C}e_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ et $\mathbb{C}Qe_6$ (isomorphe à $\mathbb{C}Qe_7$).

Département de mathématiques et de statistique, Université de Montréal, C.P. 6128, succursale Centre-ville, Montréal (Québec), Canada H3C 3J7

E-mail address: broera@DMS.UMontreal.CA